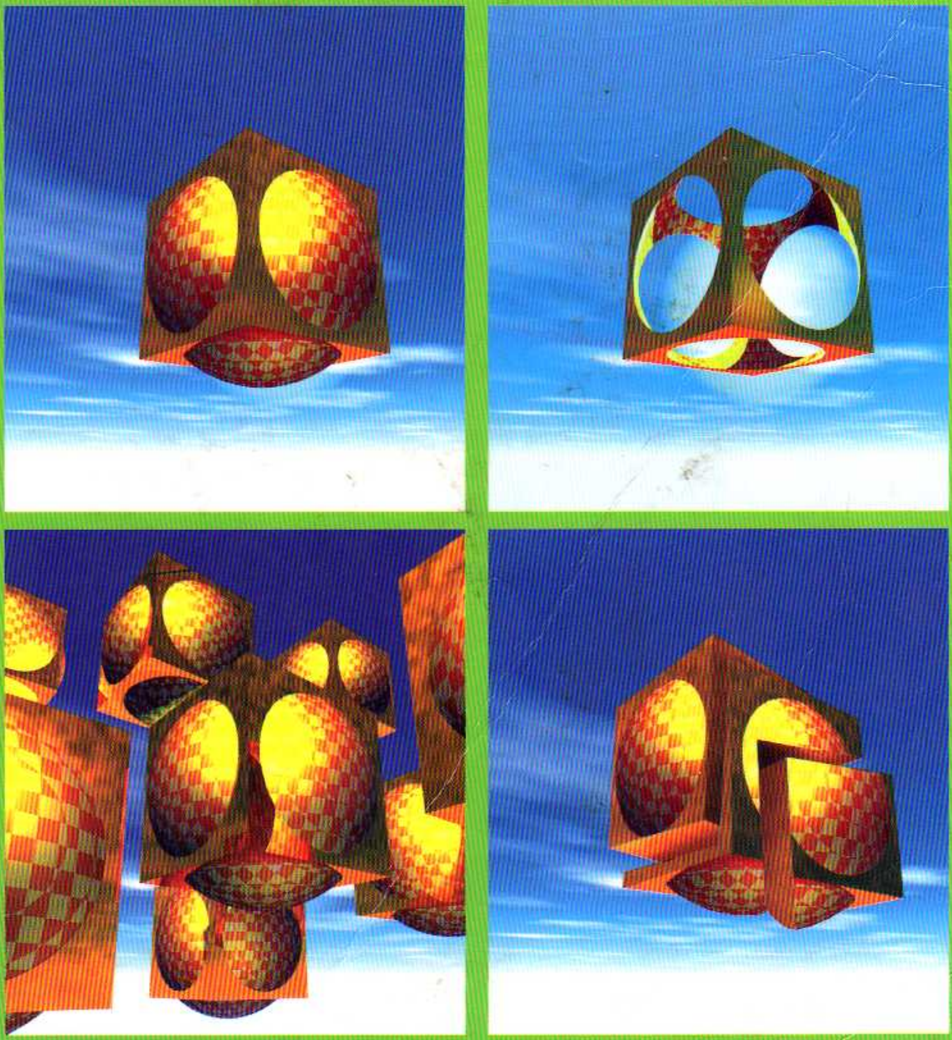
ÁLGEBRA y TRIGONOMETRÍA

Segunda edición revisada



McGraw Hill

Dennis G. ZILL • Jacqueline M. DEWAR

Algebra y Trigonometría

ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA SEGUNDA EDICIÓN REVISADA

ISBN: 0-07-557095-5

Editora: Emma Ariza H.
2134567890 2134567890

ISBN: 958-41-0162-5

Impreso en Colombia Printed in Colombia

Se imprimieron 7.500 ejemplares en el mes de Febrero de 2003
Impreso por Quebecor World Bogotá S.A.

Prefacio

FILOSOFIA

Este texto refleja nuestra filosofía acerca de que un texto de matemáticas en el nivel de comienzos de universidad debe ser legible, directo y cargado de motivación. Pero, en últimas, los estudiantes pueden aprender matemáticas sólo haciendo matemáticas. En consecuencia, hemos enfatizado la solución de problemas como medio de comprensión. Los ejemplos están diseñados para motivar, instruir y guiar a los estudiantes; los ejercicios, entonces, proporcionan a los estudiantes la oportunidad de probar su comprensión, de retar su entendimiento y de aplicar su conocimiento a situaciones del mundo real.

AUDIENCIA Y FLEXIBILIDAD

Intentamos que este texto proporcione un tratamiento del álgebra, de las funciones, de las gráficas, de la trigonometría, de los logaritmos, de los sistemas de ecuaciones, de las matrices, de la geometría analítica, de las secuencias y de la probabilidad que sea accesible a un estudiante universitario que ha cursado dos años de matemáticas en secundaria. Hemos proporcionado aquí material suficiente para un primer semestre normal o de dos cuartos o, incluso, todo un año en el que se avance lentamente en matemáticas. Tal riqueza de temas permite al profesor seleccionar los que más se ajustan a los objetivos del curso y a los antecedentes y habilidades de los estudiantes. El texto puede servir como prerrequisito de las matemáticas finitas, de la estadística o de las matemáticas discretas. También puede ser un curso introductorio a las matemáticas de universidad para los estudiantes de humanidades o de negocios que no planean un estudio mayor de las matemáticas o como curso inicial en una secuencia que proporcione los prerrequisitos para el cálculo.

CARACTERISTICAS

Pedagogía

- *Ejemplos*. Hemos experimentado que los ejemplos y ejercicios son las principales fuentes de aprendizaje en un texto de matemáticas. Hemos descubierto que el estudiante confía en los ejemplos, no en teoremas ni en pruebas. En consecuencia, hemos incluido numerosos ejemplos para ilustrar tanto los conceptos teóricos como las técnicas computacionales abarcadas en el texto.

- *Ejercicios*. Sentimos que los estudiantes pueden aprender algo haciéndolo. En consecuencia, para promover la participación activa en la solución de problemas, los ejercicios son extensos y variados. El conjunto de ejercicios incluye abundantes problemas como las preguntas de falso-verdadero, complete, aplicaciones, problemas desafiantes, problemas de gráficas y problemas que requieren interpretación de gráficas. Esta variedad proporciona la oportunidad a los estudiantes de hacer más sólida su comprensión de conceptos básicos, ver los usos prácticos de ideas matemáticas abstractas y evaluar su ingenio. Para esta edición cada grupo de ejercicios ha sido reorganizado y ampliado; el texto contiene ahora más de 5,000 ejercicios.
- *Aplicaciones*. Hemos agregado muchas nuevas aplicaciones seleccionadas a partir de revistas, periódicos y textos científicos. Estos problemas de la "vida real" muestran a los estudiantes la fuerza y utilidad de las matemáticas que aprenden durante este curso. Las aplicaciones en esta edición abarcan una amplia variedad de disciplinas, incluyendo la astronomía, la biología, los negocios y la economía, la química, la ecología, la ingeniería, la geología, la medicina, la meteorología, la óptica y la física.
- *Motivación*. A pesar de que se incluye un gran número de evidencias, hemos motivado típicamente los conceptos en forma intuitiva y geométrica. Además, donde ha sido posible, hemos utilizado figuras para ilustrar una idea o ayudar en la solución.
- *Enfasis en las funciones*. Debido a que las funciones son un concepto esencial en este curso y en las matemáticas como un todo, hemos aumentado el énfasis en las funciones y en la notación de funciones en esta edición. (*Véanse cambios en la cobertura de temas en la segunda edición*).
- *Enfasis en la graficación*. También hay un énfasis mayor en la graficación de ecuaciones y funciones. Hemos enfatizado la simetría, el uso de gráficas trasladadas, reflexiones, intersecciones e interpretación de gráficas a través del texto.
- *Gráficas y fotografías*. Como ayuda para la comprensión y solución de problemas, hemos incluido más de 1,100 figuras cuidadosamente clasificadas en esta edición. Además, las fotografías están ubicadas por todo el texto para incrementar su atractivo y así aumentar el interés del estudiante en las aplicaciones.

Para cada capítulo

- *Material de inicio de capítulo*. Cada capítulo inicia con una tabla de contenidos, una discusión motivante del material y un breve recuento histórico del matemático que tuvo gran influencia en el desarrollo de las matemáticas en ese capítulo.
- *Conceptos claves*. Cada capítulo concluye con una lista de verificación de conceptos importantes presentados en el capítulo, la cual los estudiantes pueden utilizar para repasar el material.
- *Ejercicios de repaso*. Además, al final de cada capítulo hay un amplio conjunto de ejercicios de repaso para que el estudiante pueda evaluar su comprensión.

Ayuda especial para estudiantes

- *Flechas explicativas*. A través de la exposición y de los ejemplos, las flechas en forma de caja anotan y justifican los pasos algebraicos y muestran a los estudiantes cómo se usan los conceptos.
- *Notas de advertencia*. Los errores comunes y malinterpretaciones se señalan a los estudiantes en las **Notas de advertencia**. Estas notas van desde breves recordatorios de los errores simples hasta extensos análisis sobre el trazado de suficientes puntos para una

gráfica, el uso correcto de la calculadora y la eliminación de soluciones extrañas. Estos numerosos recordatorios alertarán a los estudiantes sobre los errores comunes y aclararán las suposiciones escondidas.

- *Exactitud en el cálculo.* Debido a que cualquier aplicación del mundo real se basa en medidas que son aproximadas, la respuesta es sólo tan exacta como los datos. Los estudiantes con frecuencia olvidan esta limitación y utilizan todos los dígitos que proporciona una calculadora. En consecuencia, en la sección 1.3 hemos agregado un análisis sobre los dígitos significativos y las aproximaciones. Además, con frecuencia hacemos que los estudiantes recuerden que, para asegurar la exactitud cuando usan la calculadora, deben hacer todos los cálculos en la calculadora para evitar escribir los resultados intermedios.

COBERTURA DE TEMAS

- *Números complejos.* Se presentan los números complejos al iniciar el texto (sección 2.4).
- *Funciones inversas.* Hemos mejorado la discusión de las funciones inversas (en la sección 3.7) proporcionando más motivación y claridad, y varias figuras adicionales.
- *Variación.* La función potencia se presenta en una nueva sección sobre variación (sección 3.8).
- *Funciones polinomiales y racionales.* El capítulo 4 (Funciones polinomiales y racionales) es esencialmente nuevo. La regla de los signos de Descartes, las cotas para los ceros reales de los polinomios, el teorema del valor intermedio, el método de bisección de intervalos para aproximación de ceros reales, de polinomios, los procedimientos de graficación para funciones polinomiales y racionales y asíntotas oblicuas son algunos de los nuevos temas agregados al texto. Un programa BASIC para el método de bisección de intervalos se incluye en la sección 4.7.
- *Calculadoras versus logaritmos.* El tema de los logaritmos (capítulo 5) como herramienta de computación ha sido eliminado del texto en beneficio del aumento en el énfasis del uso de la calculadora. Debido a que las calculadoras se usan ampliamente y a que ahora son relativamente baratas, creemos que es razonable esperar que un estudiante de universidad posea una. Sin embargo, hemos incluido un análisis de la interpolación y uso de tales tablas en un apéndice, para aquellos que desean familiarizar a los estudiantes con las tablas logarítmicas.
- *Trigonometría.* En esta revisión hemos reorganizado y ampliado el análisis de la trigonometría. Las funciones trigonométricas ahora se presentan en el capítulo 6 (Trigonometría del triángulo) utilizando los triángulos rectángulos. Este método se basa en la intuición y en el conocimiento de la geometría de los estudiantes. Las aplicaciones de los triángulos rectángulos, incluyendo la ley de los senos y la ley de los cosenos, se tratan en este capítulo.

  En el capítulo 7 (Trigonometría analítica) presentamos la definición en el círculo unitario de las funciones trigonométricas de los números reales. A lo largo de este capítulo se hace énfasis en las funciones circulares y en sus gráficas y aplicaciones.

  Hemos ampliado la sección original sobre fórmulas especiales trigonométricas a dos secciones: una sobre las reglas de la suma y resta (sección 7.5) y otra sobre fórmulas de ángulos múltiples (sección 7.6).

  Una nueva sección (7.7) sobre las reglas del producto y de la suma ha sido agregada al capítulo 7.

- *Fracciones parciales*. Una nueva sección sobre fracciones parciales ha sido agregada al capítulo 8 (Sistemas de ecuaciones).
- *Secciones cónicas*. El capítulo 10 (Secciones cónicas) contiene ahora secciones sobre traslación y rotación de ejes, coordenadas polares, ecuaciones polares de las secciones cónicas y una introducción sobre vectores.
- *Probabilidad*. El capítulo 11 (Secuencias, series y probabilidad) contiene dos nuevas secciones: una sobre permutaciones y combinaciones y otra sobre probabilidad.

EXACTITUD

A partir de nuestros muchos años de enseñanza, nos hemos dado cuenta de lo frustrante que es para estudiantes y maestros encontrar errores en el texto o en las respuestas de los ejercicios. Para asegurar la exactitud, no sólo hemos revisado todas las respuestas nosotros mismos, sino que las respuestas también han sido revisadas en forma independiente por Barry A. Cipra y Warren S. Wright. Si, después de todo, encuentra algún error, agradeceríamos que lo notificara a nuestro editor para que estas fallas puedan eliminarse en las siguientes impresiones.

SUPLEMENTOS

Este texto va acompañado de un paquete de suplementos completo que incluye un manual de soluciones para el estudiante, el manual de consulta para el maestro, el manual de respuestas y un banco de pruebas computarizado e impreso.

MANUAL DE SOLUCIONES PARA EL ESTUDIANTE. Este manual fue preparado por Warren S. Wright y contiene las soluciones detalladas de los ejercicios de los números impares.

MANUAL DE CONSULTA PARA EL MAESTRO. Este manual incluye ejemplos de pruebas, preparadas por Linda Hawley y numerosas transparencias de ayuda para su uso en clase.

MANUAL DE RESPUESTAS. Fue preparado por Barry A. Cipra e incluye respuestas a los ejercicios de número par.

BANCO DE PRUEBAS. Las preguntas que se encuentran en las pruebas de ejemplo y las preguntas de prueba adicionales también están disponibles en forma de banco de pruebas, que corresponde a la versión para computadores personales IBM y compatibles con éstos.

RECONOCIMIENTOS

Nos gustaría aprovechar esta oportunidad para expresar nuestro agradecimiento a Barry A. Cipra por proporcionar muchos de los problemas aplicados que aparecen en los grupos de ejercicios, a Mary Margaret Grady por volver a mecanografiar todo el manuscrito y a Warren S. Wright por darnos acceso a su material de la primera edición. También fue una suerte que las siguientes personas leyeran toda o parte de esta segunda edición en manuscrito. Sus críticas y muchas sugerencias fueron reconocidas con gratitud:

Wayne Andrepoint	*University of Southwestern Louisiana*
Nancy Angle	*Colorado School of Mines*
James E. Arnold	*University of Wisconsin-Milwaukee*
Judith Baxter	*University of Illinois-Chicago Circle*
Margaret Blumberg	*Southwestern Louisiana University*
Robert A. Chaffer	*Central Michigan University*
Daniel Drucker	*Wayne State University*
Chris Ennis	*Carleton College*

E. John Hornsby	*University of New Orleans*
Don Johnson	*New Mexico State University*
Jimmie Lawson	*Louisiana State University*
Gerald Ludden	*Michigan State University*
Stanley M. Lukawecki	*Clemson University*
Richard Marshall	*Eastern Michigan University*
Glenn Mattingly	*Sam Houston State University*
Michael Mays	*West Virginia University*
Phillip R. Montgomery	*University of Kansas*
Bruce Reed	*Virginia Polytechnic Institute and State University*
Jean Rubin	*Purdue University*
Helen Salzberg	*Rhode Island College*
George L. Szoke	*University of Akron*
Darrell Turnbridge	*Kent State University*

También quisiéramos agradecer a las siguientes personas que respondieron a un estudio de mercado detallado realizado por nuestro editor:

Carol Achs	*Mesa Community College*
Joseph Altinger	*Youngstown State University*
Phillip Barker	*University of Missouri-Kansas City*
Wayne Britt	*Louisiana State University*
Kwang Chul Ha	*Illinois State University*
Duane Deal	*Ball State University*
Richard Friedlander	*University of Missouri-St. Louis*
August Garver	*University of Missouri-Rolla*
Irving Katz	*George Washington University*
Janice Kilpatrick	*University of Toledo*
Barbara Meininger	*University of Oregon*
Eldon Miller	*University of Mississippi*
Judith Rollstin	*University of New Mexico*
Monty J. Strauss	*Texas Tech University*
Faye Thames	*Lamar University*
Waldemar Weber	*Bowling Green State University*

Por último, estamos muy agradecidos con el personal de Random House y McGraw-Hill, especialmente con Alexa Barnes, editora de desarrollo; Margaret Pinette, gerente de proyectos; John Martindale, editor senior; Robert Weinstein, editor promotor y John Morriss, gerente de edición por su constante flujo de ideas, guía, apoyo y por su estímulo ocasional pero necesario.

Serie

Serie de Precálculo de Zill y Dewar

Algebra para la universidad

Un texto diseñado para cursos de un periodo académico que cubre temas como las ecuaciones e inecuaciones, funciones algebraicas, funciones exponencial y logarítmica, matrices, geometría analítica y probabilidad.

Trigonometría

Este texto incluye el triángulo y trigonometría analítica, funciones exponencial y logarítmica, vectores, geometría y coordenadas polares.

Algebra y trigonometría

Este título combina el contenido de los dos textos escritos antes. Incluye sufiente material estándar para cursos de un semestre o dos trimestres o, incluso, para un curso lento de todo un año.

Contenido

3 Funciones y gráficas 119

4 Funciones polinomiales y racionales 181

5 Funciones exponenciales y logarítmicas 237

6 Trigonometría del triángulo 271

7 Trigonometría analítica 329

8 Sistemas de ecuaciones e inecuaciones 405

9 Matrices 441

10 Temas de geometría analítica 485

0

Lógica y conjuntos*

* El autor de este nuevo capítulo 0 sobre lógica y conjuntos, así como de la modificación e innovación de los ejercicios correspondientes a los capítulos 1 a 11 es el profesor Amado Reyes, de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, y de la Universidad Autónoma de Santo Domingo.

0.1 Enunciados y valor de verdad

La lógica es la rama del conocimiento que trata los métodos de razonamiento mediante reglas y técnicas, con el fin de determinar si un argumento dado es válido. El tema que nos ocupa es el de la lógica usada en matemática. Aquí trabajamos con elementos básicos llamados proposiciones.

DEFINICION 1

Una **proposición** es un enunciado u oración declarativa de la cual se puede afirmar que es falsa o verdadera, pero no ambas cosas a la vez.

DEFINICION 2

La veracidad o falsedad de una proposición es lo que se llama su **valor de verdad**.

EJEMPLO 1

La expresión

"La Tierra es redonda"

es una proposición. Puede notarse que su valor de verdad es verdadero, ya que se conoce con certeza que la Tierra es redonda.

EJEMPLO 2

La expresión

"$2 + 3 = 5$"

que se lee "dos más tres es igual a cinco", es una proposición con valor de verdad verdadero, ya que en el sistema numérico decimal (usando el número 10 como referencia), se conoce con certeza que $2 + 3 = 5$.

EJEMPLO 3

La expresión

"$1 + 1 = 5$"

que se lee "uno más uno es igual a cinco", es una proposición con valor de verdad falso, ya que se conoce con certeza que $1+1 \neq 5$ ($\neq$ se lee diferente de).

¿Por qué la expresión $3 - x = 5$ es una oración declarativa, pero no es una proposición?

$3 - x = 5$ no es una proposición, porque no sabemos su valor de verdad a menos que asignemos un valor a la variable x. Si le asignamos a x el valor -2, entonces $3 - x = 5$ se convierte en una proposición con valor de verdad verdadero, ya que $3 - (-2) = 3 + 2 = 5$. Pero si le asignamos a x el valor 6, por ejemplo, entonces $3 - x = 5$ se convierte en una proposición con valor de verdad falso, ya que $3 - 6 \neq 5$.

¿Por qué la expresión "¿Habla usted español?" no es una proposición?

La expresión, "¿Habla usted español?" no es una proposición porque no es un enunciado declarativo sino interrogativo.

¿Por qué la expresión "tome dos aspirinas" no es una proposición?

La expresión "tome dos aspirinas" no es una proposición porque es un enunciado imperativo, es una orden y no un enunciado declarativo.

POSTULADOS O AXIOMAS Y TEOREMAS

DEFINICION 3

Un **axioma** o postulado es una proposición inicial la cual se asume como verdadera. El conjunto de postulados de los cuales se desprenden las demás proposiciones de un sistema se llama **conjunto de postulados del sistema**. En éste, uno de los axiomas no debe ser deducible de los otros.

EJEMPLO 4

Uno de los postulados de la geometría euclidiana es el postulado de la recta:

"Dados dos puntos distintos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene".

Este postulado o axioma es parte de un conjunto de postulados del sistema que formula la geometría de Euclides, estudiada desde la escuela elemental.

EJEMPLO 5

En nuestro estudio de geometría aceptamos cierta la proposición:

"Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto".

Éste es otro ejemplo de los postulados o axiomas sobre los cuales se apoya el sistema geométrico euclidiano.

OBSERVACION 1

La característica básica de un postulado o axioma es el hecho de ser independiente de otras proposiciones.

DEFINICION 4

Un **teorema** es cualquier proposición que se desprende de otra proposición o proposiciones dadas por supuestas o previamente demostradas dentro del sistema. Así, un teorema es una proposición cuya veracidad requiere ser demostrada a partir de otras.

EJEMPLO 6

El teorema del triángulo isósceles asevera:

"Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes".

Este teorema se demuestra a partir de otras proposiciones, entre las cuales se cuenta uno de los postulados para congruencia de triángulos (lado–ángulo–lado, L∢L).

OBSERVACION 2

En estas notas tratamos básicamente con el análisis de la veracidad de las proposiciones en forma general, es decir, con el cálculo proposicional.

EJERCICIO 0.1

En los enunciados del 1 al 15 diga en cada caso si el enunciado dado es o no es una proposición. Justifique su respuesta. En caso de ser una proposición, diga su valor de verdad.

1. Julio César fue presidente de la República Dominicana.
2. $2 + 2 = 4$
3. Si la Tierra es plana, entonces $2 + 2 = 4$
4. ¿En tu casa o en la mía?
5. ¡Ayúdeme, por favor!
6. La matemática es importante.
7. Existen dos soluciones para la ecuación $x^2 + 4 = 20$, y ambas soluciones son enteras.
8. Si x es cualquier número entero, entonces x^2 es un número entero positivo.
9. Vé en su busca.
10. x es mayor que y.
11. 15 es un número primo.
12. $a + b = 1.7$
13. La población de la República Dominicana es de siete millones.
14. Las mesas son cuadradas.
15. ¿Bello día?

0.2 Proposiciones simples y compuestas

Sin pretender dar una definición precisa de variable podemos afirmar que en matemática se usan los literales $x, y, t, \ldots$ para denotar números reales y estos literales se llaman **variables**. Las variables pueden combinarse mediante las operaciones corrientes para producir otras expresiones variables más complejas. En lógica, los literales $p, q, r, \ldots$ denotan variables que pueden remplazarse por proposiciones.

EJEMPLO 1

La variable proposicional p puede remplazarse por la proposición

"El sol brilla todo el día"

p: El sol brilla todo el día

y la variable proposicional q puede remplazarse por la proposición

"Hace frío"

q: Hace frío

DEFINICION 5

Los **conectivos lógicos** son símbolos usados para combinar proposiciones dadas, produciendo así otras llamadas **proposiciones compuestas**.

OBSERVACION 1

Las proposiciones p y q que se combinan mediante algún conectivo lógico para formar una proposición compuesta se llaman proposiciones **simples**.

Los conectivos fundamentales usados en este capítulo son:

a) $\sim$ la negativa
b) $\wedge$ la conjuntiva
c) $\vee$ la disyuntiva inclusiva
d) $\veebar$ la disyuntiva exclusiva
e) $\rightarrow$ la condicionante
f) $\leftrightarrow$ la bicondicionante

a) NEGACION

La **negación** de una proposición es una nueva proposición que tiene un valor de verdad opuesto, es decir, si p es verdadera y la negación de p es falsa. Se denota como $\sim p$ y se lee **no** p.

EJEMPLO 2

Si p: El río está sucio,
entonces

$\sim p$: No es verdad que el río está sucio

o simplemente:

$\sim p$: El río no está sucio.

OBSERVACION 2

La característica fundamental de la negación es que es una proposición cuyo valor de verdad es contrario al valor de verdad de la proposición dada. Así, si la proposición p es verdadera, entonces p es falsa y viceversa.

DEFINICION 6

El arreglo que nos permite tener los posibles valores de verdad de una proposición compuesta a partir de los valores de verdad de las proposiciones componentes se llama una **tabla de verdad**.

Así, la tabla de verdad para la negación de p está dada por:

p	$\sim p$
V	F
F	V

donde V significa verdadera y F significa falsa.

EJEMPLO 3

La proposición

$$p: 2 + 3 > 1$$

es una proposición verdadera. Pero la proposición

$$\sim p : \text{no es verdad que } 2 + 3 > 1$$

o

$$\sim p: 2 + 3 \leq 1,$$

es una proposición falsa.

b) CONJUNCION

La **conjunción** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la conjuntiva ($\wedge$). Esta proposición se denota por $p \wedge q$ y se lee ***p* y *q***.

EJEMPLO 4

Si p: La silla es alta
y q: El mantel es blanco,
entonces la proposición "La silla es alta y el mantel es blanco" está expresada por: $p \wedge q$.

Es natural que el valor de verdad de una proposición compuesta dependa de los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman.

OBSERVACION 3

La característica fundamental de la conjunción es que su valor de verdad es verdadero sólo en el caso en que las proposiciones simples que la forman tengan ambas valor de verdad verdadero. La tabla de verdad de una conjunción es la siguiente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Note que cada línea de la tabla registra el valor de verdad de la conjunción para valores particulares de las proposiciones simples que la forman.

EJEMPLO 5

Si sabemos que "El día está lluvioso" es una aseveración verdadera, pero que la aseveración "El carro es nuevo" es falsa, ¿cuál es el valor de verdad de la aseveración "El día está lluvioso y el carro es nuevo"?

Solución. Si p: El día está lluvioso
y q: El carro es nuevo,
entonces la proposición "El día está lluvioso y el carro es nuevo" se escribe como $p \wedge q$.

Ahora sabemos que p es verdadero (V) y q es falso (F); basta con leer la tabla de la conjunción en la línea donde p es V y q es F para tener el valor de $p \wedge q$, la cual es falsa. Así, procedemos del mismo modo para las demás alternativas.

c) DISYUNCION INCLUSIVA

La **disyunción inclusiva** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la disyuntiva inclusiva ($\vee$). Esta proposición se denota por $p \vee q$ y se lee ***p* o *q***.

EJEMPLO 6

Si p: Está lloviendo
y q: $3 < 5$,
entonces la proposición "Está lloviendo o $3 < 5$" se expresa: $p \vee q$.

OBSERVACION 4

La característica fundamental de la disyunción inclusiva es que su valor de verdad es falso sólo en el caso en que las dos proposiciones simples que la forman tengan valor de verdad falso. En todos los otros casos la disyunción inclusiva tiene valor de verdad verdadero. La tabla de verdad de una disyunción inclusiva es la siguiente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EJEMPLO 7

Si p: El libro es nuevo, es verdadera
y q: El joven es inteligente, es falsa,
determine el valor de verdad de la proposición "El libro es nuevo o el joven es inteligente".

Solución. La proposición "El libro es nuevo o el joven es inteligente" se puede expresar como $p \vee q$. Puesto que p es V y q es F, la segunda fila de la tabla de la disyunción inclusiva muestra que el valor de verdad para $p \vee q$ es V.

d) DISYUNCION EXCLUSIVA

La **disyunción exclusiva** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la disyuntiva exclusiva ($\veebar$). Esta proposición se denota por $p \veebar q$ y se lee **o *p* o *q***.

EJEMPLO 8

Si p: El vaso es bonito
y q: La leche está adulterada,
entonces la proposición "O el vaso es bonito o la leche está adulterada", se expresa: $p \veebar q$.

OBSERVACION 5

La característica fundamental de la disyunción exclusiva es que su valor de verdad es verdadero sólo cuando las proposiciones que la componen tienen valores de verdad contrarios. En los otros casos la disyunción exclusiva tiene valor de verdad falso. La tabla de verdad de una disyunción exclusiva es la siguiente:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EJEMPLO 9

Si p: Antonio va a la fiesta, es falsa
y q: Luisa va al cine, es verdadera,
determine el valor de verdad de la proposición "O Antonio va a la fiesta o Luisa va al cine".

Solución. La proposición "O Antonio va a la fiesta o Luisa va al cine" se puede expresar como $p \veebar q$. Puesto que p es F y q es V, la tercera fila en la tabla de la disyunción exclusiva muestra que el valor de verdad para $p \veebar q$ es V.

e) CONDICIONAL

La **condicional** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la condicionante ($\rightarrow$). Esta proposición se denota por $p \rightarrow q$ y se lee **si p entonces q**.

EJEMPLO 10

Si p: $2 + 3 = 5$
y q: La universidad es bonita,
la proposición "si $2 + 3 = 5$, entonces la universidad es bonita", viene expresada por $p \rightarrow q$. En la estructura $p \rightarrow q$, la proposición que está antes de la flecha se llama el **antecedente** y la que está después de la flecha se llama el **consecuente**.

OBSERVACION 6

La característica fundamental de la condicional es que su valor de verdad es falso sólo cuando el consecuente es falso y el antecedente es verdadero. En los demás casos la condicional es verdadera. La tabla de verdad de una condicional es la siguiente:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

EJEMPLO 11

Si p: $3^2 = 9$, es verdadera
y q: 2 es par, es verdadera,
determine el valor de verdad de la proposición "Si $3^2 = 9$, entonces 2 es par". Esta proposición se puede expresar como $p \to q$. Puesto que p es V y q es V, la primera fila en la tabla de verdad de la condicional muestra que $p \to q$ es verdadera (V).

Existen varias formas de leer la condicional $p \to q$; listamos a continuación algunas de ellas:

a) Si p entonces q
b) p implica q
c) q si p
d) p sólo si q
e) p es condición suficiente para q
f) q es condición necesaria para p

> Si $p \to q$ es una condicional dada, entonces la recíproca de $p \to q$ es la condicional $q \to p$. Así mismo, la contrapositiva de $p \to q$ es la condicional $\sim q \to \sim p$ y la inversa es $\sim p \to \sim q$.

OBSERVACION 7

Si construimos las tablas de verdad para $p \to q$ y la contrapositiva $\sim q \to \sim p$, vemos que las dos tablas coinciden en las columnas finales.

f) BICONDICIONAL

La **bicondicional** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la bicondicionante ($\leftrightarrow$). Esta proposición resultante se denota por $p \leftrightarrow q$ y se lee **p si y sólo si q**.

EJEMPLO 12

Si p: El triángulo es equilátero
y q: El triángulo es equiángulo,
entonces la proposición "El triángulo es equilátero si y sólo si es equiángulo", se expresa: $p \leftrightarrow q$.

OBSERVACION 8

La característica fundamental de la bicondicional es que su valor de verdad es verdadero sólo en los casos en que p y q tengan valores de verdad iguales (o ambos V o ambos F). En los demás casos la bicondicional es falsa. La tabla de verdad de una bicondicional es la siguiente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Otra forma de leer $p \leftrightarrow q$ es diciendo que p es equivalente a q o que p es una condición necesaria y suficiente para q, y q es una condición necesaria y suficiente para p.

EJEMPLO 13

Si p: $15 - 8 < 4$, es falsa
y q: 3 es un número primo, es verdadera,
determine el valor de verdad de la proposición "$5 - 8 < 4$ si y sólo si 3 es un número primo".

Solución. La proposición "$5 - 8 < 4$ si y sólo si 3 es un número primo" se puede expresar como $p \leftrightarrow q$. Puesto que p es F y q es V, la tercera fila en la tabla de verdad de la bicondicional muestra que $p \leftrightarrow q$ es falsa (F).

OBSERVACION 9

Las proposiciones compuestas pueden combinarse o conectarse a otras para formar proposiciones aún más complejas. Es claro que el valor de verdad de una proposición, por compleja que sea, depende de los valores de verdad de las proposiciones que las componen en sus formas más simples.

Para hacer la tabla de verdad de una proposición le asignamos una columna a cada proposición que interviene, sea ésta simple o compuesta, normalmente comenzando con las más simples y progresando en el orden de complejidad de las proposiciones componentes. El número de filas de la tabla viene dado por la potencia 2^n, donde n es el número de proposiciones en la forma más simple que entran a formar la proposición dada. Para asignar los valores de verdad a dichas proposiciones se procede de la forma siguiente: la primera columna se llena asignando valores V a la mitad de las filas y valores F a la segunda mitad. La segunda columna se llena asignando valores V a un cuarto de las filas, valores F al segundo cuarto, valores V al tercer cuarto y valores F al último cuarto. La tercera columna se llena asignando valores V a un octavo de las filas, valores F al segundo octavo, valores V al tercer octavo, etc. Así, se continúa hasta que terminen las columnas de las proposiciones más simples. Las columnas de las otras proposiciones se llenan a partir de las columnas de las proposiciones más simples que éstas.

EJEMPLO 14

Determine la tabla de verdad de la proposición $(p \wedge q) \wedge r$.

Solución. Tomemos las proposiciones $p, q, r, (p \wedge q)$ y $(p \wedge q) \wedge r$ interviniendo en este caso; así que la tabla tendrá cinco columnas, una para cada proposición, incluyendo la proposición dada.

Por otro lado, tenemos tres proposiciones en sus formas más simples: p, q, r, así que el número de filas de la tabla es $2^3 = 8$. Procedemos a llenar la tabla:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

EJEMPLO 15

Si sabemos que la proposición p es verdadera, la proposición q falsa y la proposición r verdadera, ¿cuál será el valor de verdad de la proposición $(p \wedge q) \wedge r$?

Solución. La solución a este problema es bastante fácil de obtener, ya que podemos leer en la tercera fila y en la última columna para determinar que cuando p es V, q es F y r es V, la proposición $(p \wedge q) \wedge r$ es F.

EJEMPLO 16

Determine la tabla de verdad para la proposición $\sim p \vee q$.

Solución. Las proposiciones representadas son $p, q, \sim p, \sim p \vee q$. Así, la tabla tendrá cuatro columnas. Las proposiciones en sus formas más simples, representadas en la proposición dada son dos: p y q; por tanto, el número de filas de la tabla es $2^2 = 4$ filas. La tabla es la siguiente:

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

EJERCICIO 0.2

En los problemas 1 al 5, escriba cada una de las proposiciones dadas en forma simbólica.

1. "Luis es estudiante y Juan es zapatero".
2. "El domingo es un día feriado o José ha sido expulsado".
3. "Si $2 + 2 = 4$, entonces $3 + 3 = 8$".
4. "O $3 + 4 = 7$ o la Tierra es plana".
5. "Antonio es hijo de Luis si y sólo si Luis es el padre de Antonio".

En los problemas 6 al 10, escriba la recíproca y la contrapositiva de cada una de las proposiciones dadas:

6. $p \to (q \wedge r)$
7. "Si $2 + 2 = 5$, entonces $2 + 4 = 8$".
8. "Si la Tierra es plana, entonces Julio César fue el primer presidente de Estados Unidos".
9. "Si los cuadrados tienen tres lados, entonces los triángulos tienen cuatro lados".

10. "Si un hexágono tiene seis lados, entonces la Luna está hecha de queso".

En los problemas 11 al 20, suponga que p: 7 < 9, *q*: El Sol es un astro frío y *r*: La temperatura está por debajo de cero; escriba las proposiciones dadas.

11. $p \vee q$
12. $p \wedge q$
13. $\sim p \rightarrow q$
14. $p \rightarrow \sim q$
15. $(r \wedge p) \rightarrow q$
16. $[(p \vee q) \wedge (q \wedge r)] \rightarrow r$
17. $(p \wedge q) \leftrightarrow r$
18. $\sim(p \vee r) \veebar q$
19. $(p \wedge q) \wedge (q \wedge r)$
20. $\sim q \leftrightarrow r$

En los problemas 21 al 24, construya la tabla de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

21. $\sim(p \wedge q)$
22. $\sim p \vee \sim q$
23. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)]$
24. $[(p \vee q) \wedge r] \rightarrow (p \wedge \sim q)$
25. Escriba en forma simbólica el enunciado: "Un número p es real y no racional siempre que p sea un irracional", y construya su tabla de verdad.

En los problemas 26 al 30, considere la proposición:

$$[(\sim p \wedge q) \vee (p \vee r)] \rightarrow [(p \vee \sim q) \vee (p \vee \sim r)]$$

y diga cuál es el valor de verdad de esta proposición para cada uno de los casos dados.

26. p es falso, q es falso, r es falso.
27. p es falso, q es falso, r es verdadero.
28. p es verdadero, q es falso, r es verdadero.
29. p es verdadero, q es verdadero, r es falso.
30. p es verdadero, q es verdadero, r es verdadero.

En los problemas 31 al 35, considere las proposiciones *p*: un byte tiene 7 bits, *q*: una palabra consiste en 2 bytes, *r*: un bit es un 0 o un 1. Sabiendo que *p* es falso y *q* y *r* son verdaderos, escriba enunciados para las proposiciones dadas en cada caso, y determine si el enunciado es verdadero o falso.

31. $p \wedge q$
32. $p \vee r$
33. $\sim(p \wedge q)$
34. $\sim p \vee \sim q$
35. $[(p \wedge q) \vee r] \wedge [(p \vee r)]$

En los problemas 36 al 40, considere:

***p*: Panamá está en América Central.**

***q*: Colombia está al sur de Venezuela.**

***r*: Quito es la capital de Ecuador.**

Observe que *p* y *r* son verdaderas, pero *q* es falsa. Escriba las proposiciones dadas en forma simbólica, y determine en cada caso si la proposición es verdadera o falsa.

36. "Panamá está en América Central y Colombia está al sur de Venezuela".
37. "Colombia no está al sur de Venezuela".
38. "Colombia está al sur de Venezuela y Quito es la capital de Ecuador, o Panamá no está en América Central".
39. "Quito no es la capital de Ecuador ni Panamá está en América Central".
40. "Si Panamá está en América Central y Colombia no está al sur de Venezuela, entonces ni Panamá está en América Central ni Quito es la capital de Ecuador".

0.3 Proposiciones lógicamente equivalentes

Considere las tablas de verdad de las proposiciones:

a) $q \vee (r \wedge s)$

q	r	s	$r \wedge s$	$q \vee (r \wedge s)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

b) $(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \wedge q)$	$(\sim p \wedge \sim q)$	$(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	F

c) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

p	q	$(p \wedge q)$	$(q \wedge p)$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

DEFINICION 7

Una **tautología** es una proposición cuyo valor de verdad es verdadero (V), independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen. La tabla c) muestra que $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ es una tautología.

DEFINICION 8

Una **contradicción** es una proposición cuyo valor de verdad es falso (F), independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen. La tabla b) muestra que $(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$ es una contradicción.

DEFINICION 9

Una **contingencia** es una proposición que toma valores de verdad verdaderos en unos casos y falsos en otros, dependiendo de los valores de verdad de las proposiciones que la componen. La tabla a) muestra que $q \vee (r \wedge s)$ es una contingencia.

DEFINICION 10

Dos proposiciones son lógicamente equivalentes si al conectarlas mediante la bicondicionante se obtiene una proposición que es una tautología. Para denotar que dos proposiciones $P(p, q, ...)$ y $Q(p, q, ...)$ son lógicamente equivalentes escribimos: $P(p, q, ...) \equiv Q(p, q, ...)$ o $P \Leftrightarrow Q$.

La tabla c) nos muestra que las proposiciones $p \wedge q$ y $q \wedge p$ son lógicamente equivalentes, ya que $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ es una tautología. Podemos escribir $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$.

A continuación listamos algunas tautologías e implicaciones lógicas (este concepto se define en la próxima sección) de interés en las aplicaciones (la contradicción se denota por C).

1.		$\sim\sim p \Leftrightarrow p$	doble negación
2.	**a.**	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$	
	b.	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$	
	c.	$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$	leyes conmutativas
3.	**a.**	$[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$	
	b.	$[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$	leyes asociativas
4.	**a.**	$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$	
	b.	$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	leyes distributivas
5.	**a.**	$(p \vee p) \Leftrightarrow p$	
	b.	$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$	leyes de la impotencia
6.	**a.**	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$	
	b.	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$	
	c.	$(p \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$	leyes de De Morgan
	d.	$(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$	
7.	**a.**	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$	
	b.	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$	implicación
8.	**a.**	$(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$	
	b.	$(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim(p \rightarrow \sim q)$	
9.	**a.**	$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$	
	b.	$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$	
10.		$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$	equivalencia
11.		$[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$	ley de exportación
12.		$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \rightarrow c]$	reducción al absurdo
13.		$p \Rightarrow (p \vee q)$	adición
14.		$(p \wedge q) \Rightarrow p$	simplificación
15.		$[p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$	modus ponens
16.		$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$	modus tollens
17.		$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$	silogismo disyuntivo
18.		$p \Rightarrow [q \rightarrow (p \wedge q)]$	
19.		$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$	transitividad de $\leftrightarrow$
20.		$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$	transitividad de $\rightarrow$ o silogismo hipotético
21.	**a.**	$(p \rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee r)]$	
	b.	$(p \rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)]$	
	c.	$(p \rightarrow q) \Rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	
22.	**a.**	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$	
	b.	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)]$	dilemas constructivos
23.	**a.**	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(\sim q \vee \sim s) \rightarrow (\sim p \vee \sim r)]$	
	b.	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(\sim q \wedge \sim s) \rightarrow (\sim p \wedge \sim r)]$	dilemas destructivos

EJERCICIO 0.3

En los problemas del 1 al 9, clasifique cada una de las proposiciones dadas como una contingencia o como una tautología o como una contradicción.

1. $p \vee \sim(p \wedge q)$ c
2. $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
3. $(p \wedge q) \vee (p \vee q)$
4. $[p \wedge (q \vee r)] \wedge [q \wedge (p \vee r)]$
5. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
6. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
7. $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8. $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
9. $[(p \leftrightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \rightarrow (q \wedge p)$

En los problemas del 10 al 14, diga si el par de proposiciones dadas en cada caso es un par de proposiciones lógicamente equivalentes:

10. $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)], [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$
11. $p \rightarrow q, \sim(p \wedge \sim q) \rightarrow r$
12. $p \wedge q, \sim(\sim p \vee \sim q)$
13. $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r), p \rightarrow (q \vee r)$
14. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s), (\sim q \vee \sim s) \rightarrow (\sim p \vee \sim r)$

0.4 Argumentos

Un **argumento** es una relación entre un conjunto de proposiciones $p_1, p_2, ..., p_n$ llamadas **premisas** y otra proposición q llamada la **conclusión**; denotamos un argumento por:

$$p_1, p_2, ..., p_n \therefore q \ (\therefore \text{ se lee } \textit{por tanto})$$

Se dice que un argumento es válido si las premisas dan como consecuencia la conclusión; más formalmente:

> Un argumento $p_1, p_2, ..., p_n \therefore q$ es válido si q es verdadero cada vez que las premisas $p_1, p_2, ..., p_n$ sean verdaderas.

> Un argumento que no es válido se llama falacia.

EJEMPLO 1

El argumento $p, p \rightarrow q \therefore q$ es válido. Este argumento se llama modus ponendo ponens, o más corto, modus ponens. La demostración de esta regla se obtiene directamente de la tabla:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observe que en la primera fila de la tabla q es verdadero cuando p y $p \to q$ lo son; el argumento es válido.

EJEMPLO 2

El argumento $p \to q, q \therefore p$ es una falacia, ya que en la tercera línea de la tabla anterior se tiene que p es falso cuando $p \to q$ y q son verdaderos.

Observemos que las proposiciones $p_1, p_2, ..., p_n$ son verdaderas simultáneamente si y sólo si la proposición $p_1 \wedge p_2 \wedge ..., \wedge p_n$ es verdadera. De esta manera el argumento $p_1, p_2, ..., p_n \therefore q$ es válido si y sólo si q es verdadera siempre que $p_1 \wedge p_2 \wedge ..., \wedge p_n$ sea verdadera o de forma equivalente, si y sólo si la proposición

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge ..., \wedge p_n) \to q$$

es una tautología.

EJEMPLO 3

Un principio fundamental del razonamiento lógico dice:

"Si p implica q y q implica r, entonces p implica r". En otras palabras, el argumento $p \to q, q \to r \therefore p \to r$ (ley del silogismo) es válido.

Para comprobar lo anterior sólo tenemos que mostrar por medio de una tabla de verdad que la proposición $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ es una tautología.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Observe que en los casos donde $p \to q$ y $q \to r$ son verdaderas, entonces $p \to r$ es verdadera; el argumento es válido.

Debe notarse que la validez del argumento no depende de los valores de verdad o del contenido de los enunciados que aparecen en el argumento, sino solamente de la estructura formal del argumento.

EJEMPLO 4

Considere el argumento

(a) $p \to q$: Si un hombre es soltero, es infeliz

(b) $q \to r$: Si un hombre es infeliz, muere joven

(c) $\therefore p \to r$: Los solteros mueren jóvenes

Éste es un argumento de la forma

$$p \to q, q \to r \therefore p \to r \text{ (silogismo)}$$

el cual ya sabemos que es válido. Note que en este ejemplo, p: Él es soltero q: Él es infeliz y r: Él muere joven.

Decimos que una proposición $P(p, q, ...)$ implica lógicamente una proposición $Q(p, q, ...)$, denotada por:

$$P(p, q, ...) \Rightarrow Q(p, q, ...),$$

si $Q(p, q, ...)$ es verdadera cada vez que $P(p, q, ...)$ sea verdadera.

EJEMPLO 5

La proposición p implica lógicamente la proposición $p \vee q$. Para ver esto consideremos la tabla:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Note que $p \vee q$ es verdadera cada vez que p es verdadera.

Ahora sabemos que si $Q(p, q, ...)$ es verdadera cada vez que $P(p, q, ...)$ sea verdadera, entonces el argumento

$$P(p, q, ...) \therefore Q(p, q, ...)$$

es válido y, recíprocamente, el argumento $P(p,q,...) \therefore Q(p,q,...)$ es válido si y sólo si el enunciado $P(p, q, ...) \rightarrow Q(p, q, ...)$ es siempre verdadero, es decir, si es una tautología. Estas ideas se pueden resumir de la manera siguiente:

Para proposiciones cualesquiera $P(p, q, ...)$ y $Q(p, q, ...)$ los tres enunciados siguientes son equivalentes:

a) $P(p, q, ...)$ implica lógicamente a $Q(p, q, ...)$.

b) El argumento $P(p, q, ...) \therefore Q(p, q, ...)$ es válido.

c) La proposición $P(p, q, ...) \rightarrow Q(p, q, ...)$ es una tautología.

Note que si $P(p, q, ...) \rightarrow Q(p, q, ...)$ y $Q(p, q, ...) \rightarrow P(p, q, ...)$, entonces $P(p, q, ...)$ y $Q(p, q, ...)$ deben tener la misma tabla de verdad y por tanto $P(p, q, ...) \equiv Q(p, q, ...)$.

Es importante notar que prácticamente todos los teoremas matemáticos están compuestos de condicionales del tipo

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \rightarrow q$$

A los $p_1, p_2, ..., p_n$ se les llama **hipótesis** y a q se le llama **conclusión.** Demostrar un teorema significa probar que el condicional es verdadero. Observe que no se pretende demostrar que q (la conclusión) es verdadero, sino que q será verdadero siempre que los $p_1, p_2, ..., p_n$ sean verdaderos. De aquí que las demostraciones matemáticas comienzan frecuentemente con el enunciado "suponga que $p_1, p_2, ..., p_n$ son verdaderos" y concluye con el enunciado "por tanto, q es verdadero".

Cuando una condicional $(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \rightarrow q$ es una tautología, entonces es siempre verdadera, independientemente de los valores de verdad de los enunciados que componen q o de los p_i. En este caso el argumento

$$p_1, p_2, ..., p_n \therefore q$$

o

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

es universalmente válido, sin importar qué enunciados reales se sustituyan por las variables en q y en los p_i. La validez depende de la forma de los enunciados y no de sus valores de verdad. Por ello estos argumentos universalmente válidos están representados por métodos generales de razonamiento correcto, llamados *reglas de inferencia*. Los pasos de la demostración matemática de un teorema deberán seguirse de la aplicación de reglas de inferencia y una demostración matemática debe iniciarse con la hipótesis, seguir a través de varios pasos, cada uno justificado por alguna regla de inferencia, y llegar a la conclusión. Ya vimos que el argumento $p \to q, q \to r \therefore p \to r$ es universalmente válido y por lo tanto es una regla de inferencia.

Damos a continuación algunas reglas de inferencia de gran utilidad:

1. P

$\therefore P \vee Q$ adición

2. $\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$ simplificación

3. P

$\dfrac{P \to Q}{\therefore Q}$ modus ponens

4. $P \to Q$

$\dfrac{\sim Q}{\therefore \sim P}$ modus tollens

5. $P \vee Q$

$\sim P$

$\therefore Q$ silogismo disyuntivo

6. $P \to Q$

$Q \to R$

$\therefore P \to R$ silogismo hipotético

7. P

$\dfrac{Q}{\therefore P \wedge Q}$ conjunción

EJERCICIO 0.4

En los problemas 1 al 10, muestre en cada caso si el argumento dado es válido:

1. $p \leftrightarrow q, q \therefore p$
2. $\sim p \rightarrow q, p \therefore \sim q$
3. $\sim p \rightarrow q, q \therefore p$
4. $p \rightarrow q, r \rightarrow \sim q \therefore r \rightarrow \sim p$
5. $p \rightarrow \sim q, \sim r \rightarrow \sim q \therefore p \rightarrow \sim r$
6. Si estudio, no reprobaré la matemática. Si no juego basquetbol, entonces estudio. Pero reprobaré la matemática. Por tanto, jugué basquetbol.
7. Si 6 es par, entonces 2 no divide a 7. O 5 no es primo, o 2 divide a 7. Pero 5 es primo. Por tanto, 6 es impar.
8. Las rosas son rojas.
   Las rosas son azules.
   Por tanto, las rosas son rojas si y sólo si son azules.
9. Si trabajo, no puedo estudiar.
   O trabajo, o paso la matemática.
   Pasé la matemática.
   Por tanto, estudié.
10. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \therefore p \leftrightarrow q$

En los problemas 11 al 18, efectúe la demostración requerida.

11. Demuestre que $p \leftrightarrow q$ implica lógicamente a $p \rightarrow q$.
12. Demuestre que $p \leftrightarrow \sim q$ no implica lógicamente a $p \rightarrow q$.
13. Demuestre que $p \wedge q$ implica lógicamente a p.
14. Demuestre que $\sim p$ implica lógicamente a $p \rightarrow q$.
15. Demuestre que $p \vee q$ no implica lógicamente a p.
16. Dado $p, p \rightarrow q$, y $q \rightarrow r$, pruebe r.
17. Dado $p \wedge \sim q, p \rightarrow r$, y $r \rightarrow (s \vee q)$, pruebe s.
18. Dados $p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r$, pruebe $p \leftrightarrow r$.

0.5 Cuantificadores

A diferencia de las proposiciones que hemos manejado hasta ahora, el enunciado $x \geq 3$ no es verdadero ni falso. Cuando la variable x se remplaza por ciertos valores, por ejemplo 7, la proposición resultante es verdadera, mientras que para otros valores de x, por ejemplo 2, la proposición que resulta es falsa. Éste es un ejemplo de un enunciado abierto, el cual viene a ser una proposición sólo cuando las variables son remplazadas por los nombres particulares de los objetos. Si un enunciado abierto se llama P y las variables $x_1, x_2, \ldots x_n$; escribimos $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$, y en el caso de una sola variable, escribimos $P(x)$.

El enunciado "x_1 es igual a $x_1 + x_3$", es un enunciado abierto con tres variables. Si denotamos el enunciado por $P(x_1, x_2, x_3)$, entonces $P(7, 3, 4)$ es verdadero, ya que $7 = 3 + 4$, pero $P(1, 2, 3)$ es falso.

DEFINICION 11

La colección de objetos que al emplearlos en lugar de las variables en un enunciado abierto lo convierten en una proposición verdadera se llama el **conjunto de verdad** del enunciado.

Antes de determinar el conjunto de verdad es necesario saber cuáles objetos están disponibles para ser tomados en cuenta. Es decir, debemos haber especificado un universo de discurso. Denotamos por A el conjunto universo.

EJEMPLO 1

Sea $Q(x)$ el enunciado "$x^2 = 4$". Si tomamos el conjunto de los números reales como el universo de discurso, el conjunto de verdad de $Q(x)$ es $\{2, -2\}$. Si el universo fuera el conjunto de números naturales, entonces el conjunto de verdad sería $\{2\}$.

Recordemos que un enunciado abierto $P(x)$ no es una proposición, pero $P(a)$ es una proposición para cualquier a en el universo de discurso. Otra forma de construir una proposición a partir de $P(x)$ es modificándola mediante un cuantificador.

> Dado un enunciado abierto $P(x)$ con variable x, el enunciado $\forall x, P(x)$ se lee "para todo x, $P(x)$" y es verdadero precisamente cuando el conjunto de verdad para $P(x)$ es el universo completo. El símbolo $\forall$ se llama el **cuantificador universal**.

> El enunciado $\exists x, P(x)$ se lee "existe x tal que $P(x)$" y es verdadero precisamente cuando el conjunto de verdad para $P(x)$ no es vacío. El símbolo $\exists$ se llama el **cuantificador existencial**.

EJEMPLO 2

Suponga que el universo es el conjunto de los números reales, entonces

(a) $\exists x, x \geq 3$, es verdadero, pero $\forall x, x \geq 3$ es falso

(b) $\exists x, |x| > 0$, es verdadero, pero $\forall x, |x| > 0$ es falso

(c) $\exists x, x^2 = -1$ es falso, pero $\forall x, x + 2 > x$ es verdadero.

EJEMPLO 3

Halle una negación de "cada número real positivo tiene un inverso multiplicativo".

Solución. Sea el universo el conjunto de todos los números reales, el enunciado puede representarse por

$$\forall x, x > 0 \Rightarrow \exists y, xy = 1.$$

La negación es $\sim(\forall x, x > 0 \Rightarrow \exists y, xy = 1)$.

Esto puede escribirse de las siguientes maneras:

(a) $\exists x, \sim(x > 0) \Rightarrow \exists y, xy = 1)$

(b) $\exists x, (x > 0 \wedge \sim(\exists y), xy = 1)$

(c) $\exists x, (x > 0 \wedge \forall y, xy \neq 1)$

Esta última se lee: "Existe un número positivo x para el cual no hay inverso multiplicativo".

> Dado un enunciado abierto $P(x)$, la proposición $\exists! x, P(x)$ se lee "existe un único x tal que $P(x)$". El enunciado $\exists! x, P(x)$ es verdadero cuando el conjunto de verdad consta exactamente de un elemento del universo.

EJEMPLO 4

En el universo de números naturales, la proposición $\exists! x$, x es un número par positivo y primo; es verdadero, ya que el único elemento del conjunto de verdad es el 2.

EJEMPLO 5

El enunciado $\exists! x, x^2 = 4$ es verdadero si el conjunto universo es el de los números naturales, pero es falso cuando el universo es el conjunto de los números enteros, pues este universo tiene dos números, el 2 y el -2, que cumplen con la condición $x^2 = 4$.

OBSERVACION 1

Las dos equivalencias siguientes son de gran utilidad en las aplicaciones:

a) $\sim \forall x, P(x)$ es equivalente a $\exists x, \sim P(x)$
b) $\sim \exists x, P(x)$ es equivalente a $\forall x, \sim P(x)$.

OBSERVACION 2

El lector ha podido apreciar que un enunciado abierto o predicado se convierte en una proposición cuando intervienen tantos cuantificadores como variables posee dicho enunciado abierto.

EJERCICIO 0.5

En los problemas 1 al 10, considere los enunciados abiertos o predicados dados.
$P(x, y)$: x es más rápido que y
$Q(x, y)$: y es más alto que x
$R(x)$: x pesa más de 200 libras
Escriba las siguientes expresiones:

1. $P(x, \text{José})$
2. $Q(\text{Miguel, Luis}) \wedge R(\text{Juan})$
3. $P(x, y) \rightarrow Q(x, y)$
4. $Q(x, y) \rightarrow R(x)$
5. $P(\text{Miguel, José}) \vee [Q(\text{Miguel, José}) \wedge R(\text{José})]$
6. $\forall x, \forall y\, Q(x, y) \rightarrow P(x, y)$
7. $\forall x, P(x, \text{José}) \leftrightarrow R(x)$
8. $\exists x, R(x) \wedge \forall y\, P(x, y)$
9. $\exists y, \forall x, P(x, y) \rightarrow R(x)$
10. $\forall y, R(\text{Miguel}) \veebar Q(\text{Miguel}, y)$

En los problemas 11 al 15, escriba los predicados siguientes en forma simbólica:

11. "No todas las piedras preciosas son bonitas".
12. "Existe un número positivo que es el menor".
13. "Nadie ama a todo el mundo".
14. "Existe un único presidente de Colombia".
15. "Existe un número que es más grande que cualquier solución conocida para el problema o no hay solución".
16. En forma simbólica, escriba la negación de los predicados dados en el ejercicio anterior.

En los problemas 17 al 21, determine el valor de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

17. $\forall m, \exists n, 2n = m$ (A = enteros positivos).
18. $\forall x, \exists y, xy = 1$ (A = números reales).
19. $\exists x, \exists y, xy = 1$ (A = números reales).
20. $\exists x, \forall y, (x + y)^2 = x^2 + y^2$ (A = números reales).
21. $\exists ! x, \forall y, x + y = y$ (A = números reales).

0.6 Conjuntos y elementos

La primera formulación de la teoría de conjuntos aparece con los trabajos de George Cantor (1845-1918), quien obtuvo el desarrollo de la parte principal de la teoría como un subproducto de sus investigaciones sobre series trigonométricas. La teoría de conjuntos trajo claridad y precisión en la exposición de muchas teorías y áreas de la matemática, como la teoría de las probabilidades, la topología, la teoría de los grupos, etc.

Supongamos que el proceso mental que une objetos bajo una característica particular nos da un conocimiento intuitivo adecuado de lo que entendemos por un conjunto. Los objetos reunidos de esta manera se llaman **elementos** y decimos que éstos pertenecen al **conjunto**.

En general representamos los elementos con letras minúsculas $a, b, c, ..., x, y, z$ y los conjuntos con letras mayúsculas $A, B, ...$ Cuando queremos señalar que un elemento a pertenece al conjunto A, lo denotamos por:

$$a \in A \text{ (} a \text{ pertenece a } A\text{)}$$

El símbolo $\in$ representa la relación fundamental de la teoría de conjuntos, la relación de pertenencia. Ésta es la relación entre un elemento y un conjunto. Para expresar que el elemento a no pertenece al conjunto A, lo denotamos por:

$$a \notin A \text{ (} a \text{ no pertenece a } A\text{)}$$

DEFINICION 12

Un conjunto es una colección bien definida de objetos, llamados sus elementos. Denotaremos los conjuntos con letras mayúsculas $A, B, ...$ Los objetos que componen el conjunto se llaman sus elementos o miembros y los denotaremos por letras minúsculas $a, b, ...$

EJEMPLO 1

Si la característica particular que observamos en una colectividad es la de estar en el mismo curso de matemática, entonces esa colectividad constituye un conjunto y cada uno de los compañeros de clase de matemática es un elemento del conjunto.

Existen dos formas para escribir los conjuntos, la primera de ellas sigue el principio de **extensión**, por el cual podemos determinar el conjunto listando todos sus elementos. La segunda forma sigue el principio de **comprensión** o **abstracción**, por el cual es posible determinar un conjunto identificando sus elementos mediante una propiedad común a ellos.

Para escribir un conjunto por extensión, listamos todos sus elementos separados por comas y, finalmente, encerrados entre llaves {...}.

Para escribir un conjunto por comprensión elegimos un elemento arbitrario x y señalamos que cumple la propiedad $P(x)$. Finalmente, encerramos toda la expresión entre llaves:

$$A = \{x: P(x)\}$$

que se lee "A es el conjunto de todos los elementos x tales que cumplen la propiedad $P(x)$" (: se lee *tal que*).

EJEMPLO 2

El conjunto de los primeros cinco números enteros positivos se puede escribir por extensión:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

pero también se puede escribir por comprensión:

$$A = \{x: x \text{ es uno de los primeros cinco enteros positivos}\}$$

OBSERVACION 1

Escribimos un conjunto **por extensión** cuando éste tiene un número reducido de elementos, y lo escribimos **por comprensión** cuando el conjunto tiene un número grande de elementos.

EJEMPLO 3

Escriba por extensión el conjunto

$$A = \{x: x \text{ es una vocal del español}\}$$

Solución. $A = \{a, e, i, o, u\}$

EJEMPLO 4

Escriba por comprensión el conjunto

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

Solución. $A = \{x: x \text{ es un número entero positivo par menor que } 12\}$.

> Decimos que dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos. Para denotar que A y B son iguales, escribimos:
>
> $$A = B$$

EJEMPLO 5

Los conjuntos

$A = \{x: x^2 = 4\}$

y

$B = \{x: x \text{ es un número par distinto de cero entre } -3 \text{ y } 3\}$, son iguales, ya que tienen los mismos elementos: $A = \{-2, 2\}$, $B = \{-2, 2\}$; $A = B$.

EJERCICIO 0.6

En los problemas 1 al 10, escriba los conjuntos dados por extensión, cuando sea posible.

1. $A = \{x: x \text{ es un número real y } x^2 = 0\}$ h o l
2. $B = \{x: x \text{ es una letra de la palabra agricultor}\}$
3. $C = \{x: x \text{ es un número entero comprendido entre } -1 \text{ y } 1\}$
4. $D = \{x: x \text{ es un entero positivo par menor que } 15\}$
5. $E = \{x: x \text{ es un entero positivo tal que } 4 + x = 3\}$
6. $F = \{x: x \text{ es un número positivo par}\}$
7. $G = \{x: x \text{ es un múltiplo entero de } 5\}$
8. $H = \{x: x$ es un país del continente americano cuyo nombre comienza con P$\}$.
9. $I = \{x: x \text{ es el rector de su universidad}\}$
10. $J = \{x: x \text{ es uno de sus profesores}\}$

En los problemas 11 al 20, escriba por comprensión los conjuntos dados.

11. $A = \{a, e, i, o, u\}$
12. $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...\}$
13. $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...\}$
14. $D = \{a, b, c, d, e, ..., x, y, z\}$
15. $E = \{4, 9, 16, ...\}$
16. $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
17. $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
18. $H = \{-2, 2\}$
19. $I = \{\text{Santo Domingo}\}$
20. $J = \{\ \}$

0.7 Cardinalidad y tipos de conjuntos

Hay conjuntos que tienen un número finito de elementos; éstos se llaman **conjuntos finitos**. Un conjunto que no tiene un número finito de elementos se llama un **conjunto infinito**.

EJEMPLO 1

El conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ es un conjunto finito, pues tiene un número finito de elementos, seis.

EJEMPLO 2

El conjunto $A = \{x: x$ es un número entero positivo$\}$, es un conjunto infinito, ya que dado cualquier número entero positivo podemos obtener el próximo añadiendo la unidad. Este proceso puede repetirse un número arbitrariamente grande de veces; el proceso nunca termina, por tanto el número de elementos no es finito.

El concepto de número de elementos de un conjunto finito, es de mucha importancia en las aplicaciones de la teoría de conjuntos. El número de elementos de un conjunto finito es lo que se llama la **cardinalidad** de dicho conjunto. La **cardinalidad** de un conjunto finito A se denota por: Card (A) o $|A|$. Muchos autores usan la expresión $\#A$ para denotar dicha cardinalidad.

Dos conjuntos finitos X y Y se dicen ser **equipotentes** si tienen exactamente el mismo número de elementos.

La cardinalidad de un conjunto finito A es el número entero que representa el número de elementos del conjunto A. Para cualquier conjunto finito A, denotamos su cardinalidad por Card (A) o $|A|$.

EJEMPLO 3

La cardinalidad del conjunto $A = \{\text{h, i, j, k, l, n}\}$ es 6, ya que A tiene seis elementos; Card $(A) = 6$.

EJEMPLO 4

La cardinalidad del conjunto $B = \{x: x$ es un número primo y par$\}$, es 1, ya que hay un solo número primo que es par, el 2; Card $(B) = 1$.

EJEMPLO 5

La cardinalidad del conjunto $C = \{\text{a, b, a, a, b}\}$ es 2, ya que C sólo tiene dos elementos distintos; Card $(C) = 2$.

OBSERVACION 1

Los conjuntos $A = \{a, a, b\}$, $B = \{a, b\}$ y $C = \{b, a\}$, son iguales. Note que cambiar el orden de los elementos del conjunto no hace que el conjunto cambie; así mismo, cuando algún elemento aparece repetido se cuenta una sola vez.

Por razones técnicas de las aplicaciones se hace necesario considerar el conjunto que carece de elementos. Este conjunto se llama el conjunto **vacío**; se denota por { } o $\varnothing$.

EJEMPLO 6

El conjunto A dado por $A = \{x : x$ es un profesor de matemática con más de trescientos años de edad$\}$; es evidente que este conjunto carece de elementos. Por tanto, A es el conjunto vacío.

$$A = \{\} \text{ o } A = \varnothing$$

DEFINICION 13

El conjunto **vacío** es aquel que carece de elementos. El conjunto vacío se denota por { } o $\varnothing$.

OBSERVACION 2

El lector puede notar que si $\varnothing = \{x : P(x)\}$, la propiedad $P(x)$ es tal que ningún objeto la satisface.

DEFINICION 14

Un conjunto A es un conjunto **unitario** si tiene un solo elemento.

EJEMPLO 7

El conjunto A dado por $A = \{x : x$ es una capital de Perú$\}$, es evidentemente un conjunto unitario, ya que hay una sola capital en Perú. Por tanto, A es un conjunto unitario.

OBSERVACION 3

Note que si $A = \{x : P(x)\}$ es un conjunto unitario, entonces la propiedad $P(x)$ que define el conjunto es satisfecha por un solo objeto.

En cualquier aplicación de la teoría de conjuntos, los elementos de todos los conjuntos pertenecen usualmente a un gran conjunto fijo llamado **conjunto universal**. Éste se denota por U.

EJEMPLO 8

Si trabajamos con conjuntos de comunidades humanas, entonces en Colombia un buen conjunto universal es el conjunto de los colombianos que viven en el país.

Si cada elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un subconjunto de B. Se dice también que A está contenido en B o que B contiene a A. La relación de subconjunto viene dada por:

$$A \subset B \text{ o } B \supset A$$

OBSERVACION 4

Si $A = B$, entonces $A \subset B$ y $B \subset A$ son verdaderos.

Si A es un subconjunto de B, pero A y B no son iguales, entonces decimos que A es un subconjunto propio de B.

Si A no es un subconjunto de B, es decir, si al menos un elemento de A no pertenece a B, escribimos $A \not\subset B$.

EJEMPLO 9

Considere los conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7,\}$ y $C = \{1, 5\}$.

Observe que todos los elementos del conjunto C están en el conjunto A, por tanto $C \subset A$. Así mismo, podemos observar que $C \subset B$. Sin embargo, no todos los elementos de B están en A, por lo que podemos decir que $B \not\subset A$. Así mismo, $A \not\subset B$, $A \not\subset C$ y $B \not\subset C$.

OBSERVACION 5

En los conjuntos dados del ejemplo anterior podemos ver que $C \subset B$, pero $B \not\subset C$. Sin embargo tenemos que:

$$B \not\subset A \text{ y } A \not\subset B$$

es decir, B no es un subconjunto de A ni A es subconjunto de B. En este caso decimos que los conjuntos A y B son **no comparables**.

OBSERVACION 6

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, si $A \subset B$, entonces es posible que $A = B$. Si $A \subset B$, pero $A \neq B$, entonces se dice que A es un subconjunto propio de B.

Nota de advertencia: en muchos casos se usa $A \subseteq B$ para indicar simplemente que A es un subconjunto de B y $A \subset B$ para denotar que A es un subconjunto propio de B.

Si $A \subset B$, diremos simplemente que A es un subconjunto de B y que B es un superconjunto para A. Si nos interesa señalar que A es un subconjunto propio de B, lo expresaremos de manera categórica.

Para conjuntos A y B cualesquiera se tiene:

a) $\varnothing \subset A \subset U$
b) $A \subset A$
c) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$
d) $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

OBSERVACION 7

El literal d) del cuadro anterior nos indica que para comprobar que $A = B$ necesitamos comprobar dos cosas: primero, que $A \subset B$ y segundo que $B \subset A$.

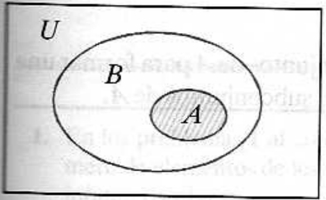
Si A y B no tienen elementos en común, entonces decimos que A y B son **disjuntos**.

Para conjuntos A y B no vacíos se tiene que:

a) $A = B$ significa que $\forall x, x \in A \leftrightarrow x \in B$
b) $A \subset B$ significa que $\forall x, x \in A \rightarrow x \in B$
c) A y B disjuntos significa que $\forall x, \sim(x \in A \wedge x \in B)$

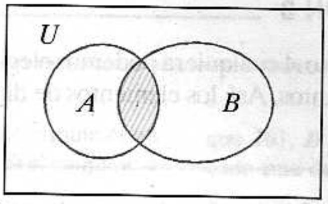
Nota de advertencia: puesto que $\forall x, x \in A \rightarrow x \in A$, se tiene que $A \subset A$. Todo conjunto A es subconjunto de sí mismo.

Una representación gráfica de los conjuntos y de las relaciones entre ellos viene dada por los llamados diagramas de Venn (véanse figuras 1, 2 y 3). Estos diagramas son figuras planas cerradas; normalmente, el conjunto universal se representa por el interior de un rectángulo y los otros conjuntos se representan por discos incluidos en el rectángulo.



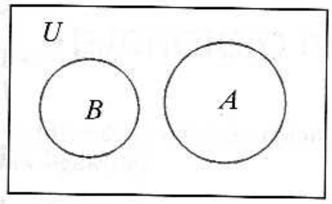
$A \subset B$

FIGURA 1



A y B tienen unos elementos en común, otros no.

FIGURA 2



A y B son disjuntos.

FIGURA 3

FAMILIA DE CONJUNTOS Y CONJUNTO POTENCIA

Considere el conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$. El objeto 3 es un elemento del conjunto A, pero 3 no se visualiza como un conjunto; sin embargo $\{3\}$ no es un elemento de A, pero es un subconjunto de A. En símbolos podemos decir que:

$$3 \in A \text{ y que } \{3\} \subset A$$

Ahora, suponga que deseamos formar un conjunto cuyos elementos sean a su vez conjuntos; estaríamos en presencia de una colección de conjuntos o **familia de conjuntos**. Así, si A_1, A_2, A_3, son conjuntos dados, el conjunto que los tiene como sus elementos es la familia de conjuntos

$$F = \{A_1, A_2, A_3\}.$$

Aquí $A_1 \in F$, pero $\{A_1\} \subset F$

A_1 es un elemento de F, pero $\{A_1\}$ es el subconjunto de F que consta de un elemento, A_1.

EJEMPLO 10

El conjunto $A = \{1, 2, 4, 8\}$ no es una familia de conjuntos, ya que sus elementos no son conjuntos.

El conjunto $F = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{8\}\}$ es una familia de conjuntos porque sus elementos son a su vez conjuntos.

Así mismo, el conjunto $F = \{\{1\}, \{2, 4\}\}$ es una familia de conjuntos porque sus elementos son a su vez conjuntos.

Cuando tenemos que utilizar una sucesión de conjuntos, los distinguimos mediante subíndices de la manera siguiente:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

Los subíndices son elementos de un conjunto fijado de antemano; para el desarrollo de estas ideas usaremos el conjunto de los números enteros positivos N como conjunto de índices. Por ejemplo, el conjunto de A_3 es el conjunto que ocupa el tercer lugar en la sucesión, así mismo para el resto de elementos de la sucesión. Estos conjuntos de la sucesión determinan una familia de conjuntos dada por:

$$F = \{A_i : i \in I \subset N\} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$$

donde i toma los valores 1, 2, 3, ... hasta un número natural n si la familia es finita.

EJEMPLO 11

Si $A_1 = \{1, 3, 5\}, A_2 = \{3, 7\}, A_3 = \{1, 5, 9\}, A_4 = \{3, 9\}$,
entonces podemos formar varias familias de conjuntos, una de las cuales es:

$$F = \{A_1, A_2, A_4\}.$$

o

$$F = \{\{1, 3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 9\}\}.$$

OBSERVACION 8

Dado un conjunto A cualquiera podemos elegir algunos subconjuntos de A para formar una familia de conjuntos. Así, los elementos de dicha familia serán subconjuntos de A.

EJEMPLO 12

Dado $A = \{3, 8, 9\}$, tomemos algunos subconjuntos de A; digamos $A_1 = \{3\}, A_2 = \{9\}, A_3 = \{3, 9\}, A_4 = \{8, 9\}$.

El conjunto

$$F = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

o

$$F = \{\{3\}, \{9\}, \{3, 9\}, \{8, 9\}\}$$

es una familia de subconjuntos del conjunto A dado.

Dado un conjunto A cualquiera, la familia de conjuntos cuyos elementos son todos los posibles subconjuntos de A, se llama el **conjunto potencia** de A. El conjunto potencia de A se denota por $\wp(A)$.

La cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto finito A es 2^n, donde n es la cardinalidad de A (número de elementos de A).

Para obtener todos los subconjuntos de un conjunto dado A, procedemos de la siguiente manera:

a) $\varnothing$ y A son subconjuntos de A.
b) Formamos todos los subconjuntos de A con un elemento.
c) Formamos todos los subconjuntos de A con dos elementos.
.
.
.
Así sucesivamente hasta tener 2^n subconjuntos de A incluyendo a $\varnothing$ y a A.

EJEMPLO 13

Determine el conjunto potencia de $A = \{a, b, c\}$

Solución. El número de elementos de $\wp(A) = 2^3 = 8$.

Ahora,

$$\wp(A) = \{\varnothing, \{a, b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}s$$

OBSERVACION 9

En el ejemplo anterior podemos notar que por ejemplo, $\{a, b\} \in \wp(A)$, pero $\{a, b\} \subset A$. Así mismo, podemos decir que $\{\{a, b\}\} \subset \wp(A)$.

Note que los elementos de una familia de conjuntos son conjuntos. Pero los subconjuntos de una familia de conjuntos son familias de conjuntos.

EJEMPLO 14

Determine el conjunto potencia del conjunto $A = \{0, 1\}$.

Solución. El número de elementos de $\wp(A)$ es $2^2 = 4$.

$$\wp(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

Observe que $\{1\} \in \wp(A)$, pero $\{\{1\}\} \subset \wp(A)$.

EJERCICIO 0.7

1. En los problemas 1 al 20 del ejercicio 0.7, determine el número de elementos de los conjuntos finitos. Si el conjunto es infinito escriba ∞.
2. Liste los conjuntos unitarios del ejercicio 1.
3. Liste los conjuntos vacíos del ejercicio 1.

En los problemas 4 al 8, realice lo que se indica.

4. Un conjunto cuya cardinalidad sea 3.
5. Un conjunto cuya cardinalidad sea 1.
6. Un conjunto cuya cardinalidad sea 0.
7. Un conjunto cuya cardinalidad sea 10.
8. Un conjunto infinito.

En los problemas 9 al 11, considere U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}; A = {1, 4, 9}, B = {x: x ∈ U y x es un cuadrado}, C = {1, 2, 3, 5, 7, 9}, D = {2, 3, 5, 7} y determine lo que se pide.

9. Cuáles conjuntos son subconjuntos de los otros.
10. Cuáles conjuntos son subconjuntos propios de otros.
11. Los pares de conjuntos que son disjuntos.

En los problemas 12 y 13 compruebe:

12. Que si $A \subset B$, pero A y B son disjuntos, entonces $A = \varnothing$.
13. Que si $A \subset B$ y $C = \{x | x \in A$ y $x \in B\}$, entonces $C = A$.

En los problemas 14 al 23, complete en cada caso el espacio en blanco con el símbolo apropiado ($\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$) para que la proposición sea verdadera.

14. 2 ______________ $\{x | x$ es un número primo$\}$.
15. 2 ______________ $\{1, \{2\}, 2\}$.
16. $\{\{2\}\}$ ______________ $\{1, \{2\}, 2\}$.
17. $\{2, 3\}$ ______________ $\{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$.
18. $\{\{1, 2\}\}$ ______________ $\{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$.
19. $\{p\}$ ______________ $\{p, q, r, \{q\}, \{p, q\}, \{p\}\}$.
20. $\{1\}$ ______________ $\{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$.
21. $\{q\}$ ______________ $\{p, q, r, \{q\}, \{p, q\}, \{\{p\}\}\}$.
22. $\{1, 2\}$ ______________ $\{1, 2, 3\}$.
23. $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ ______ $\{1, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, 5\}$.

En los problemas 24 al 35, suponga $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{x$: x es un entero positivo par menor que $10\}$, $D = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$, y dé el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes:

24. $A \subset B$
25. $A \subset C$
26. $B \subset A$
27. $B \subset C$
28. $C \subset A$
29. $C \subset B$
30. $A = B$
31. $A = C$
32. $B = C$
33. B y C comparables
34. A y B comparables
35. A y B comparables

En los problemas 36 al 45, dé el valor de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

36. $\varnothing \in A, \forall A$
37. $\varnothing \subset A, \forall A$
38. $A \subset U, \forall A$
39. $A \in U, \forall A$
40. $U \not\subset A, \forall A$
41. $U \in A, \forall A$
42. $\varnothing = \{\varnothing\}$
43. $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
44. $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$
45. $\varnothing \in U$

En los problemas 46 al 50, determine el conjunto potencia de los conjuntos dados

46. $\varnothing$
47. $\{\varnothing\}$
48. $\{1, 2, 3\}$
49. $\{a, b, c, d, e\}$
50. $\{0, 1\}$

En los problemas 51 al 55, señale cuáles de las familias dadas son conjunto potencia de algún conjunto y determine dicho conjunto.

51. $\{\varnothing, \{a\}\}$
52. $\{\{1\}, \{0\}, \{0, 1\}\}$
53. $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$
54. $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
55. $\{\varnothing, \{-1\}, \{1\}, \{0\}, \{-1, 0, 1\}\}$

En los problemas 56 al 65, suponga $A = \{1, 3, 5\}$ y dé el valor de verdad de las proposiciones dadas.

56. $\varnothing \subset \wp(A)$
57. $\varnothing \in \wp(A)$
58. $\{1, 3\} \subset \wp(A)$
59. $\{1, 2\} \in \wp(A)$
60. $\{3, 5\} \subset A$
61. $\{3, 5\} \subset \wp(A)$
62. $3 \in A$
63. $2 \in A$
64. $\{1\} \subset \wp(A)$
65. $\{5\} \in \wp(A)$

0.8 Operaciones con conjuntos

Uno de los hechos más interesantes acerca de la teoría de conjuntos es que las operaciones básicas de esta teoría se corresponden de forma muy estrecha con las estructuras lógicas que obtenemos al utilizar conectivos.

INTERSECCION DE CONJUNTOS

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos comunes a los dos conjuntos. La intersección de A y B se denota por $A \cap B$, y en lenguaje lógico el conjunto puede escribirse como:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

La operación de intersección de conjuntos comparte muchas propiedades con el conectivo $\wedge$.

Las siguientes propiedades se cumplen para la intersección de dos conjuntos A y B. U representa el conjunto universal.

a) $A \cap B = B \cap A$, propiedad conmutativa.

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$, propiedad asociativa.

c) $A \cap U = A$, propiedad de la existencia de la identidad.

d) $\varnothing \cap A = \varnothing$, propiedad de la existencia de un elemento absorbente.

EJEMPLO 1

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$ determine el conjunto intersección de A y B.

Solución. Los elementos que están o pertenecen tanto a A como a B son: 2, 3, 5. Por tanto

$$A \cap B = \{2, 3, 5\}$$

OBSERVACION 1

En los diagramas de Venn, la intersección de A y B se representa por la región sombreada en la figura 4.

La situación correspondiente al ejemplo anterior es la siguiente:

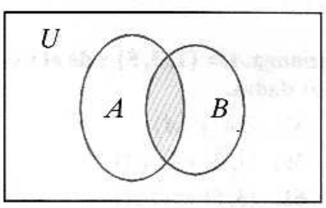


FIGURA 4

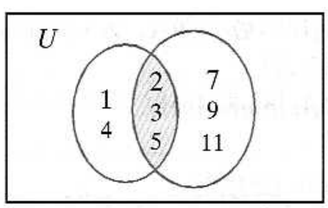
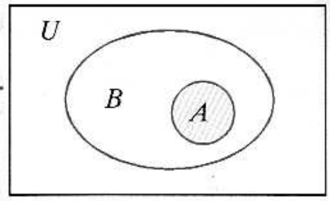


FIGURA 5

Observe que la parte sombreada contiene precisamente los elementos que pertenecen a $A \cap B$.

OBSERVACION 2

Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$, como puede notarse en la figura 6.



$A \cap B = A$

FIGURA 6

OBSERVACION 3

Muchas veces es necesario calcular la intersección de tres conjuntos A, B, C. Sin embargo, es bueno que se enfatice que la operación de intersección siempre se lleva a cabo entre dos conjuntos; para realizar la intersección de tres conjuntos, es decir, determinar el conjunto formado por los elementos comunes de A, B y C, primero buscamos la intersección de A y B; el resultado buscado es la intersección de $A \cap B$ con C. Si $D = A \cap B$, entonces,

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = D \cap C.$$

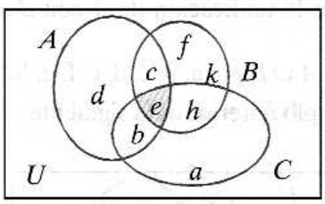
EJEMPLO 2

Dados los conjuntos $A = \{\text{b, c, d, e}\}$, $B = \{\text{c, e, h, f, k}\}$ y $C = \{\text{a, b, e, h}\}$, determine $A \cap B \cap C$.

Solución. Primero buscamos $A \cap B$:
$D = A \cap B = \{\text{c, e}\}$.
Luego calculamos $A \cap B \cap C = D \cap C = \{\text{e}\}$
Por tanto, $A \cap B \cap C = \{\text{e}\}$.

Gráficamente la solución es:

FIGURA 7



$A \cap B \cap C$

OBSERVACION 4

Así mismo, si $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ es una sucesión de conjuntos, podemos calcular la intersección de ellos (el conjunto de los elementos comunes a todos los conjuntos) tomándolos dos a dos en la expresión:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n$$

o más breve $\bigcap_{i=1}^{n} A_1$

EJEMPLO 3

Dada la sucesión de conjuntos:

$$A_1 = \{1, 3\}, A_2 = \{3, 5, 7, 9\}, A_3 = \{1, 3, 5, 11, 13\},$$

determine $\bigcap_{i=1}^{n} A_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Solución. Si ponemos $D_{12} = A_1 \cap A_2$, entonces

$\bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = D_{12} \cap A_3$

Ahora, $D_{12} = A_1 \cap A_2 = \{3\}$. Por tanto,

$\bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = D_{12} \cap A_3 = \{3\} \cap \{1, 3, 5, 11, 13\} = \{3\}$.

UNION DE CONJUNTOS

La unión de dos conjuntos A y B consta de todos los elementos que pertenecen a A o a B. La unión de A y B se denota por $A \cup B$. En lenguaje lógico podemos escribir:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Note que si extraemos un elemento de $A \cup B$, éste puede estar sólo en A, o sólo en B, o ser un elemento común a A y a B.

La representación gráfica de $A \cup B$ se expresa por una de las situaciones siguientes:

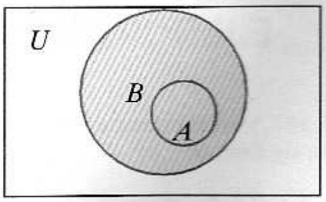


FIGURA 8

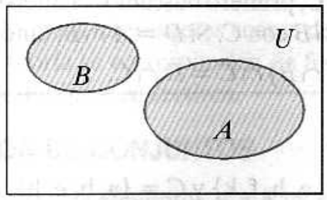


FIGURA 9

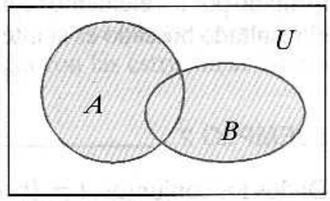


FIGURA 10

La región sombreada en cada caso corresponde al conjunto $A \cup B$.

EJEMPLO 4

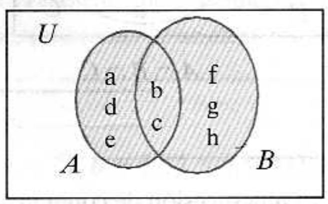
Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{b, c, f, g, h\}$, determine el conjunto $A \cup B$.

Solución. Puesto que en $A \cup B$ deben estar representados tanto los elementos de A como los de B, tenemos que $A \cup B$ es la unificación de A con B, es decir, ponemos juntos los elementos de A con los de B:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

La situación gráfica del ejemplo anterior es la siguiente:

FIGURA 11



Las siguientes propiedades se cumplen para la unión de dos conjuntos A y B. U representa el conjunto universal.

a) $A \cup B = B \cup A$, propiedad conmutativa.

b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, propiedad asociativa.

c) $A \cup \varnothing = A$, propiedad de la existencia de la identidad.

d) $A \cup U = U$, propiedad de la existencia del conjunto absorbente.

OBSERVACION 5

En muchas circunstancias necesitamos obtener la unión de más de dos conjuntos; pero la unión es una operación entre dos conjuntos, de ahí que necesitamos apoyarnos en la propiedad asociativa para poder obtener un conjunto $A \cup B \cup C$, cuando A, B y C son conjuntos dados.

Para calcular $A \cup B \cup C$, primero calculamos $A \cup B$ y unimos este resultado con el conjunto C. Si

$$D = A \cup B,$$

entonces $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = D \cup C$.

EJEMPLO 5

Dados los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ y $C = \{2, 6, 8\}$, determine $A \cup B \cup C$.

Solución. Primero calculamos $D = A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$ y luego calculamos $D \cup C$ para obtener $A \cup B \cup C$.

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = D \cup C = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$$

La situación gráfica es la siguiente:

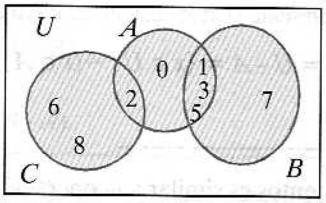


FIGURA 12

OBSERVACION 6

Si $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ es una sucesión de conjuntos, entonces la unión de ellos se define por:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n \text{ o } \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

donde las uniones de conjuntos se realizan dos a dos.

EJEMPLO 6

Dados $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A_2 = \{1, 3, 5, 7\}$, $A_3 = \{2, 4, 6, 8\}$,

determine $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$.

Solución. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$, se obtiene calculando primero el conjunto $D_{12} = A_1 \cup A_2$, y luego el resultado se une con A_3:

$$D_{12} = A_1 \cup A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Ahora,

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 = D_{12} \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

La situación gráfica es la siguiente:

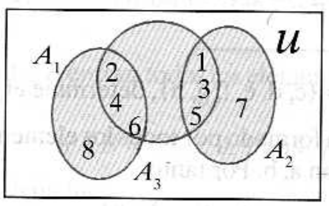


FIGURA 13

Las siguientes propiedades se cumplen para las operaciones de unión e intersección de conjuntos:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

propiedad distributiva de la unión respecto a la intersección.

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

propiedad distributiva de la intersección respecto a la unión.

DIFERENCIA DE CONJUNTOS

La **diferencia** entre dos conjuntos A y B o el complemento relativo de B con respecto a A, es el conjunto que consiste en todos los elementos que pertenecen a A, pero no pertenecen a B. La diferencia entre A y B se denota por $A - B$. En lenguaje de la lógica $A - B$ se representa como:

$$A - B = \{x: x \in A \wedge \sim(x \in B)\} = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}.$$

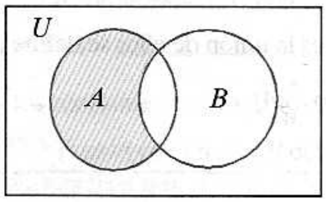
El complemento de un conjunto A, que se denota por A' o por A^c, es el conjunto $U - A$, que puede describirse como:

$$A' = U - A = \{x \in U : \sim(x \in A)\}.$$

OBSERVACION 7

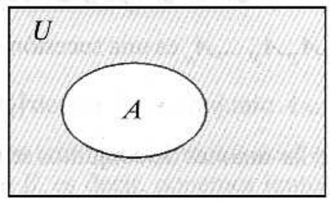
La operación de tomar complementos es similar a la operación de negación en lógica.

Las situaciones gráficas de la diferencia de conjuntos y la de tomar complementos son las siguientes:



$A - B$

FIGURA 14



$A' = U - A$

FIGURA 15

Los siguientes hechos son verdaderos respecto a conjuntos y sus complementos:

a) $A \cap A' = \varnothing, \forall A$
b) $A \cup A' = U, \forall A$

Las siguientes propiedades, llamadas leyes de De Morgan, se cumplen para conjuntos A y B que son subconjuntos del conjunto universal U:

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

EJEMPLO 7

Dados $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $B = \{c, d, e, f, g, h\}$, determine el conjunto $A - B$.

Solución. El conjunto $A - B$ está formado por todos los elementos de A que no lo son de B, así que los elementos de $A - B$ son a, b. Por tanto:

$$A - B = \{a, b\}.$$

EJEMPLO 8

Dados el conjunto universal $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y el conjunto $A = \{3, 8, 9\}$, determine A'.

Solución. El complemento de A es el conjunto formado por todos aquellos elementos de U que no son elementos de A:

$$A' = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$$

DIFERENCIA SIMETRICA DE CONJUNTOS

La **diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de la unión de A y B, eliminando los elementos de la intersección de A y B. La diferencia simétrica de A y B se denota por $A \Delta B$. Usando el lenguaje lógico podemos expresar $A \Delta B$ como

$$A \Delta B = \{x : x \in A \veebar B\}$$

Note que de acuerdo con la descripción dada para la diferencia simétrica, podemos escribir:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

o

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

La representación gráfica de la situación que describe $A \Delta B$ es la siguiente:

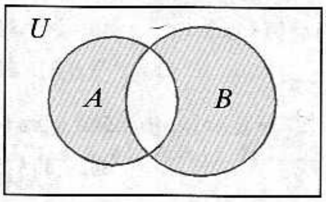


FIGURA 16

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

OBSERVACION 8

a) Si A y B son disjuntos, entonces $A \Delta B = A \cup B$.
b) Si $A \subset B$, entonces $A \Delta B = B - A$.
c) Si $A \supset B$, entonces $A \Delta B = A - B$.
d) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$, ley asociativa para la diferencia simétrica.
e) $A \Delta B = B \Delta A$, ley conmutativa para la diferencia simétrica.
f) Si $A \Delta B = A \Delta C$, entonces $B = C$, ley cancelativa para la diferencia simétrica.
g) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$, ley distributiva de la intersección con respecto a la diferenciación simétrica.

EJEMPLO 9

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, determine $A \Delta B$.

Solución. Sabemos que en $A \Delta B$ entran todos los elementos de A y B que no son comunes a A y a B; por tanto,

$$A \Delta B = \{1, 2, 9, 15, 17, 19\}$$

La solución gráfica es la siguiente:

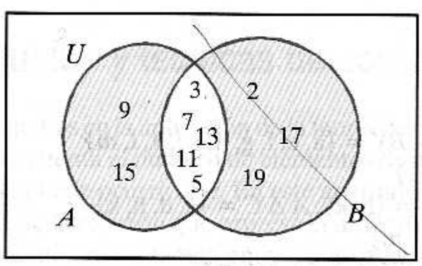


FIGURA 17

$A \Delta B$

OBSERVACION 9

Las operaciones con conjuntos cumplen las leyes del álgebra de conjuntos, éstas son las siguientes:

Leyes idempotentes

1a. $A \cup A = A$ **1b.** $A \cap A = A$

Leyes asociativas

2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ **2b.** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Leyes conmutativas

3a. $A \cup B = B \cup A$ **3b.** $A \cap B = B \cap A$

Leyes distributivas

4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **4b.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leyes de identidad y absorción

5a. $A \cup \varnothing = A$ **5b.** $A \cap U = A$

6a. $A \cup U = U$ **6b.** $A \cap \varnothing = \varnothing$

Ley involutiva

7. $(A^c)^c = A$

Leyes del complementario

8a. $A \cup A^c = U$ **8b.** $A \cap A^c = \varnothing$

9a. $U^c = \varnothing$ **9b.** $\varnothing^c = U$

Leyes de De Morgan

10a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ **10b.** $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

OBSERVACION 10

En muchas ocasiones aparecen situaciones en las que entran varias operaciones simultáneamente. Para trabajar o calcular estas expresiones hay que ser cuidadosos al aplicar las operaciones fundamentales con conjuntos, así como las leyes de estas operaciones.

EJEMPLO 10

Dados los conjuntos: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, e, f, g\}$, $C = \{a, b, h, k\}$, determine los conjuntos siguientes, donde $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$:

a) $(A - B)' \cap C$

b) $(A \Delta C) \cup A'$

Solución.

a) $A - B = \{b, c, d\}$, $(A - B)' = \{a, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$

$(A - B)' \cap C = \{a, h, k\}$

b) $A - C = \{c, d\}$, $C - A = \{h, k\}$, $A \Delta C = \{c, d, h, k\}$

$A' = \{e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$

$(A \Delta C) \cup A' = \{c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$.

EJERCICIO 0.8

En los problemas 1 al 20, suponga $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f, g\}$, $C = \{e, f, g, h, i\}$, $D = \{a, c, e, g, i\}$, $E = \{b, d, f, h\}$, $F = \{a, e, i\}$, y determine lo que se indica.

1. $A \cup B$ **2.** $A \cap B$
3. $C \cap D$ **4.** $E \cup F$
5. $A \cap C$ **6.** $A \cap C$
7. $C \cup D$ **8.** $E \cap F$
9. A' **10.** B'
11. $B - A$ **12.** $E' \cap F'$
13. $A - B$ **14.** $(E \cup F)'$
15. $A \cap (B \cup C)$ **16.** $(A \cap B) \cup (A \cup C)$
17. $(A \cap D) - B$ **18.** $(A - E)'$
19. $(C \Delta A) - E$ **20.** $(B \Delta F)' \cup A$

En los problemas 21 al 30, suponga los conjuntos $K = \{2, 4, 6, 8\}$, $L = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{3, 4, 5, 6, 8\}$, $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$, y determine lo que se indica.

21. K' **22.** $(K \cup L)'$
23. $(M' \cap K)$ **24.** $K \Delta M'$
25. $(K - L)' \Delta M$ **26.** $(M' - K') - L$
27. $U' - \varnothing'$ **28.** $U \Delta L$
29. $(U')' \Delta \varnothing$ **30.** $(K \Delta L) - M$

En los problemas 31 al 40, suponga que los conjuntos *A*, *B*, *C* son cualesquiera, *U* el conjunto universo y $\varnothing$ el conjunto vacío, y simplifique las expresiones dadas.

31. $(A \cap U) \cup \varnothing$ **32.** $(A - U) \cap (B - \varnothing)$
33. $(\varnothing \cup A) \cap (B \cup A)$ **34.** $A \cap (A \cup B)$
35. $(B \cup U) \cap (A \cap U)$ **36.** $(A \cap A')'$
37. $U \cap U$ **38.** $A \Delta U$
39. $B \Delta \varnothing$ **40.** $(B \Delta U)'$

En los problemas 41 al 50, suponga dados los conjuntos *A*, *B*, *C* no vacíos; use diagramas de Venn para ilustrar los resultados obtenidos al efectuar las operaciones indicadas en las expresiones dadas.

41. $A \cup B$ **42.** $A \cap B$
43. $A - B$ **44.** $A \Delta B$
45. $(A' \cap B') \cap C'$ **46.** $B' \cup A'$
47. $A' \cap B$ **48.** $(A \cup B)' \cap (A \cup C)'$
49. $(A' \Delta B') \cap C'$ **50.** $A \cap B'$

En los problemas 51 al 56, si sabemos que un conjunto *G* es subconjunto de un conjunto *A* no vacío, determine la veracidad de los enunciados dados.

51. $A \cap G = G$ **52.** $G \cup A = A$
53. $(G - A) \supset A$ **54.** $(G - A) \supseteq G$
55. $G \Delta A = A \cup G$ **56.** $(A - G) \cap A = (A - G)$

En los problemas 57 al 62, considere los conjuntos $A_1 = \{2, 3, 5\}$, $A_2 = \{1, 4\}$, $A_3 = \{1, 2, 3\}$, $A_4 = \{1, 3, 5, 7\}$, $A_5 = \{3, 5, 8\}$, $A_6 = \{1, 7\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, y determine lo que se indica.

57. $\bigcup_{i=1}^{6} A_i$ **58.** $\bigcup_{i=3}^{5} A_i'$
59. $\bigcap_{i=4}^{6} A_i$ **60.** $\bigcap_{i=2}^{4}(A_i - A_{i+1})$
61. $\bigcap_{i=2}^{4} A_i' \Delta \bigcup_{i=2}^{4} A_i$ **62.** $\wp\left(\bigcap_{i=2}^{3} A_i\right)$

En los problemas 63 al 67, considere conjuntos *A* y *B* cualesquiera y realice las demostraciones propuestas.

63. Demuestre que $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
64. Demuestre que $(A \cup B) \cap B' = A$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.
65. Demuestre que si A y B son subconjuntos de U, entonces $A \cap B' = A$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.
66. Demuestre que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
67. Demuestre que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

0.9 Conjuntos y técnicas de conteo

Una de las ideas más importantes en la aplicación de la teoría de conjuntos está relacionada con el proceso de contar. Se cuenta el número de elementos de un conjunto, el número de maneras en que un proceso puede ocurrir, etc. En este apartado consideramos la solución de estos problemas a partir de la relación que expresa el número de elementos en la unión de conjuntos. En el tratamiento del problema entran dos situaciones, primero cuando los conjuntos que intervienen son disjuntos y segundo cuando no lo son.

CASO DE PARES DE CONJUNTOS DISJUNTOS

Parece razonable esperar que la cardinalidad de $A \cup B$, $|A \cup B|$ sea igual a $|A| + |B|$, ya que la unión de A y B se obtiene juntando los elementos de A con los elementos de B. Éste es el caso cuando A y B son conjuntos disjuntos, ya que cuando contemos los elementos sabemos que cada uno viene de A o de B, pero no de los dos al mismo tiempo. Esto nos conduce al siguiente principio de conteo:

> Si A y B son disjuntos, entonces
> $$|A \cup B| = |A| + |B|$$

EJEMPLO 1

Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$; determine $|A \cup B|$.

Solución. Por ser A y B disjuntos, al contar los elementos de $A \cup B$, cada elemento se cuenta una sola vez, por tanto,

$$|A \cup B| = |A| + |B| = 2 + 3 = 5.$$

Es claro que puesto que $A \cup B = \{1, 2, a, b, c\}$, se tiene que $|A \cup B| = 5$.

CASO DE PARES DE CONJUNTOS NO DISJUNTOS

Si A y B no son disjuntos, entonces el problema de determinar el número de elementos de $A \cup B$ es menos sencillo. Si contamos los elementos de A y los elementos de B, y sumamos los números que resultan de estas cuentas tratando de obtener el número de elementos de $A \cup B$, encontramos que algunos de los elementos han sido contados dos veces. Los elementos de la intersección de A y B se contaron dos veces, una vez cuando contamos los de A y una segunda vez cuando contamos los de B; de ahí que para que cada elemento de $A \cup B$ sea contado una sola vez debemos restar el número de elementos de $A \cap B$ a la suma del número de elementos de A y de B.

> Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces
> $$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Note que la última relación también se cumple cuando A y B son disjuntos, es decir, $A \cap B = \varnothing$, ya que $|\varnothing| = 0$.

EJEMPLO 2

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$; entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ y } A \cap B = \{3\}.$$

En este caso $|A| = 3$, $|B| = 3$, $|A \cap B| = 1$

por tanto $|A \cup B|$, como se puede comprobar contando los elementos de $A \cup B$.

EJEMPLO 3

Suponga que A y B son tales que $A = 5, B = 8$, y $|A \cup B| = 11$. Determine $|A \cap B|$.

Solución. Si llamamos x al número $|A \cap B|$, entonces por la fórmula sabemos que:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - x,$$

es decir, $11 = 5 + 8 - x$ y de aquí se tiene

$$x = 13 - 11 = 2;$$

por tanto $|A \cap B| = 2$.

EJEMPLO 4

De un total de 35 programadores entrevistados para un trabajo, 25 conocían Fortran, 28 conocían Pascal y dos no conocían ninguno de estos dos lenguajes; ¿cuantos conocían ambos lenguajes?

Solución. Puesto que dos de ellos no conocían lenguaje alguno, se tiene que los que conocían por lo menos un lenguaje eran:

$$35 - 2 = 33.$$

Ahora, si A = el conjunto de los que conocían Fortran, B = el conjunto de los que conocían Pascal, entonces $A \cup B$ = el conjunto de los que conocían por lo menos uno de estos lenguajes, y $A \cap B$ = el conjunto de los que conocían ambos lenguajes.

Puesto que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

se tiene que

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$

pero $|A| = 25$, $|B| = 28$, $|A \cup B| = 33$;
por tanto:

$$|A \cap B| = 25 + 28 - 33 = 20$$

20 personas conocían ambos lenguajes.

OBSERVACION 1

Si en el problema anterior quisiéramos saber el número de personas que conocen sólo Fortran, tendríamos que restarle al número de los que conocen Fortran el número de los que conocen Fortran y Pascal, es decir,

$$|A| - |A \cap B| = 25 - 20 = 5$$

Así mismo, para conocer el número de personas que conocían sólo Pascal, tendríamos que restarle al número de los que conocían Pascal el número de los que conocían Fortran y Pascal, es decir,

$$|B| - |A \cap B| = 28 - 20 = 8.$$

Si U = el conjunto de todos los entrevistados (35), entonces el diagrama de la figura 18 muestra la distribución de los conjuntos involucrados en el problema.

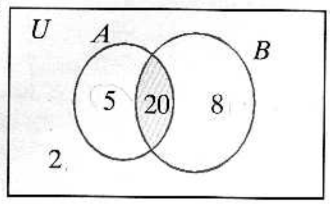


FIGURA 18

CASO DE LA UNION DE TRES CONJUNTOS

El trabajo de conteo para los casos en los que intervienen tres conjuntos es tan sencillo como el trabajo con dos conjuntos. Observe que:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$$

pero $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$

y $\quad |A \cap (B \cup C)| = |(A \cap B)| \cup |(A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|;$

por tanto:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

OBSERVACION 2

Note cómo se utilizan las leyes asociativa para la unión de conjuntos y distributiva de la intersección con respecto a la unión de conjuntos en la obtención de la última relación.

OBSERVACION 3

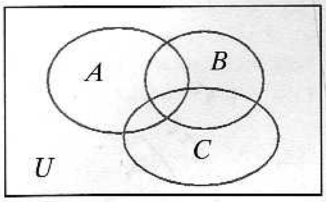


FIGURA 19

Del diagrama de la figura 19 podemos deducir varios hechos interesantes:

a) El número de elementos que están sólo en A:
$|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

b) El número de elementos que están sólo en B:
$|B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

c) El número de elementos que están sólo en C:
$|C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

d) El número de elementos que están en $A \cap B$, pero no en C:
$|A \cap B| - |A \cap B \cap C|$

e) El número de elementos que están en $A \cap C$, pero no en B:
$|A \cap C| - |A \cap B \cap C|$

f) El número de elementos que están en $B \cap C$, pero no en A:
$|B \cap C| - |A \cap B \cap C|$

g) El número de elementos que están en A o en B, pero no en C:
$|A \cup B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

h) El número de elementos que están en A o en C pero no en B:
$|A \cup C| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

i) El número de elementos que están en B o en C pero no en A:
$|B \cup C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

j) El número de elementos de $A \cup B \cup C$ puede ser distinto al número de elementos del universo U.

EJEMPLO 5

Una encuesta entre 100 estudiantes arrojó la siguiente estadística:

32 estudian matemática.
20 estudian física.
45 estudian biología.
15 estudian matemática y biología.
7 estudian matemática y física.
10 estudian física y biología.
30 no estudian ninguna de las tres asignaturas.

(a) Encuentre el número de estudiantes que estudian las tres asignaturas.
(b) Encuentre el número de estudiantes que cursan una y sólo una de las tres asignaturas.

Solución. Supongamos M = el conjunto de los que estudian matemática, F = el conjunto de los que estudian física y B = el conjunto de los que estudian biología. Entonces,

$$|M| = 32,\ |F| = 20,\ |B| = 45,\ |M \cap F| = 7,\ |M \cap B| = 15,\ |F \cap B| = 10.$$

(a) Es claro que los que intervinieron en la encuesta constituyen el universo U, de aquí que $U = 100$. Así mismo, los que estudian alguna de las tres asignaturas están representados por $M \cup F \cup B$ y los que no estudian ninguna de las asignaturas son 30 personas; de ahí que:

$$|M \cup F \cup B| = 100 - 30 = 70$$

El número de estudiantes que toman las tres asignaturas constituyen el conjunto $|M \cap F \cap B|$; de ahí que como

$$|M \cup F \cup B| = |M| + |F| + |B| - |M \cap F| - |M \cap B| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B|,$$

se tiene,

$$\begin{aligned}|M \cap F \cap B| &= |M \cup F \cup B| - |M| - |F| - |B| + |M \cap F| + |M \cap B| + |F \cap B| \\ &= 70 - 32 - 20 - 45 + 7 + 15 + 10 = 5\end{aligned}$$

Así que los que estudian las tres asignaturas son cinco estudiantes.

(b) El número de los que estudian sólo matemática está dado por:

$$|M| - |M \cap F| - |M \cap B| + |M \cap F \cap B| = 32 - 7 - 15 + 5 = 15$$

Los que estudian sólo física son:

$$|F| - |M \cap F| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B| = 20 - 7 - 10 + 5 = 8$$

Los que estudian sólo biología son:

$$|B| - |M \cap B| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B| = 45 - 15 - 10 + 5 = 25$$

Así que los que estudian una y sólo una de las asignaturas son:

$$15 + 8 + 25 = 48.$$

EJEMPLO 6

En una encuesta sobre los medios de transporte urbano más comunes, a cada persona se le pregunta si el taxi, el autobús o el carro privado es el medio más usado para ir al trabajo. Se permite más de una respuesta. El resultado de la encuesta es el siguiente:

30 personas opinaron a favor del taxi.
35 personas opinaron a favor del autobús.
100 personas opinaron a favor del carro privado.
15 personas opinaron a favor del taxi y del autobús.
15 personas opinaron a favor del taxi y del carro privado.
20 personas opinaron a favor del autobús y del carro privado.
5 personas opinaron a favor de los tres medios de transporte.

¿Cuántas personas respondieron la encuesta?

Solución. Supongamos A = los que opinaron a favor del taxi, B = los que opinaron a favor del autobús y C = los que opinaron a favor del carro privado.

Entonces, si asumimos que todos los encuestados respondieron la encuesta, se tiene que $A \cup B \cup C$ es el conjunto de los que respondieron la encuesta y es a la vez el conjunto universo U. Así mismo, $|A \cap B| = 15$, $|A \cap C| = 15$, $|B \cap C| = 20$, $|A \cap B \cap C| = 5$. Ahora,

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 30 + 35 + 100 - 15 - 15 - 20 + 5 = 120\end{aligned}$$

Por tanto, 120 personas respondieron la encuesta.

EJERCICIO 0.9

En los problemas 1 al 6, suponga que $|B| = 12$, $|C| = 11$, $|D| = 8$, $|B \cup C| = 20$, $|B \cup D| = 20$ y $|D \cap C| = 3$ y determine lo que se indica.

1. $|B \cap C|$ **2.** $|B - D|$

3. $|D \cup C|$ **4.** $|B \cap D|$

5. $|B - C|$ **6.** $|B \Delta D|$

En los problemas 7 al 10, suponga que $|A| = 35$, $|B| = 23$, $|C| = 28$, $|A \cap B| = 15$, $|A \cap C| = 13$, $|B \cap C| = 11$, $|A \cup B \cup C| = 52$, y determine lo que se indica.

7. $|A \cap B \cap C|$ **8.** $|(A \cap C) - B|$

9. $|(A \cap B) - C|$ **10.** $|(A \cap C) - A|$

11. En una encuesta de 60 personas se encontró que 25 leen revistas políticas, 26 leen revistas científicas y 26 leen revistas de entretenimiento. Se determinó además, que nueve personas leen revistas políticas y de entretenimiento, once leen revistas políticas y científicas, ocho leen revistas científicas y de entretenimiento y ocho no leen revista alguna.

(a) Determine el número de personas que leen los tres tipos de revistas.

(b) Determine el número de personas que leen exactamente un tipo de revistas.

12. Una encuesta a 100 músicos populares mostró que 40 de ellos usaban guantes en la mano izquierda y 39 usaban guantes en la mano derecha. Si 60 de ellos no usaban guantes, ¿cuántos usaban guantes en la mano derecha solamente?, ¿cuántos usaban guantes en la mano izquierda solamente?, ¿cuántos usaban guantes en ambas manos?

13. En la clase de educación física se inscribieron 200 estudiantes; se les preguntó si querían trotar o nadar como únicas dos alternativas. Decidieron trotar 85 de ellos, 60 también aceptaron nadar. En total, ¿cuántos tomaron natación?, ¿cuántos tomaron natación pero no aceptaron trotar?

14. Un archivo de datos de tamaño igual a 96K debe ser copiado en un minidisco de capacidad 143K. Si 100K del disco está ocupado con otros archivos, ¿cuál es la mínima cantidad del disco que debe ser borrada para poder almacenar el nuevo archivo?

15. De 30 estudiantes en una clase de matemática, 26 aprobaron el primer examen parcial y 21 aprobaron el segundo examen parcial. Si dos estudiantes reprobaron ambos exámenes, ¿cuántos aprobaron ambos exámenes?

16. Un total de 60 clientes potenciales visitaron una tienda de artículos de computadores. De éstos, 52 compraron algún artículo; 20 compraron papel, 36 compraron disquetes y doce compraron cintas para impresoras. Si seis compraron papel y disquetes, nueve compraron disquetes y cintas y cinco compraron papel y cintas, ¿cuántos compraron los tres artículos?

17. Un total de 35 sastres fueron entrevistados para un trabajo; 25 sabían hacer trajes, 28 sabían hacer camisas, y dos no sabían hacer ninguna de las dos cosas, ¿cuántos sabían hacer trajes y camisas?

18. A principios de los años setenta se hizo una encuesta a 120 residentes de una ciudad latinoamericana sobre su interés en los tres equipos del área más cercana a la ciudad. De éstos, 40 seguían al equipo A, 28 seguían al equipo B y 31 al equipo C; 23 seguían al A y al B; 19 seguían al equipo B y al equipo C, 25 seguían al equipo A y al equipo C y 18 personas seguían a los tres equipos. ¿Cuántas de estas personas no seguían a equipo alguno?, ¿cuántos seguían al equipo A y al equipo C, pero no al equipo B?

19. De 1200 estudiantes de primer año en una universidad, 582 tomaron educación física, 627 tomaron español, 543 tomaron matemática, 217 tomaron educación física y español, 307 tomaron educación física y matemática, 250 tomaron matemática y español, 122 tomaron los tres cursos. ¿Cuántos no tomaron ninguno de los tres cursos?

20. En una encuesta aplicada a 260 estudiantes se obtuvieron los siguientes datos: 64 toman un curso de matemática, 94 toman un curso de computación, 58 toman un curso de administración, 28 toman cursos de matemática y administración, 26 toman cursos de matemática y computación, 22 toman cursos de administración y computación, y 14 toman los tres cursos.

a) ¿Cuántos de los estudiantes de la encuesta no toman ninguno de los tres cursos?

b) ¿Cuántos de los estudiantes de la encuesta toman sólo el curso de computación?

CONCEPTOS IMPORTANTES

Postulados o axiomas	Condicional	Operaciones con conjuntos
Teoremas	Bicondicional	Unión
Proposiciones	Tabla de verdad	Intersección
Simples	Cuantificadores	Complemento
Compuestas	Universal	Diferencia
Conectivos lógicos	Existencial	Diferencia simétrica
Negación	Enunciado abierto	Diagramas de Venn
Conjunción	Conjuntos y elementos. Cardinal	Técnicas de conteo
Disyunción inclusiva	Familias de conjuntos	
Disyunción exclusiva	Conjunto potencia	

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 y 2, establezca la proposición recíproca inversa y la contrapositiva de cada una de las proposiciones dadas:

1. "Si 2 + 2 = 4, entonces no soy el rey de Inglaterra".
2. "Si tengo tiempo y no estoy cansado, iré a la tienda".

En los problemas 3 y 4, considere que la proposición "estudiaré matemática" se representa por la letra *p*, la proposición "iré al cine" por la letra *q* y la proposición "estoy de buen humor" por la letra *r*, escriba en lenguaje simbólico los siguientes enunciados:

3. "Si no estoy de buen humor, entonces iré al cine".
4. "No iré al cine y estudiaré matemática".

En los problemas 5 al 8, clasifique las proposiciones siguientes como contingencias, contradicciones o tautologías.

5. $p \wedge p$
6. $q \vee (q \wedge p)$
7. $(p \wedge q) \veebar r \to q$
8. $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \vee \sim q)$

En los problemas 9 y 10, determine en cada caso si el par de proposiciones dadas son lógicamente equivalentes.

9. $p \vee (q \wedge r), (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
10. $p \vee (p \wedge q), p$

En los problemas 11 y 12, suponga que el universo de discurso está formado por todos los números enteros; diga cuál es el valor de verdad de cada una de las proposiciones dadas, escriba su negación en cada caso, así como su valor de verdad.

11. $\forall x, x$ dividido por 2 es un entero.
12. $\exists x, \exists y, xy = 1$

En los problemas 13 y 14, construya la tabla de verdad para cada una de las proposiciones dadas.

13. $[(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \wedge (\sim p \vee \sim r)$
14. $[(p \to q) \to r] \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \to r]$

En los problemas 15 y 16, diga si los pares de proposiciones dadas están formados por proposiciones lógicamente equivalentes.

15. $(p \vee r) \wedge (q \to r), (p \to q) \to r$
16. $\sim q, (p \vee q) \to p$

En los problemas 17 y 18, diga si el argumento dado en cada caso es válido o es una falacia.

17. Si llegué en auto al trabajo, entonces llegué cansado a él. Llegué cansado al trabajo.
    Por tanto, manejé camino al trabajo.
18. Si trabajo duro y tengo talento, entonces seré un músico.
    Si soy músico, entonces seré feliz.
    Por tanto, si no seré feliz, entonces no trabajé duro o no tuve talento.

En los problemas 19 al 21, considere la proposición $\forall x, \forall y, x < y \to \exists z, x < z < y$

19. Escriba su negación.
20. Determine su valor de verdad cuando el universo de discurso está formado por los números reales o los racionales.
21. Determine su valor de verdad cuando el universo de discurso está formado por los números enteros positivos o los números enteros.
22. Describa los métodos que ha usado para hacer demostraciones y dé algunos ejemplos.

En los problemas 23 y 24, construya la tabla de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

23. $(p \to q) \to [(p \vee q) \to (p \wedge q)]$
24. $[(p \to q) \vee (p \to r)] \to (q \wedge p)$

En los problemas 25 y 26, discuta (analice y opine) cada uno de los argumentos dados.

25. Si obtengo el puesto y trabajo duro, entonces me ascenderán. Si me ascienden seré feliz. No seré feliz. Por tanto, no obtendré el puesto o no trabajaré duro.
26. Un lógico dice a su hijo: "Si no terminas tu cena, te irás directo a dormir y no verás televisión". Terminó su cena y fue enviado directamente a la cama.

En los problemas 27 y 28, demuestre los teoremas dados por el método que considere apropiado.

27. Si $p \to (q \vee r), q \to s$ y $r \to t$, entonces $p \to (s \vee t)$
28. Si $p \to (q \wedge r), (q \vee s) \to t$ y $p \vee s$, entonces t.

En los problemas 29 al 31, escriba el significado de los enunciados dados si se considera un universo de discurso A_1 que consta de los miembros de un club y un universo A_2 de líneas aéreas. Sea $P(x, y)$ el predicado "x ha sido pasajero de y", escriba el significado de cada uno de los enunciados siguientes:

29. $\forall x, \forall y, P(x,y) \leftrightarrow \forall y, \forall x\, P(x,y)$
30. $\exists x, \exists y, P(x,y) \leftrightarrow \exists y, \exists x, P(x,y)$
31. $\exists x, \forall y, P(x,y) \to \forall y, \exists x, P(x,y)$

En los problemas 32 y 33, pruebe los enunciados dados por el modo de demostración que considere apropiado en cada caso.

32. "Si x es un número primo, entonces $x + 7$ es un número compuesto".
33. Para todo número irracional t, $t - 8$ es irracional.

En los problemas 34 al 36, complete.

34. Si $A \subset B$, entonces
    $A \cup B =$ $\qquad$ $A \cap B =$ $\qquad$ $A - B =$
35. Si A y B son disjuntos, entonces
    $A - B =$ $\qquad$ $A \cap B =$ $\qquad$ $B - A =$
36. Si $A = \varnothing$, entonces
    $A \cup B =$ $\qquad$ $A \cap B =$ $\qquad$ $A \Delta B =$

En los problemas 37 al 40, determine la cardinalidad de cada uno de los conjuntos dados.

37. $A = \{x : x = 5n + 2, n \in N\}$

38. $B = \{x + 3 : 2 < x < 12, x \in N\}$

39. $C = \{2n - 3 : n \in N\}$

40. $D = \{x - 1 : 6 < x < 10, x \in N\}$

En los problemas 41 al 46, dé el valor de verdad de las proposiciones dadas.

41. $3 \in \{3\}$ **42.** $5 = \{5\}$

43. $\{6\} \subset \{\{6\}\}$ **44.** $\{2, 3\} = \{3, 2\}$

45. $\varnothing \in \{2\}$ **46.** $\{2\} \subseteq \{2\}$

En los problemas 47 al 52, considere $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y efectúe las operaciones de conjuntos indicadas.

47. $(A' - B) \cap C$ **48.** $(B \Delta C)' \cup B$

49. $(B' \cup A') \Delta C$ **50.** $(C' \cap A) \cup B$

51. $\wp(A) \cap \wp(C)$ **52.** $(A \cup B) \cap C'$

En los problemas 53 y 54 demuestre que:

53. $A \Delta A = \varnothing, \forall A$

54. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C), \forall A, B, C$

En los problemas 55 al 58, considere $U = \{0, 1, 2, 3\}$, $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{0, 1\}$, $A_3 = \{0, 3\}$, $A_4 = \{1, 2, 3\}$, $A_5 = \{0, 2, 3\}$ y determine lo que se indica.

55. $\bigcup_{i=1}^{3} A_i \Delta \bigcap_{i=1}^{4} A_i$ **56.** $\bigcap_{i=1}^{5} A_i' \cup \left(\bigcup_{i=1}^{2} A_i\right)$

57. $\wp\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) - \wp\left(\bigcap_{i=1}^{3} A_i'\right)$ **58.** $\bigcap_{i=1}^{4} (A_i - A_{i+1})$

En los problemas 59 al 62, haga una representación en diagrama de Venn del resultado de las operaciones en cada caso.

59. $(A \cup B) - (A \cap B)$ **60.** $A - (B - C)$

61. $A' \cup (B' - C)'$ **62.** $(A' \cup B') \cap (C \cap B)$

En los problemas 63 al 66, considere conjuntos *A, B, C* de un cierto conjunto universal *U* y diga cuáles de las afirmaciones dadas son verdaderas y cuáles son falsas. En caso de que una afirmación sea falsa, proporcione un ejemplo en el cual la afirmación no se cumpla.

63. $(A \cup B) \subset A \cap B$ implica que $A = B$

64. $(A \cup \varnothing) \cup B = B \quad \forall A, B$

65. $A \cap (\varnothing \cup B) = A$ siempre que $A \subset B$

66. $A \cup B = A' \cup B' \quad \forall A, B$

67. Un pueblo pequeño posee 300 carros para el transporte público de sus habitantes. Se sabe que 110 de estos carros tienen más de 20 años de edad, que 120 son de la Nissan y que 50 son de la Nissan con más de 20 años de edad. Determine el número de carros que:

a) No son de la Nissan.

b) No son de la Nissan y tienen más de 20 años.

c) Son de la Nissan con 20 o menos años.

d) No son de la Nissan y tienen 20 o menos años.

e) Tienen 20 o menos años.

68. En un grupo de 150 personas, 45 nadan, 40 montan bicicleta y 50 corren. Se sabe que 20 personas nadan y montan bicicleta, que 32 corren pero no montan bicicleta y 10 personas realizan las tres actividades.

a) ¿Cuántas personas montan bicicleta pero no nadan ni corren?

b) Si 21 personas corren y nadan, ¿cuántas no realizan ninguna de las tres actividades?

69. Al interrogar una delegación deportiva formada por 250 atletas sobre su afición respecto al teatro, la danza o la poesía, se encontró que 125 prefieren el teatro, 180 prefieren la danza, 65 la poesía, 100 teatro y danza, 25 teatro y poesía, 40 danza y poesía y 20 tenían las tres preferencias. Determine cuántos de estos 250 atletas tienen:

a) Al menos una de estas tres preferencias.

b) Ninguna de estas tres preferencias.

c) Sólo una de estas tres preferencias.

d) Cuando mucho una de estas tres preferencias.

e) Exactamente dos de estas preferencias.

70. Una agencia de carros vendió durante un año 180 unidades con las siguientes características:

57 tenían transmisión mecánica.

77 tenían aire acondicionado.

45 tenían transmisión mecánica y aire acondicionado.

10 tenían transmisión mecánica, pero no tenían aire acondicionado ni equipo de música.

28 tenían transmisión mecánica y aire acondicionado, pero no tenían equipo de música.

90 no tenían ninguna de las tres características mencionadas.

19 tenían aire acondicionado y equipo de música.

¿Cuántas de estas unidades tenían equipo de música?

1

Conceptos fundamentales del álgebra

François Viète

La mayoría de los estudiantes no se dan cuenta de que gran parte de la notación algebraica que se utiliza en los textos de álgebra tiene menos de 400 años.

El más grande matemático francés del siglo XVI fue François Viète (1540-1603), abogado y miembro del Parlamento, quien dedicó la mayor parte de su tiempo libre a las matemáticas. Escribió un gran número de obras sobre álgebra, geometría y trigonometría, la mayoría de las cuales fueron impresas y distribuidas por su propia cuenta. La obra más famosa de Viète, *In Artem*, hizo avanzar en forma significativa la notación algebraica. Antes del trabajo de Viète era una práctica común utilizar diferentes símbolos para representar varias potencias como x, x^2, x^3 y así sucesivamente. Viète, al escribir en latín, utilizó la misma letra calificada en forma apropiada para estas potencias: x, x *quadratum* (cuadrado), x *cubum* (cubo) etc. Además, Viète extendió el uso de las letras del alfabeto para denotar no sólo las variables sino también los coeficientes constantes. La nueva notación de Viète aclaró las operaciones que se dedicaron a construir una serie compleja de términos.

El capítulo 1 proporciona un repaso de conceptos fundamentales tales como la teoría de conjuntos, el sistema de números reales y la notación algebraica. Este material conforma los fundamentos del resto del texto y de cualquier estudio más profundo sobre las matemáticas.

1.1 Sistema de números reales

NUMEROS: ENTEROS, RACIONALES E IRRACIONALES

Recordemos que el conjunto de **números naturales**, o **enteros positivos**, se compone de

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

N es un subconjunto del conjunto de los **enteros**:

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

El conjunto Z incluye tanto los enteros positivos como los negativos y el número cero, el cual no es ni negativo ni positivo. A su vez, el conjunto de enteros es un subconjunto del conjunto de **números racionales:**

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \text{ y } q \text{ son enteros, } q \neq 0 \right\}$$

El conjunto Q está compuesto de todos los cocientes de dos enteros, siempre que el denominador no sea un cero; por ejemplo,

$$\frac{-1}{2}, \quad \frac{17}{5}, \quad \frac{10}{-2} = -5, \quad \frac{6}{1} = 6, \quad \frac{0}{8} = 0$$

Nota de advertencia: el cociente a/b es indefinido si $b = 0$. Por ejemplo, $8/0$ y $0/0$ son indefinidos.

El conjunto de números racionales no es suficiente para solucionar ciertos problemas elementales algebraicos y geométricos. Por ejemplo, no hay un número racional p/q para el que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

(Véase problema 79). Así, no podemos utilizar números racionales para describir la longitud de la diagonal de un cuadrado unitario (véase figura 1). Mediante el teorema de Pitágoras sabemos que la longitud de la diagonal d debe cumplir

$$\begin{aligned} d^2 &= (1)^2 + (1)^2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Escribimos

$$d = \sqrt{2}$$

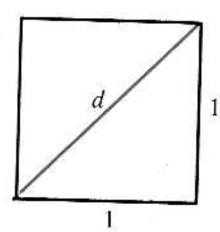


FIGURA 1

y llamamos d "la raíz cuadrada de 2". Como lo acabamos de indicar, $\sqrt{2}$ no es un número racional. Pertenece al conjunto de **números irracionales**, es decir, el conjunto de números que no pueden expresarse como cociente de dos enteros. Otros ejemplos de números irracionales son π, $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}/4$.

Si llamamos H al conjunto de números irracionales, entonces el conjunto de **números reales** R puede describirse como la unión de dos conjuntos disjuntos:

$$R = Q \cup H$$

También debemos anotar que el conjunto de números reales R puede describirse como la unión de 3 conjuntos disjuntos:

$$R = R^- \cup \{0\} \cup R^+$$

donde R^- es el conjunto de números reales **negativos** y R^+ es el conjunto de números reales **positivos**. Los elementos del conjunto

$$\{0\} \cup R^+$$

se llaman números reales **no negativos**.

DECIMALES

Todo número real puede expresarse en **forma decimal**. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4} &= 0.25 \\ \tfrac{25}{7} &= 3.571428571428\ldots \\ \tfrac{7}{3} &= 2.3333\ldots \\ \pi &= 3.14159265\ldots \\ \sqrt{2} &= 1.41421356\ldots \end{aligned}$$

Se dice que números como 0.25 y 1.6 son **decimales finitos**, en tanto que números como

$$1.\overbrace{32\;32\;32}^{\text{se repite}}\ldots \quad \text{y} \quad \overbrace{3.571428\;571428}^{\text{se repite}}\ldots$$

se llaman **decimales periódicos o recurrentes**. Un decimal periódico como 1.323232... con frecuencia se escribe $1.\overline{32}$, donde la barra indica el número o números que se repiten. Puede demostrarse que cada número racional posee una representación decimal o periódica o finita. Y viceversa, todo decimal periódico o finito es un número racional. También es un hecho básico que todo número decimal es un número real. Tenemos, entonces, que el conjunto de números irracionales está compuesto por todos los decimales que no son ni finitos ni periódicos. Así, π y $\sqrt{2}$ tienen representaciones decimales no periódicas y no finitas.

PORCENTAJE

Los fraccionarios o decimales algunas veces se expresan como **porcentajes**; por ejemplo, 8% quiere decir 8/100 ó 0.08. En general, b% significa "b partes de 100", y es, simplemente, otra manera de escribir $b/100$. Por ejemplo, 42% significa 42/100; entonces, 42% = 0.42. De igual manera, 0.005% = 0.005/100 = 0.00005.

Una forma simple de convertir un número decimal a porcentaje es multiplicar el decimal por 1 escrito en forma de 100%. Por ejemplo,

$$0.35 = 0.35 \times 1 = 0.35 \times 100\% = 35\%$$

De igual manera, $0.001 = 0.001 \times 100\% = 0.1\%$

Los porcentajes se utilizan con frecuencia para describir los incrementos o reducciones en cantidades como población, salarios y precios. Cuando una cantidad aumenta, el **porcentaje de incremento** se da por

$$\frac{\text{cantidad de aumento}}{\text{cantidad original}} \times 100\% \quad (1)$$

De igual forma, cuando una cantidad disminuye, el **porcentaje de decrecimiento** es dado por

$$\frac{\text{cantidad de decrecimiento}}{\text{cantidad original}} \times 100\% \quad (2)$$

EJEMPLO 2

La población de un pequeño pueblo disminuyó de 1,750 a 1,700 habitantes. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento?

Solución. La cantidad de decrecimiento es $1{,}750 - 1{,}700 = 50$ y la cantidad original es 1,750. Utilizando el paso (2), encontramos que

$$\frac{50}{1750} \approx 0.0285714 = 0.0285714 \times 100\% \approx 2.86\%$$

Luego, el porcentaje de decrecimiento es de aproximadamente 2.86%

Notemos que en el ejemplo 2 utilizamos el símbolo $\approx$ en lugar del signo igual para indicar que el número es sólo una aproximación.

EJEMPLO 3

El salario por hora de trabajo de un estudiante se elevó de US$5.25 dólares a US$5.75. ¿Cuál es el porcentaje de incremento?

Solución. El monto del incremento es US$5.75 − US$5.25 = US$0.50 y la cantidad original es de US$5.25. A partir del paso (1) tenemos que el porcentaje de incremento es

$$\frac{\text{US\$0.50}}{\text{US\$5.25}} \approx 0.0952381 = 0.0952381 \times 100\% \approx 9.52\%$$

EJEMPLO 4

¿Cuál es el precio de oferta de una balón de voleibol si el precio normal es de US$28.60 y hay 25% de descuento?

Solución. Debido a que se ofrece 25% de descuento, el precio de oferta será de 75% del precio normal, o

$$(0.75)\ (\text{US\$28.60}) = \text{US\$21.45}$$

De forma alternativa, podemos calcular 25% de descuento y restarlo al precio normal así:

$$\begin{aligned} \text{US\$28.60} - (0.25)\ (\text{US\$28.60}) &= \text{US\$28.60} - \text{US\$7.15} \\ &= \text{US\$21.45} \end{aligned}$$

SISTEMA DE NUMEROS REALES

El conjunto de números reales R junto con las operaciones de la adición y la multiplicación se llama **sistema de números reales**. Las reglas básicas del álgebra para este sistema nos permiten expresar hechos matemáticos en formas simples y concisas, y resolver ecuaciones para encontrar respuestas a preguntas matemáticas. Las propiedades básicas del sistema de números reales con respecto a las operaciones de la adición y la multiplicación están en una lista en el siguiente recuadro, donde a, b y c representan números reales.

Propiedades del sistema de números reales

	ADICION	MULTIPLICACION
1. Ley clausurativa	(i) $a + b$ es un número real	(ii) ab es un número real.
2. Ley asociativa	(i) $a + (b + c) = (a + b) + c$	(ii) $a(bc) = (ab)c$
3. Ley conmutativa	(i) $a + b = b + a$	(ii) $ab = ba$
4. Propiedad de identidad	El número real 0 es llamado **identidad aditiva**, ya que para todo número real a: (i) $a + 0 = a = 0 + a$	El número real 1 es llamado **identidad multiplicativa**, ya que para todo número real a: (ii) $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
5. Propiedad del inverso	Para todo número real a, existe un único número real (llamado **negativo**, o **inverso aditivo, de a**), representado por $-a$, de tal manera que (i) $a + (-a) = 0 = (-a) + a$	Para todo número real $a \neq 0$, existe un único número real (llamado **recíproco** o **inverso multiplicativo de a**), representado por $1/a$, de tal forma que (ii) $a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a$
6. Propiedad distributiva	(i) $a(b + c) = ab + ac$	(ii) $(a + b)c = ac + bc$

EJEMPLO 5

Formule una propiedad algebraica básica del sistema de números reales para justificar cada uno de los siguientes enunciados, donde x, y y z representan números reales.

(a) $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)$
(b) $(6 + 8)y = y(6 + 8)$
(c) $(x + 3)y + 2 = (xy + 3y) + 2$
(d) $(x + y)\ 1 = x + y$
(e) $(x + 2) + [-(x + 2)] = 0$
(f) $(y + z)[1/(y + z)] = 1$, si $y + z \neq 0$

Solución

(a) Propiedad asociativa de la adición
(b) Propiedad conmutativa de la multiplicación

(c) Propiedad distributiva (ii)
(d) Propiedad de identidad de la multiplicación
(e) Propiedad del inverso de la adición
(f) Propiedad del inverso de la multiplicación.

La ley distributiva puede extenderse para incluir más de dos números en la suma. Por ejemplo,

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

y

$$(a + b + c + d)e = ae + be + ce + de$$

Muchas propiedades adicionales de los números reales pueden derivarse de las propiedades básicas. Las siguientes propiedades también se utilizarán a lo largo de este texto.

7. Ley cancelativa o anulativa
(i) Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$
(ii) Si $ac = bc$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$
8. Ley de la multiplicación por cero
(i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
(ii) Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$ (o ambas)

Por ejemplo, si $x + y = 8 + y$, entonces podemos concluir a partir de la ley cancelativa **(i)** que $x = 8$. Y si $2x = 2y$, entonces, a partir de la ley cancelativa **(ii)** tenemos que $x = y$.
La propiedad de la multiplicación por cero (ii) es de extrema importancia en la solución de ecuaciones. Por ejemplo, si $x(x + 1) = 0$, entonces $x = 0$ ó $x + 1 = 0$.
Es posible definir las operaciones de la sustracción y la división en términos de la adición y de la multiplicación, respectivamente.

DEFINICION 1

Para los números reales a y b, la **diferencia**, $a - b$, se define como

$$a - b = a + (-b).$$

Si $b \neq 0$, entonces el **cociente**, $a \div b$ se define como

$$a \div b = a\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}$$

En el cociente a/b, a se llama **numerador** y b **denominador**. Con frecuencia, el cociente de dos números reales a/b se llama **fracción**. Nótese que $a \div b$ ó a/b no es definida para $b = 0$. Entonces, $a/0$ no es definida para ningún número real a. Como lo demuestra el siguiente ejemplo, no todas las propiedades que funcionan para la adición y la multiplicación son válidas para la sustracción y la división.

EJEMPLO 6

Si tenemos que $1 - (2 - 3) = 2$ y $(1 - 2) - 3 = -4$, observamos que

$$1 - (2 - 3) \neq (1 - 2) - 3$$

Entonces, la sustracción no es asociativa.

Ahora, hagamos una lista de las propiedades importantes de la sustracción, relacionadas con negativos y fraccionarios, con los cuales usted puede estar ya familiarizado.

9. Propiedades de la sustracción y negativos

(i) $-(-a) = a$

(ii) $-(ab) = (-a)(b) = a(-b)$

(iii) $-a = (-1)a$

(iv) $(-a)(-b) = ab$

Para todas las fracciones a/b y c/d, donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$:

10. Fracciones equivalentes

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{si y sólo si } ad = bc$$

11. Regla de los signos

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

12. Cancelativa

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, \; c \neq 0$$

13. Adición y sustracción con común denominador

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

14. Adición y sustracción con distintos denominadores

$$\frac{a}{d} \pm \frac{c}{b} = \frac{ab \pm dc}{db}$$

15. Multiplicación

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

16. División

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \; c \neq 0$$

17. División de cero y división por cero

(i) $0 \div b = \dfrac{0}{b}, \; b \neq 0$

(ii) $0 \div 0 = \dfrac{0}{0}$ es indefinido

(iii) $a \div 0 = \dfrac{a}{0}$ es indefinido, $a \neq 0$

EJEMPLO 7

Evalúe cada una de las siguientes expresiones:

(a) $(-x)(-y)$

(b) $\dfrac{-(-a)}{-b}$

(c) $\dfrac{2(u+v)}{2v}$

(d) $\dfrac{y}{(1/4 + 3/5)}$

(e) $z \cdot \dfrac{0}{5}$

(f) $\dfrac{w}{2-(5-3)}$

Solución

(a) $(-x)(-y) = xy$

(b) $\dfrac{-(-a)}{-b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$

(c) $\dfrac{2(u+v)}{2v} = \dfrac{u+v}{v}$

(d) Para hallar el valor numérico de $y/(1/4 + 3/5)$, primero hallamos el denominador :

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{(1)(5) + (4)(3)}{(4)(5)} = \frac{17}{20}$$

Entonces, tenemos que

$$\frac{y}{(1/4 + 3/5)} = \frac{y}{17/20} = \frac{y}{1} \cdot \frac{20}{17} = \frac{20y}{17}$$

(e) $z \cdot \dfrac{0}{5} = z \cdot 0 = 0$

(f) La expresión $w/[2-(5-3)]$ es indefinida, porque su denominador es cero:

$$2-(5-3) = 2-2 = 0$$

Nota de advertencia: en la solución del ejemplo 7(c), un error común es cancelar las letras v en

$$\frac{u+v}{v}$$

No se puede realizar ninguna cancelación debido a que v no es factor tanto del numerador como del denominador como lo requiere la ley cancelativa (ii).

EJERCICIO 1.1

En los problemas 1 al 4, haga la lista de los elementos del conjunto dado.

1. $\{x | x = 6n - 1,\ n \in N\}$
2. $\{2x | x \in N\} \cap \{3x | x \in N\}$
3. $\{a | a = 3b,\ b = 3/7, 1/3\}$
4. $\{t | t = m/q,\ m = -1, 3,\ q = -1/3, 2\}$

En los problemas 5 al 8, utilice la notación de conjuntos para expresar el conjunto dado.

5. El conjunto de los enteros impares
6. El conjunto de los números pares primos
7. El conjunto de los enteros no negativos
8. El conjunto de los números reales cuyo cuadrado es 25

Determine en cada caso si las afirmaciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta.

9. 2/3 es un elemento de Z. ____
10. –1/3 es un elemento de Q.____
11. $\sqrt{7}$ es un elemento de R. ____
12. $\sqrt{5}$ es un número racional. ____
13. 3.46666... es un número irracional. ____
14. 2.9 es un número racional. ____
15. 0.131313... es un número racional. ____
16. a/b, para cualquier a y b enteros es un número racional. ____
17. –6 es un elemento de Z, pero no es un elemento de N. ____
18. π es un elemento de R, pero no es un elemento de Q. ____
19. Todo número irracional es un número real. ____
20. Todo número entero es un número racional. ____
21. Existen números decimales que no son reales. ____
22. Hay números reales que son racionales e irracionales. ____
23. Todo porcentaje puede expresarse como decimal. ____
24. Todo número racional tiene una expresión decimal. ____
25. Existe un número decimal que no puede expresarse como cociente de dos números enteros. ____
26. Todo porcentaje es un número real. ____

Exprese en forma de fracción los siguientes números decimales:

27. 0.7
28. $0.\overline{123}$
29. $0.\overline{321}$
30. 0.875
31. 0.325
32. $0.\overline{521}$
33. $0.\overline{235}$
34. 0.38

En los problemas 35 al 38, encuentre la expresión decimal de cada uno de los números.

35. 45%
36. 7.8%
37. 128%
38. 0.00003%

En los problemas 39 al 42, exprese como porcentaje cada uno de los decimales.

39. 32.05
40. 0.87
41. 0.6412
42. 0.929
43. Si el recíproco del número real $(a - 4)$ es 1/5, determine el opuesto aditivo de $a + 1$.
44. El costo de un computador disminuyó de US$1,500 a US$930. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento?
45. ¿Cuál es el costo final de un artículo que está en lista a L dólares después de dar 5% de descuento y de aplicarle 6% de impuesto a las ventas? (Nótese que el precio de lista no aumenta en 1%).
46. El costo de un libro de estadística aumentó de US$30 a US$38. ¿Cuál es el porcentaje de incremento?
47. Un auto originalmente costaba US$12,000. Un año más tarde costaba US$10,200. ¿Cuál es el porcentaje de depreciación?
48. El precio de lista de un auto es de US$7,000; después de haber sido reducido su costo en 3%, ¿cuál es el nuevo precio?
49. Una tienda de audio anunciaba una unidad de disco compacto con 10% de descuento para un ahorro de US$30.00; más tarde se vendió la unidad a 30% del precio original. Halle el precio original, el precio de venta y el monto del descuento final.
50. El salario de un profesor de universidad es US$40,000. Después de aumentarle 6%, ¿cuál es su nuevo salario?

Formule una propiedad básica del sistema de números reales para justificar cada uno de los enunciados dados en los problemas 51 al 66.

51. $(a + b) + 4 = (b + a) + 4$
52. $(1/8)8 = 1$
53. $[(5)(6)](2) = [6(5)](2)$
54. $2/3 + (-2/3) = 0$
55. $(x + 7) + \pi = \pi + (x + 7)$
56. $1/4 + (-1/4) = 0$
57. $(a - b) + [-(a - b)] = 0$
58. $x(y + 0) + z = xy + z$
59. $(x - y)(1/x - y) = 1, x \neq y$
60. $1(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$
61. $\{3 + [(-5)(1)]\} + 4 = \{3 + (-5)\} + 4$
62. $(1/5)(5) = 1$
63. $[(w + 3)2]z = [2(w + 3)]z$
64. $(1 + 2)(-3) = 1(-3) + 2(-3)$
65. $(3 + 4)(5 + 2) = (3 + 4)5 + (3 + 4)2$
66. $(-13 + z)(2) + 7 = [z + (-13)](2) + 7$

Enuncie una de las propiedades derivadas (propiedades 7 a 17) del sistema de números reales para justificar cada uno de los enunciados dados en los problemas 67 al 73.

67. Si $(x+2)(3)=4(3)$, entonces $x+2=4$

68. $(-5)(-x)=5x$

69. Si $z^2=0$, entonces $z=0$

70. $-(-17)=17$

71. $(a+b+c)0=0$

72. Si $(t+1)(t-2)=0$, entonces $t+1=0$ ó $t-2=0$

73. $\dfrac{0}{(a^2+1)}=0$

74. Sean x, y, z números reales y $x+z=y+z$; pruebe que $x=y$.

75. Sean k, y, z números reales, $y+z=k+z$; pruebe que $y=k$.

76. Sean a, b, c, números reales, $ac=bc$ y $c\neq 0$; muestre que $a=b$.

77. Responda falso o verdadero:

(a) Si $c\neq 0$, entonces $(a+b)\div c=(a\div c)+(b\div c)$. ____

(b) Si $a\neq 0$, $b\neq 0$ y $a+b\neq 0$,

entonces $c\div(a+b)=(c\div a)+(c\div b)$. ____

78. Demuestre mediante un ejemplo que la sustracción en R (números reales) no es una operación conmutativa.

79. Demuestre que $\sqrt{2}$ no puede expresarse como cociente de enteros.

[*Sugerencia:* suponga que hay un fraccionario (p/q) reducido a su mínima expresión tal que $(p/q)^2=2$. Esto simplifica a $p^2=2q^2$, lo cual implica que p^2, en consecuencia p es un entero par, es decir $p=2r$. Haga esta sustitución y considere que $(2r/q)^2=2$. Debe llegar a la contradicción del hecho de que p/q fue reducida a la mínima expresión].

80. Demuestre mediante un ejemplo que la división en el conjunto de números reales diferentes de cero no es conmutativa.

81. Demuestre mediante un ejemplo que la división en el conjunto de números reales diferentes de cero no es asociativa.

En los problemas 82 a 86, halle la expresión dada.

82. $-(-t)[3-8]$

83. $\dfrac{-(-k)}{-km}$

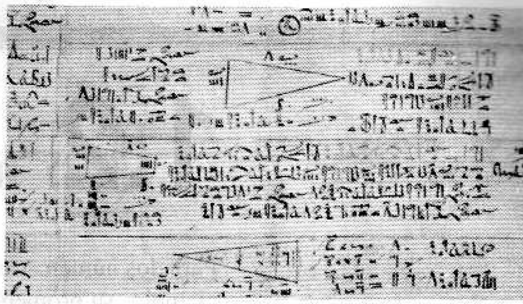
84. $\dfrac{[(21)(0)(y)]}{(\sqrt{5}-\sqrt{7})}$

85. $\dfrac{6(5+b)}{12b}$

86. $(\sqrt{2}-\sqrt{2})(u+v-9)$

87. Sean x, y números reales distintos de 0, muestre que (a) $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$; (b) $(x^{-1})^{-1}=x$; (c) $(x/y)^{-1}=y/x$.

88. El papiro Rhind (alrededor de 1700 a. de C.) indica que los egipcios utilizaron $(16/9)^2$ como valor de π.



(a) ¿Es la aproximación mayor o menor que π?

(b) Demuestre que el error al utilizar esta aproximación es menor que 1% de π.

89. ¿Es el producto de dos números irracionales necesariamente irracional? Explique.

90. Algunas claves secretas funcionan desplazando o corriendo letras del alfabeto. La Figura 2 muestra un desplazamiento en dos de ellas. Cada letra del mensaje puede ser trasladada por una cantidad diferente. Este esquema de codificación puede representarse por los dígitos en un número decimal. Por ejemplo, el número decimal 0.12121212... codifica el mensaje ESTUDIE MATEMÁTICA en FUUWEKF OBVFOBVJEBU. Si utiliza 9/37 produce el mensaje codificado RMWCKRTEV XMYG, entonces, ¿cuál fue el mensaje original?

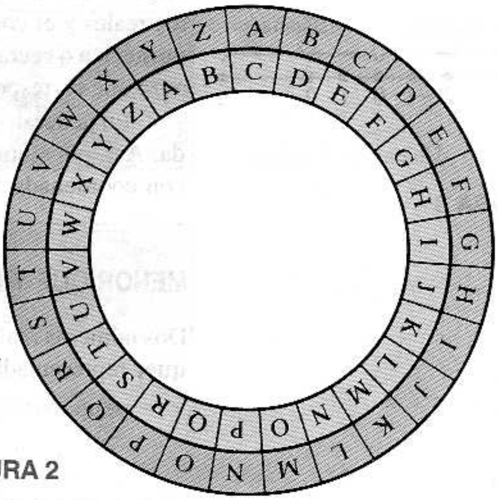


FIGURA 2

91. Utilizando el hecho de que la circunferencia de un círculo es π veces el diámetro, determine qué valor de π se implica a partir del siguiente pasaje bíblico: "Hizo el mar de fundición: Tenía diez codos de borde a borde, del todo circular y cinco codos de altura. Un cordón de treinta codos lo ceñía todo en derredor". (Tomado de II Crónicas 4:2 y I Reyes 7:23, que datan del siglo X a. de C.)

92. ¿Es el cociente de dos números irracionales necesariamente irracional? Explique.

1.2 Recta de números reales

Para dos números reales distintos a y b, siempre hay un tercer número real entre ellos; por ejemplo, su promedio $(a+b)/2$ es el punto medio entre ellos. De igual manera, para dos puntos distintos A y B en una recta, hay siempre un tercer punto entre ellos; por ejemplo, el punto medio M del segmento de recta AB. Hay muchas similaridades como ésta entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos en una recta que indican el uso de una recta para "describir" el conjunto de los números reales. Esto puede hacerse como se explica a continuación.

RECTA DE NUMEROS REALES

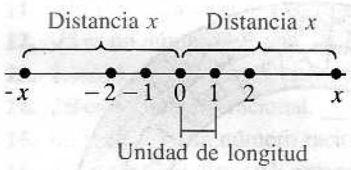


FIGURA 3

Dada cualquier recta, escogemos un punto sobre ella para representar el número 0. Este punto, en particular, se llama **origen.** Si ahora seleccionamos un segmento de recta de longitud unitaria, como lo muestra la figura 3, cada número real positivo x puede representarse por un punto a una distancia x a la derecha del origen. De igual forma, cada número real negativo $-x$ puede representarse con un punto a una distancia x hacia la izquierda del origen. Esta asociación produce una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos en una recta, llamada **recta de números reales, recta numérica** o **recta coordenada.** Para cualquier punto P dado en la recta numérica, el número p, que corresponde a este punto se llama **coordenada** de P.

En general, no diferenciaremos entre un punto sobre la recta numérica y su coordenada. Así, por ejemplo, algunas veces nos referiremos al punto en la recta de números reales con coordenada 5 como "el punto 5".

MENOR QUE Y MAYOR QUE

Dos números reales a y b, $a \neq b$, pueden compararse mediante la relación de orden **menor que,** representada por el símbolo $<$. Decimos que

a es menor que b si y sólo si $b - a$ es positivo.

Si a es menor que b, escribimos $a < b$.

De forma equivalente, podemos decir que b es **mayor que** a y escribir $b > a$. Por ejemplo, $-7 < 5$, ya que $5 - (-7) = 12$ es positivo. Podemos escribir también $5 > -7$.

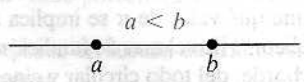


FIGURA 4

La recta de números reales es útil para demostrar la relación de orden menor que. Geométricamente, $a < b$ significa que el punto que corresponde a a en la recta numérica se halla a la izquierda del punto que corresponde a b (véase figura 4).

EJEMPLO 1

Utilizando la relación de orden mayor que, compare los números reales π y $\frac{22}{7}$.

Solución. De $\pi = 3.1415\ldots$ y $\frac{22}{7} = 3.1428\ldots$, encontramos que

$$\tfrac{22}{7} - \pi = (3.1428\ldots) - (3.1415\ldots)$$
$$= 0.001\ldots$$

Debido a que la diferencia es positiva, concluimos que

$$\tfrac{22}{7} > \pi$$

Dos relaciones adicionales de orden son importantes:

1. a **es menor o igual a** b, dado por

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a < b \text{ o } a = b$$

2. a **es mayor o igual** a b, dado por

$$a \geq b \text{ si y sólo si } a > b \text{ o } a = b$$

Por ejemplo, ya que $2 = \sqrt{4}$, podemos escribir $2 \geq \sqrt{4}$ ó $2 \leq \sqrt{4}$. También podemos decir que $4 \leq 9$, ya que $4 < 9$.

DESIGUALDADES

Las relaciones $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, y $a \geq b$ se llaman **desigualdades** y los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ son **símbolos de desigualdad.** Si $b \geq 0$, entonces b no es negativo; entonces, decimos que b es *no negativo*. De igual forma, si $b \leq 0$, decimos que b es **no positivo.**

La relación de orden menor que posee las siguientes propiedades:

Ley de tricotomía

Para dos números reales cualesquiera a y b, sólo una de las tres es verdadera:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

Propiedad transitiva

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Por ejemplo, si $x < 12$ y $12 < y$, concluimos de la propiedad transitiva que $x < y$.

VALOR ABSOLUTO

También podemos utilizar la recta de números reales para presentar la distancia.

Como lo muestra la figura 5, la distancia desde el punto 3 hasta el origen es de 3 unidades y la distancia desde el punto -3 hasta el origen es de 3, ó $-(-3)$, unidades. De nuestra discusión sobre la recta numérica resulta que, en general, la distancia de cualquier número al origen es el "valor sin signo" de ese número.

FIGURA 5

De forma más precisa, como lo muestra la figura 6, para cualquier número real positivo x, la distancia del punto x al origen es x, pero para cualquier número negativo y la distancia del punto y al origen es $-y$. Por supuesto, para $x = 0$ la distancia al origen es 0. El concepto de distancia de un punto en la recta numérica al origen es descrito por el **valor absoluto.**

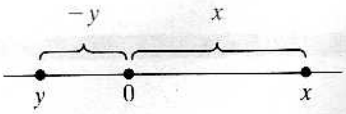


FIGURA 6

DEFINICION 2

Para cualquier número real a, el **valor absoluto** de a denotado por $|a|$ es

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 2

Siendo 3 y $\sqrt{2}$ números positivos,

$$|3| = 3 \quad \text{y} \quad |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

Pero debido a que -3 y $-\sqrt{2}$ son números negativos,

$$|-3| = -(-3) = 3 \quad \text{y} \quad |-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

EJEMPLO 3

(a) $|2 - 2| = |0| = 0$
(b) $|2 - 5| = |-3| = -(-3) = 3$
(c) $|2| - |-5| = 2 - [-(-5)] = 2 - 5 = -3$

EJEMPLO 4

Halle $|\sqrt{2} - 3|$.

Solución. Para hallar $|\sqrt{2} - 3|$, debemos primero determinar si $(\sqrt{2} - 3)$ es positivo o negativo. Ya que $\sqrt{2} \approx 1.4$, vemos que $(\sqrt{2} - 3)$ es un número negativo. Así,

$$\begin{aligned} |\sqrt{2} - 3| &= -(\sqrt{2} - 3) = -\sqrt{2} + 3 \\ &= 3 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Nota de advertencia: es un error común pensar que $-y$ representa un número negativo porque el símbolo y va precedido de un signo menos. Enfatizamos que si y representa un número negativo, entonces $-y$ es un número positivo. En consecuencia, si y es negativo, entonces $|y| = -y$.

EJEMPLO 5

Halle $|x - 6|$ si **(a)** $x > 6$, **(b)** $x = 6$ y **(c)** $x < 6$

Solución

(a) Si $x > 6$, entonces $x - 6$ es positivo. Luego, de la definición de valor absoluto concluimos que $|x - 6| = x - 6$.
(b) Si $x = 6$, entonces $x - 6 = 0$; luego, $|x - 6| = |0| = 0$.
(c) Si $x < 6$, entonces $x - 6$ es negativo y tenemos que $|x - 6| = -(x - 6) = 6 - x$

Para cualquier número real x y su negativo, $-x$, la distancia al origen es la misma. Es decir $|x| = |-x|$. Esta es una de las propiedades especiales del valor absoluto, las cuales describimos en el siguiente cuadro.

Propiedades del valor absoluto

(i) $|x| \geq 0$

(ii) $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$

(iii) $|x| = |-x|$

(iv) $|xy| = |x|\,|y|$

(v) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|},\ y \neq 0$

Definir estas propiedades con palabras es una forma de aumentar su comprensión de ellas. Por ejemplo, la propiedad (i) dice que el valor absoluto de una cantidad es siempre no negativa. La propiedad (iv) dice que el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos de los dos factores.

Otra propiedad importante del valor absoluto es la **desigualdad triangular.**

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

DISTANCIA ENTRE PUNTOS

El concepto de valor absoluto no sólo describe la distancia de un punto al origen; también es útil para hallar la distancia entre dos puntos en la recta numérica. Debido a que deseamos describir la distancia como una cantidad positiva, restamos una coordenada de la otra y luego sacamos el valor absoluto de la diferencia.

DEFINICION 3

Si a y b son dos puntos en la recta numérica, la **distancia** de a a b es

$$d(a, b) = |b - a|$$

(Véase la figura 7).

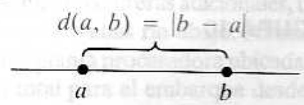


FIGURA 7

EJEMPLO 6

(a) La distancia de -5 a 2 es

$$d(-5, 2) = |2 - (-5)| = 7$$

(b) La distancia de 3 a $\sqrt{2}$ es

$$d(3, \sqrt{2}) = |\sqrt{2} - 3| = 3 - \sqrt{2}$$

Vemos que la distancia de a a b es la misma que la distancia de b a a, ya que mediante la propiedad (iii)

$$d(a, b) = |b - a| = |-(b - a)| = |a - b| = d(b, a)$$

Así,

$$d(a, b) = d(b, a)$$

COORDENADA DEL PUNTO MEDIO

La definición 3 puede utilizarse para hallar una expresión para el **punto medio** de un segmento de recta. (Véase problema 98).

El punto medio m de un segmento de recta que une a a y b es el promedio de los dos extremos:

$$m = \frac{a+b}{2} \tag{3}$$

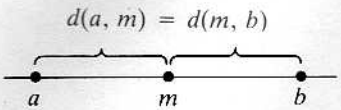


FIGURA 8

(Veáse figura 8).

EJEMPLO 7

A partir de (3), el punto medio del segmento de recta que une los puntos 5 y -2 es

$$\frac{5+(-2)}{2} = \frac{3}{2}$$

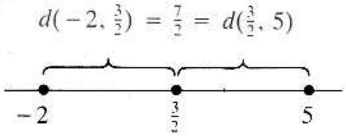


FIGURA 9

(Véase figura 9).

EJEMPLO 8

El segmento de recta que une a a y b tiene punto medio $m = 4$. Si la distancia de a a b es de 7, halle a y b.

Solución. Como observamos en la figura 10, ya que m es el punto medio,

$$l = d(a, m) = d(m, b)$$

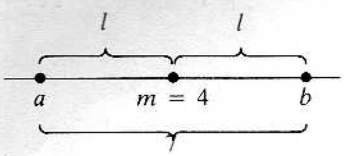


FIGURA 10

Entonces, $2l = 7$ ó $l = \frac{7}{2}$. Ahora tenemos que

$$a = 4 - \tfrac{7}{2} = \tfrac{1}{2}$$

y

$$b = 4 + \tfrac{7}{2} = \tfrac{15}{2}$$

EJERCICIO 1.2

1. Dibuje una recta numérica y localice en ella los siguientes puntos:
0, –1/3, 1, –3/2, –2, 2.6, 1/2, 4

En los problemas 2 al 9, escriba la proposición como una desigualdad.

2. t es negativo
3. $x + y$ es no negativo
4. w es positivo
5. a es menor que –4
6. $|t-1|$ es menor que 60
7. k es mayor o igual a 100
8. $|s+4|$ es mayor o igual que 7
9. $c-1$ es menor o igual que 5

10. Dibuje una recta numérica y localice en ella los siguientes puntos:
0, 1, –1, $\sqrt{2}$, –3, $-\sqrt{2}+1$

En los problemas 11 al 16, compare las parejas de números utilizando la relación de orden "menor que".

11. –9, 0
12. π, 3.14
13. 1.732, $\sqrt{3}$
14. 15, –3
15. 4/3, 1.33
16. –7/15, –5/12

En los problemas 17 al 22, compare las parejas de números utilizando la relación de orden "mayor o igual que".

17. 0.333, 1/3
18. a, b siendo a un natural y b entero no positivo.

19. –1/7, –0.143 **20.** 3.333, 10/3
21. $\sqrt{2}$, 1.414 **22.** –2, –7

En los problemas 23 al 44, halle el valor absoluto.

23. $|8|$ **24.** $|-12|$
25. $|15/7|$ **26.** $|-15/7|$
27. $|\sqrt{5}|$ **28.** $|-\sqrt{5}|$
29. $|0.13|$ **30.** $|\pi - 4|$
31. $|15|$ **32.** $|6-2|$
33. $|2-6|$ **34.** $|4-\sqrt{7}|$
35. $|12|-|61|$ **36.** $|\sqrt{7}-4|$
37. $|\sqrt{5}-6|$ **38.** $|6.28-2\pi|$
39. $|-(\sqrt{7}-8)|$ **40.** $|\pi/2-1.57|$
41. $|\sqrt{17}-4.123|$ **42.** $|\sqrt{7}-8|$
43. $|\sqrt{5}-2.3|$ **44.** $|-6|-|-2|$

En los problemas 45 al 56, escriba la expresión sin utilizar los símbolos del valor absoluto.

45. $|u|$, si u es no negativo **46.** $|5-x|$, si $x<5$
47. $|x-2|$, si $x>2$ **48.** $|11-y|$, si $y>11$
49. $|x-y|-|y-x|$ **50.** $|-t|$, si t es negativo
51. $\dfrac{|m-p|}{|p-m|}$, $m \neq p$ **52.** $\dfrac{|t|}{|t|}$, $t \neq 0$
53. $|p-3|$, si $p=3$ **54.** $|2x-y|$, x es la mitad de y
55. $|3a-b|$, $3a<b$ **56.** $\dfrac{|2w|}{-|w|}$, $w \neq 0$
57. ¿Para qué valores de x es verdad que $x=|x|$?
58. Utilice la definición 2 para probar que $|x/y|=\dfrac{|x|}{|y|}$ para cualquier número real x , y cualquier número real y diferente de cero.
59. ¿Para qué valores de x es verdad que $x \leq |x|$?
60. Utilice la definición 2 para probar que $|xy|=|x||y|$ para cualquier número real x, y.

En los problemas 61 al 67, responda falso o verdadero para cualquier número real *a, m, t, w, x*.

61. Si $m<t$ y $t<w$, entonces $m<w$ ______
62. $-|a| \leq |a|$ ______ **63.** $\dfrac{|a \cdot a|}{|a|}=|a|$, $a \neq 0$ ______
64. $-|a| \leq a$ ______ **65.** $|a|>-1$ ______
66. $-a \leq a$ ______ **67.** $x \leq |x|$ ______
68. Sean x, y números reales; pruebe que $|x+y| \leq |x|+|y|$

En los problemas 69 al 76, (a) halle la distancia entre los puntos dados y (b) halle la coordenada del punto medio del segmento de recta que une los puntos dados.

69. –5; –8 **70.** –1/4, 7/4
71. 7, –5.2 **72.** 5/2, –5/2
73. 0.4, 0.9 **74.** 2, 6
75. –100, 230 **76.** 7, 1

En los problemas 77 al 84, *m* es el punto medio del segmento de recta que une a *a* (el punto final a la izquierda) y *b* (el punto final de la derecha). Utilice las condiciones dadas para hallar los valores indicados.

77. $m=5, d(a,m)=4; a, b$ **78.** $m=-2, d(m,b)=3; a, b$
79. $b=-3, d(a,b)=\sqrt{2}\ ; a, m$ **80.** $a=4, d(a,m)=\pi; b, m$
81. $m=\sqrt{2}\ , d(a,b)=1; a, b$ **82.** $b=-3/2, d(a,b)=1/2; a, m$
83. $a=12, d(b,m)=6; b, m$ **84.** $b=-5, d(a,b)=\sqrt{3}\ ; a, m$
85. Halle la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son: (–5) y (6).
86. Sean $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ los puntos extremos de un segmento de recta. Pruebe que la coordenada x de un punto p que divide a p_1p_2 en $r=\dfrac{p_1p}{pp_2}$ es $x=\dfrac{x_1+rx_2}{1+r}$, $r \neq -1$

En los problemas 87 al 93, determine cuál proposición de la ley de la tricotomía (*a* < *b*, *b* < *a*, ó *a* = *b*) se cumple para las siguientes parejas de números *a, b*.

87. $\sqrt{3}$, 1.7 **88.** (20)(20), 400
89. $|-12|$, 12 **90.** π, 3.14
91. $\sqrt{2}-2$, 0 **92.** 2/9, 0.2
93. 7/11, 0.636363...
94. ¿En qué condiciones se cumple la igualdad en la desigualdad triangular, es decir, cuándo es verdad que $|a+b|=|a|+|b|$?
95. Greg, Tricia, Ethan y Natalie viven en la calle real. Tricia vive a una milla de donde vive Greg, y Ethan vive a una milla y media de donde vive Tricia. Natalie vive a medio camino entre Ethan y Tricia, ¿qué tan lejos vive Natalie de Greg? [*Sugerencia*: hay dos soluciones].
96. Utilice la desigualdad triangular para probar que $|a-b| \geq |a|-|b|$ [*Sugerencia:* $a=(a-b)+b$].
97. Una compañía que poseía una planta manufacturera cerca de un río compró dos plantas manufactureras adicionales, una a x millas río arriba y la otra a y millas río abajo. Ahora la compañía desea construir una planta procesadora ubicada de tal manera que la distancia total para el embarque desde la planta procesadora hasta las tres plantas manufactureras sea mínima. Utilice la desigualdad triangular para demostrar que la planta procesadora debe construirse en el mismo sitio de la primera planta manufacturera. [*Sugerencia:* piense que las plantas están situadas en $0, x$, y $-y$ en la recta numérica (véase figura 11). Utilizando valores absolutos, halle una expresión para la distancia total de embarque si la planta procesadora se coloca en el punto d].

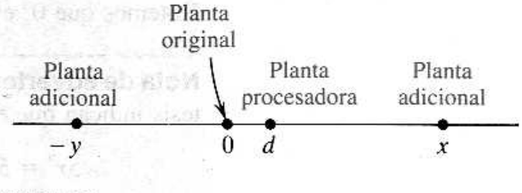


FIGURA 11

98. Sean a, b los extremos de un segmento de recta, con m punto medio, pruebe que: $m=\dfrac{a+b}{2}$

1.3 Exponentes enteros

EXPONENTES

Creemos que es más conveniente escribir una suma repetida $x + x + x + x$ de forma $4x$. De igual forma, podemos escribir el producto repetido $x \cdot x \cdot x$ de manera más efectiva, utilizando **exponentes.** En particular $x \cdot x \cdot x = x^3$. En general, para cualquier número real x y para cualquier entero positivo n, el simbolo x^n, que se lee como "x a la enésima potencia", representa el producto de n factores de x. Así,

$$x^n = \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ factores}}$$

para cualquier entero positivo n. En la expresión x^n, n se denomina **exponente** ó **potencia** de x y x se denomina **base.** Por ejemplo,

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

y

$$y^3 = y \cdot y \cdot y$$

También, para cualquier entero positivo n, definimos

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x \neq 0$$

Entonces, por ejemplo,

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

y

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{10}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{10{,}000}} = 10{,}000$$

Finalmente, para cualquier base x diferente de cero, definimos

$$x^0 = 1$$

(Véase problema 89 para obtener la razón fundamental de esta definición). Entonces,

$$2^0 = 1 \quad \text{y} \quad (\sqrt{2} + \sqrt{3})^0 = 1$$

Notemos que 0^0 es indefinido.

Nota de advertencia: es importante reconocer la diferencia entre $5x^3$ y $(5x)^3$. Los paréntesis indican que el exponente 3 se aplica a $5x$ y no sólo a x. En otras palabras,

$$5x^3 = 5 \cdot x \cdot x \cdot x \quad \text{y} \quad (5x)^3 = 5x \cdot 5x \cdot 5x = 125x^3$$

De igual forma,

$$-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81 \quad \text{y} \quad (-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$$

LEYES DE LOS EXPONENTES

Se han establecido varias reglas para combinar potencias, llamadas **leyes de los exponentes.** Como ejemplo simple, consideremos el producto $3^2 \cdot 3^4$. Al contar los factores observamos que

$$3^2 \cdot 3^4 = \overbrace{(3 \cdot 3)}^{\textbf{2 factores}}\overbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}^{\textbf{4 factores}} = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{\textbf{6 factores}}$$
$$= 3^6 = 3^{2+4}$$

es decir, $$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4}$$

En general, si x es cualquier número y m y n son enteros positivos, entonces,

$$x^m x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{\textbf{m factores}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{\textbf{n factores}} = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{\textbf{m + n factores}} = x^{m+n}$$

Cuando tanto m como n son negativos, los factores se cuentan de la misma forma, aunque estén en el denominador de la fracción resultante. Si $m \geq 0$ y n es negativo, tenemos que $n = -q$, donde $q > 0$. Entonces,

$$x^m x^n = x^m x^{-q} = \frac{x^m}{x^q} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdots x}^{\textbf{m factores}}}{\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{\textbf{q factores}}}$$

Después de que todos los factores posibles han sido cancelados, bien quedan en el numerador $m - q$ factores o $q - m$ factores en el denominador. En el primer caso,

$$x^m x^n = x^m x^{-q} = x^{m-q} = x^{m+n}$$

y en el segundo caso,

$$x^m x^n = x^m x^{-q} = \frac{1}{x^{q-m}} = x^{-(q-m)} = x^{m-q} = x^{m+n}$$

Por un argumento similar, puede verificarse que $x^m x^n = x^{m+n}$ si m es negativo y $n \geq 0$.

Esta y otras fórmulas que involucran a los exponentes están en la lista a continuación:

Leyes de los exponentes

Sean x y y números reales y m y n números enteros. Entonces,

(i) $x^m x^n = x^{m+n}$
(ii) $(x^m)^n = x^{mn}$
(iii) $(xy)^n = x^n y^n$
(iv) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
(v) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

dado que cada expresión representa un número real.

Al formular estas leyes, cada vez que x o y se dan en el denominador o con un exponente negativo, x o y deben ser diferentes de cero.

En los siguientes ejemplos ilustramos cada una de las leyes de los exponentes.

EJEMPLO 1

Para (i)

(a) $a^5a^4 = a^{5+4} = a^9$

Para (ii)

(b) $(b^3)^{-2} = b^{3(-2)} = b^{-6} = \dfrac{1}{b^6}$

Para (iii)

(c) $(3x)^4 = 3^4x^4 = 81x^4$

Para (iv)

(d) $\left(\dfrac{y}{4}\right)^{-5} = \dfrac{y^{-5}}{4^{-5}} = \dfrac{\dfrac{1}{y^5}}{\dfrac{1}{4^5}} = \dfrac{4^5}{y^5} = \dfrac{1{,}024}{y^5}$

Para (v)

(e) $\dfrac{a^{-5}}{a^{-3}} = a^{-5-(-3)} = a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$

Las leyes de los exponentes son útiles para simplificar expresiones algebraicas, como veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2

$$\frac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5}$$

Solución. Mediante las leyes de los exponentes tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5} &= \frac{(-6)^3x^3(y^2)^3}{x^2y^5}\\ &= -\frac{216x^3y^6}{x^2y^5}\\ &= -216x^{3-2}y^{6-5}\\ &= -216xy\end{aligned}$$

NOTACION CIENTIFICA

Los exponentes enteros con frecuencia se utilizan para escribir números muy grandes o muy pequeños de una forma conveniente.

Cualquier número real positivo puede escribirse en la forma

$$a \times 10^n$$

donde $1 \leq a < 10$ y n es un entero. Decimos que un número escrito así está en **notación científica.** Por ejemplo,

$$1{,}000{,}000 = 1 \times 10^6$$

y

$$0.0000000537 = 5.37 \times 10^{-8}$$

La notación científica es más útil en química y física, donde ocurren con frecuencia números como

$$92{,}900{,}000 = 9.29 \times 10^7$$

y

$$0.000000000251 = 2.51 \times 10^{-10}$$

estos números son la distancia promedio de la Tierra al Sol expresada en millas y el promedio de vida de una partícula lambda en segundos, respectivamente. Los números como éstos ciertamente son más fácil de escribir y de recordar cuando se dan en notación científica. Además, las expresiones que contienen números que están escritos en notación científica son simplificados más fácilmente. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3

Halle el valor de

$$\frac{(4000)^3(1{,}000{,}000)}{(20{,}000{,}000)^5}$$

Solución. Escribimos los números en notación científica y luego utilizamos las leyes exponenciales para simplificar la expresión:

$$\begin{aligned}\frac{(4000)^3(1{,}000{,}000)}{(20{,}000{,}000)^5} &= \frac{(4 \times 10^3)^3(1 \times 10^6)}{(2 \times 10^7)^5} = \frac{(4^3)(10^3)^3 10^6}{2^5(10^7)^5}\\ &= \frac{64(10^9)(10^6)}{32(10^{35})}\\ &= 2 \times 10^{-20} = 0.00000000000000000002\end{aligned}$$

La mayoría de las calculadoras convierten automáticamente un número en notación científica cuando éste es muy grande o muy pequeño como para ser expresado en forma decimal. Por ejemplo, el número 1.234×10^{15} requiere 16 dígitos para su forma decimal pero, ya que pocas calculadoras pueden expresar más de 10 dígitos, el signo de multiplicación y la base 10 no se muestran. Entonces, el número

$$1.234 \times 10^{15}$$

aparece como

$$\boxed{1.234 \qquad 15}$$

y el número

$$4.02 \times 10^{-12}$$

se expresa así

$$\boxed{4.02 \qquad -12}$$

En muchas calculadoras es posible utilizar la notación científica cuando se ingresa un número. Consulte el manual de su calculadora para mayores detalles.

DIGITOS SIGNIFICATIVOS

La mayoría de las aplicaciones de las matemáticas en el mundo real incluyen medidas que están sujetas a error y, en consecuencia, se consideran aproximaciones. Podemos describir la exactitud de una aproximación estableciendo cuántos **dígitos significativos** tiene.

Supongamos que el resultado de una medida se exprese en notación científica

$$x = a \times 10^n, \quad \text{donde } 1 \leq a < 10$$

y se sabe que los dígitos en a son exactos (excepto, posiblemente, el último dígito, el cual puede ser aproximado si el número fue redondeado). Si a contiene k lugares decimales (es decir, k dígitos a la derecha del punto decimal), entonces se dice que x tiene $k + 1$ dígitos significativos. Según esta convención,

$$2.0285 \times 10^{23}$$

tiene cinco dígitos significativos y

$$9.30 \times 10^{-20}$$

tiene tres dígitos significativos.

EJEMPLO 4

Un año luz es la distancia recorrida por la luz en un año de la Tierra (365.25 días). La velocidad de la luz es 3.00×10^5 kilómetros por segundo (exacto para tres dígitos significativos). Halle la distancia de un año luz en kilómetros.

Solución. Para determinar la distancia de un año luz en kilómetros multiplicamos la velocidad de la luz en kilómetros por segundo por el número de segundos en un año de la Tierra. Primero hacemos la conversión de un año de la Tierra a segundos:

$$1 \text{ año de la Tierra} \approx 365.25 \text{ días} \times 24 \frac{\text{horas}}{\text{días}} \times 60 \frac{\text{minutos}}{\text{hora}} \times 60 \frac{\text{segundos}}{\text{minuto}}$$

Entonces, la distancia de un año luz en kilómetros está dada por

$$3.00 \times 10^5 \times 365.25 \times 24 \times 60 \times 60 \approx 9.47 \times 10^{12} \text{ km}$$

EJERCICIO 1.3

Supongamos que a través de todo el ejercicio todas las variables son diferentes de cero.

En los problemas 1 al 4, escriba la expresión con exponentes positivos.

1. $\dfrac{1}{6 \cdot 6 \cdot 6}$ **2.** $4 \cdot 4 \cdot 4$

3. $5y \cdot 5y \cdot 5y \cdot 5y$ **4.** $1/t \cdot 1/t$

En los problemas 5 al 8, escriba la expresión con exponentes negativos.

5. $(1/z)^2$ **6.** $1/4^5$

7. $\dfrac{2x^2}{y^3}$ **8.** $3/z^4$

En los problemas 9 al 14, resuelva las potencias indicadas

9. (a) 2^4; **(b)** 2^{-4}; **(c)** -2^4

10. (a) $(-2/3)^5$; **(b)** $(-2/3)^{-5}$; **(c)** $-(-2/3)^5$

11. (a) $(-1)^{-1}$; **(b)** $(1)^{-1}$; **(c)** $-(-1)^{-1}$

12. (a) 5^0; **(b)** $(-5)^0$; **(c)** -5^0

13. (a) $(3/5)^3$; **(b)** $(-3/5)^{-3}$; **(c)** $(3/5)^{-3}$

14. (a) $(-9)^2$; **(b)** $(-9)^{-2}$; **(c)** $-(9)^{-2}$

En los problemas 15 al 20, evalúe la expresión.

15. $\dfrac{2^{-2}}{3^{-3}}$ **16.** $\dfrac{3^{-1}4^{-1}}{3^{-1}+3^{-1}}$

17. $\dfrac{0^1}{1^0}$ **18.** $2^{-1}-2^1$

19. $\dfrac{(-2)^5-3^6}{(-2)^7}$ **20.** $\dfrac{(7-7)^0}{7^0}$

En los problemas 21 al 26, encuentre el valor de la expresión si $a = 2$, $b = -3$ y $c = -1$.

21. $a^{-1}b^{-1}c^{-1}$

22. $-3ab+2c^2$

23. $ab^{-1}+ca^{-1}$

24. $ab^2+4bc^2+ca^2$

25. Verifique que $ab^2-c^3=19$

26. Verifique que la tercera parte de $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}$ es $-5/18$

En los problemas 27 al 45, simplifique y elimine cualquier exponente negativo.

27. a^8a^{-5} **28.** $(5x)^2$

29. $3^{14}\times 3^6$ **30.** $\dfrac{35y^8x^5}{-21y^{-1}x^9}$

31. $\dfrac{s^9t^{-2}}{s^3}$ **32.** $(-5x^2y^3)(3xy^{-2})$

33. $\dfrac{4^3}{4^{-2}}$ **34.** $(s^2)^3$

35. $(x^4)^{-5}$ **36.** $\dfrac{10^{-7}}{10^4}$

37. $(-2x)^3$ **38.** $(7x^4)(-3x^2)$

39. $\dfrac{(7a^2b^3)^2}{a^3b^5}$ **40.** $(-x^2y^4)^3(x^3y^{-1})^2$

41. $(-3xy^5)^2(x^3y)^{-1}$ **42.** $(5x^2y^3)^{-2}$

43. $(a^5b^{-4}/b^2)^{-1}$ **44.** $\dfrac{(3abc)^3}{(2a^{-1}b^{-1}c)^2}$

45. $(m^6n^6/n^{-4})^2$

46. Sea $m < t$, entonces $\dfrac{2k^m}{6k^t}$ se puede expresar como: ____.

47. Si al simplificar $\dfrac{3x^a}{9x^b}$ se tiene 1/3, ¿cuál es el valor de a, b?

48. Si al simplificar $10t^2/15t^{b-1}$, se tiene $\dfrac{2}{3}t$, ¿cuál es la relación entre a y b?

49. Si al simplificar la expresión $3w^x/w^y, x > y$ se tiene $3w^a$, ¿a qué conjunto numérico pertenece a?

50. Si al simplificar la expresión $6p^n/3p^4$ se tiene $2/p^3$, ¿cuál es el valor numérico de n?

En los problemas 51 al 56, determine si el número dado es positivo o negativo.

51. $[-10-10]^{-10+10}$ **52.** $(-3)^{-2}(2^{-4})$

53. $[8^{-5}(-8)^5(-8)^{-5}]^2$ **54.** $(-1)^{-1}(-1)^0(-1)$

55. $[\pi^2\pi^3\pi^4]^{-1}$ **56.** $[(-1)^{-2}]^{-3}$

En los problemas 57 al 62, escriba una fórmula para la cantidad dada usando exponentes.

57. El área A de un círculo es π veces el cuadrado del radio r.

58. El volumen v de una esfera es $4/3\ \pi$ veces el cubo del radio r.

59. El área A de un cuadrado es el cuadrado de la longitud s de un lado.

60. El volumen v de un cubo es el cubo de la longitud s de una arista.

61. El área A de un triángulo equilátero es $\sqrt{3}/4$ veces el cuadrado de la longitud s de un lado.

62. El volumen v de un cilindro circular recto es π veces el cuadrado del radio r veces la altura h.

En los problemas 63 al 68, exprese cada una de las frases como igualdades algebraicas.

63. La suma de tres números pares consecutivos es 180.

64. La suma de un número y la tercera parte de ese número es 47.

65. Una motocicleta que va a t millas por hora recorre 258 millas en 31/2 horas.

66. El 12% de un número sumado a ese número es 9.41.

67. Un círculo de z centímetros de radio tiene un área de 64π centímetros cuadrados.

68. La suma de dos números impares consecutivos es 224.

En los problemas 69 al 71, escriba los números dados en notación científica.

69. **(a)** 341,000,000; **(b)** 0.00341

70. **(a)** 825,600; **(b)** 0.0008256

71. **(a)** 1,050,000; **(b)** 0.0000105

En los problemas 72 al 74, escriba los números dados en forma decimal.

72. **(a)** 9.87×10^{-7}; **(b)** 9.87×10^{5}

73. **(a)** 3.25×10^{7}; **(b)** 3.25×10^{-5}

74. **(a)** 4.02×10^{10}; **(b)** 4.02×10^{-4}

En los problemas 75 al 78, use calculadora para realizar la operación. Escriba la respuesta en notación científica usando cinco dígitos significativos.

75. $(0.90324)(0.0005432)$ **76.** $\dfrac{0.143}{15000}$

77. $(2.75\times10^{2})(4.0\times10^{8})$ **78.** $\dfrac{8.25\times10^{-12}}{3.01\times10^{12}}$

En los problemas 79 al 81, halle el valor de la expresión dada sin ayuda de la calculadora. Escriba la respuesta (a) en forma decimal y (b) en notación científica.

79. $(3000)^2(200{,}000)^3(0.0000000001)$

80. $\left[(1{,}000{,}000)^{-1}(0.00001)\right]^{-1}$

81. $\dfrac{(80{,}000)^2}{(2{,}000{,}000)(0.0001)^4}$

En los problemas 82 al 84, exprese en notación científica.

82. El número de centímetros en 285.3 metros.

83. El número de milímetros en dos yardas (una yarda = 36 pulgadas).

84. El número de gramos en 5.1×10^{3} libras.

En los problemas 85 al 88, responda falso o verdadero.

85. $(-1/x)^{-1} = x, x \neq 0$. ____

86. $x^{-n} \leq 0$, para todos los números reales x. ____

87. $(x+y)^2 = x^2 + y^2$. ____

88. Si n es par, $x^n \geq 0$ para todos los números reales x. ____

89. Mediante (v) de las leyes de los exponentes, si $x \neq 0$, entonces, ¿a qué es igual x^n/x^n? Sin embargo, ¿a qué es igual cualquier número diferente de cero dividido por sí mismo? Use la respuesta a estas dos preguntas para explicar el raciocinio que se halla en la definición $x^0 = 1$ para cualquier base x diferente de cero.

90. El Pioneer 10, una sonda del espacio profundo, se demoró 21 meses para viajar de Marte a Júpiter. Si la distancia de Marte a Júpiter es de 998 millones de kilómetros, halle la velocidad promedio del Pioneer 10 en kilómetros por hora (suponga que hay 30.4 días en un mes).

91. Los futuros computadores podrían ser fotónicos (es decir, que operan mediante señales de luz) más que electrónicos. La velocidad de la luz (3×10^{10} cm/s) será un factor limitante para el tamaño y la velocidad de tales computadores. Suponga que una señal debe ir de un elemento de un computador fotónico a otro en un nanosegundo (1×10^{-9} seg); ¿cuál es la distancia máxima posible entre estos dos computadores? [*Sugerencia:* ¿Qué tan lejos viaja la luz en un nanosegundo? Dé su repuesta (a) en centímetros y (b) en pulgadas (1 pulgada = 2.5 cm)].

92. En 1985 el déficit del presupuesto federal de los EE.UU. fue de US$211,900 millones. Escriba este número (a) en forma decimal y (b) en notación científica.

93. La capacidad de almacenamiento de un computador se describe en kilobytes, donde 1k representa un kilobyte (o aproximadamente 1000 bytes) de memoria. Si se requiere un byte para representar un solo símbolo como una letra, un número, un signo de puntuación, ¿aproximadamente cuántos símbolos es capaz de almacenar un computador de 512 k? Dé la respuesta (a) en forma decimal (b) en notación científica.

1.4 Radicales

Muchos problemas simples en ciencia, negocios o ingeniería conducen a planteamientos tales como $s^2 = 25$ o $x^3 = 64$. Los valores para s o x se llaman **raíces.** En particular, si $s^2 = 25$, entonces a s se llama la **raíz cuadrada** de 25; para $x^3 = 64$, decimos que x es la **raíz cúbica** de 64.

En general, las raíces de los números reales se definen por el enunciado

$$\sqrt[n]{x} = r \quad \text{si y sólo si} \quad r^n = x$$

donde x y r son números reales no negativos y n es un entero positivo, o x y r son números reales negativos y n es un número entero positivo impar. Al número $\sqrt[n]{x}$ se lo denomina **la raíz enésima principal** de x.

La expresión $\sqrt[n]{x}$ se llama **radical;** el número n es el **índice** del radical y x se llama **radicando.** El símbolo $\sqrt{}$ se llama **signo radical.** Si el índice n es 2, normalmente se omite del radical.

Si n es impar, se puede demostrar que para cualquier valor de x hay exactamente una raíz enésima real de x. Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{125} = 5 \quad \text{y} \quad \sqrt[5]{-32} = -2$$

Si n es par y x es positivo, entonces hay dos raíces reales enésimas de x. Sin embargo, el símbolo $\sqrt[n]{x}$, se reserva para la raíz enésima positiva (principal); denotamos la raíz enésima negativa por $-\sqrt[n]{x}$. Así, por ejemplo:

$$\sqrt{4} = 2 \quad \text{y} \quad -\sqrt{4} = -2,$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad -\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = -\frac{1}{3}$$

Si n es par y x es negativo, no hay raíz enésima real de x*.

EJEMPLO 1

Halle (a) $\sqrt{100}$; **(b)** $\sqrt[3]{-64}$; **(c)** $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$

Solución

(a) $\sqrt{100} = 10$, puesto que $10^2 = 100$

(b) $\sqrt[3]{-64} = -4$, puesto que $(-4)^3 = -64$

(c) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{2}{3}$, puesto que $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{16}{81}$

LEYES DE LOS RADICALES

Las siguientes propiedades se pueden usar frecuentemente para simplificar expresiones que contengan radicales.

Leyes de los radicales

Sean m y n enteros positivos y x y y números reales. Entonces,

(i) $(\sqrt[n]{x})^n = x$

(ii) $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & \text{si } n \text{ es impar} \\ |x|, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

(iii) $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

(iv) $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

(v) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

siempre y cuando los radicales representen números reales.

---

* Una raíz par de un número negativo, por ejemplo, $\sqrt{-5}$, se llama número complejo. Los números complejos se introducen en la sección 2.4.

Cada una de estas leyes se ilustra en el siguiente ejemplo·

EJEMPLO 2

Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

(a) $\sqrt[3]{27y^6}$

(b) $\sqrt{\dfrac{x^2}{25}}$

(c) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{x^{21}}}$

(d) $\sqrt[3]{81a^3b^5c^6}$

(e) $(\sqrt[5]{r}\sqrt[5]{s})^5$

Solución

(a) $\sqrt[3]{27y^6} \overset{\boxed{\text{Por (iii)}}}{=} \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{y^6} \overset{\boxed{\text{Por (ii)}}}{=} \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{(y^2)^3} = 3y^2$

(b) $\sqrt{\dfrac{x^2}{25}} \overset{\boxed{\text{Por (iv)}}}{=} \dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{25}} \overset{\boxed{\text{Por (ii)}}}{=} \dfrac{|x|}{5}$

(c) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{x^{21}}} \overset{\boxed{\text{Por (v)}}}{=} \sqrt[21]{x^{21}} \overset{\boxed{\text{Por (ii)}}}{=} x$

(d) $\sqrt[3]{81a^3b^5c^6} = \sqrt[3]{(27a^3b^3c^6)3b^2} = \sqrt[3]{(3abc^2)^3 3b^2}$

$$\overset{\boxed{\text{Por (iii)}}}{=} \sqrt[3]{(3abc^2)^3}\sqrt[3]{3b^2} \overset{\boxed{\text{Por (ii)}}}{=} 3abc^2\sqrt[3]{3b^2}$$

(e) $(\sqrt[5]{r}\sqrt[5]{s})^5 \overset{\boxed{\text{Por(iii)}}}{=} (\sqrt[5]{rs})^5 \overset{\boxed{\text{Por (i)}}}{=} rs$

Las leyes de los radicales (iii) − (v) se pueden verificar usando las leyes de los exponentes que se trataron en la sección 1.3. Por ejemplo, para probar (iii) tenemos que

$$a = \sqrt[n]{x} \quad \text{y} \quad b = \sqrt[n]{y} \tag{4}$$

Entonces,
$$a^n = x \quad \text{y} \quad b^n = y$$

Así,
$$xy = a^nb^n = (ab)^n$$

que puede escribirse en forma de radical como

$$\sqrt[n]{xy} = ab \tag{5}$$

Combinando (4) y (5), obtenemos

$$\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = ab = \sqrt[n]{xy}$$

Nota de advertencia: es error común simplificar $\sqrt{x^2}$ como x; esto es válido solamente para x no negativa. Por ejemplo, si $x = -3$, vemos que

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$$

El resultado correcto lo da (ii) de las leyes de los radicales:

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

EJEMPLO 3

Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

(a) $\sqrt[3]{2x^2y^3}\sqrt[3]{4xz^3}$

(b) $\dfrac{\sqrt[4]{32a^{10}b^{16}}}{\sqrt[4]{2a^2}}$

Solución. (Dé una razón para cada una de las igualdades que aparecen a continuación).

(a) $\sqrt[3]{2x^2y^3}\sqrt[3]{4xz^3} = \sqrt[3]{8x^3y^3z^3} = \sqrt[3]{(2xyz)^3} = 2xyz$

(b) $\dfrac{\sqrt[4]{32a^{10}b^{16}}}{\sqrt[4]{2a^2}} = \sqrt[4]{16a^8b^{16}} = \sqrt[4]{(2a^2b^4)^4} = 2a^2b^4$

Como acabamos de ver, las leyes de los radicales (iii) y (iv) nos permiten simplificar los productos y cocientes de los radicales que tienen el mismo índice. Con frecuencia podemos simplificar sumas y diferencias de radicales que tienen el mismo índice mediante el uso de las leyes distributivas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4

Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

(a) $\sqrt{10} - \sqrt{40x^4} + \sqrt{90x^4y^8}$

(b) $\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{x^4y^3}$

Solución

(a) $\sqrt{10} - \sqrt{40x^4} + \sqrt{90x^4y^8} = \sqrt{10} - 2x^2\sqrt{10} + 3x^2y^4\sqrt{10}$
$= \sqrt{10}(1 - 2x^2 + 3x^2y^4)$

(b) $\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{x^4y^3} = 2x\sqrt[3]{x} + xy\sqrt[3]{x}$
$= x\sqrt[3]{x}(2 + y)$

RACIONALIZACION DE RADICALES

Cuando quitamos los radicales del numerador o del denominador de un fraccionario, decimos que estamos **racionalizando.** En álgebra, normalmente racionalizamos el denominador pero, en cálculo, a veces es importante racionalizar el numerador. El procedimiento de racionalización implica la multiplicación del fraccionario por 1, escrito en forma especial. Por ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \overbrace{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}^{1} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

EJEMPLO 5

Racionalice el denominador de cada una de las siguientes expresiones:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Solución

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(b) Ya que $\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2$, multiplicamos así:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

Nota de advertencia: en el ejemplo 5(*b*), sería incorrecto tratar de racionalizar $1/\sqrt[3]{2}$ multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2})^2} \neq \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

Si un fraccionario contiene una expresión como $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, usamos el hecho de que el producto de $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ y su conjugada $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ no contiene radicales:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})\\ &= \sqrt{x}\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}\sqrt{x} - \sqrt{y}\sqrt{y}\\ &= (\sqrt{x})^2 - \sqrt{xy} + \sqrt{xy} - (\sqrt{y})^2\\ &= x - y\end{aligned}$$

El procedimiento se ilustra en los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 6

Racionalice el denominador de la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Solución. Para eliminar los radicales del denominador, multiplicamos la expresión dada por

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Así, $$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}$$

EJEMPLO 7

Elimine los radicales en el numerador de

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

Solución. Ya que la conjugada del numerador es $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$, procedemos así:

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$=\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

El método de racionalización que se ilustra en el ejemplo 7 ocurre con frecuencia en cálculo.

EJEMPLO 8

En las futuras estaciones espaciales se podrá crear la gravedad artificial mediante la rotación de la estación como una centrífuga gigantesca, rotación que producirá una fuerza contra los astronautas a bordo, que no se podrá distinguir de la gravedad. El promedio de rotación N, medido en rotaciones por segundo que se necesita para producir una aceleración de a m/s^2 en un punto a r metros (m) del centro de rotación está dado por

$$N=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{r}}$$

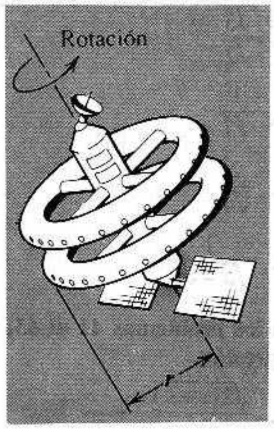


FIGURA 12

(Véase figura 12). Si el radio de la estación es de 150 metros, calcule el promedio de rotación necesario para producir el equivalente de la gravedad de la Tierra. (La aceleración debida a la gravedad en la Tierra es 9.8 m/s^2).

Solución. Identificamos a $a = 9.8$ y a $r = 150$ y obtenemos

$$N=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.8}{150}}$$

Al usar las teclas $\boxed{\sqrt{\ }}$ y $\boxed{\pi}$ en una calculadora, encontramos que

$$N \approx 0.04$$

Por tanto, se requieren aproximadamente 0.04 rotaciones por segundo (o su equivalente, 2.4 rotaciones por minuto) para producir el equivalente de la gravedad de la Tierra.

EJERCICIO 1.4

En todos los ejercicios suponga que todas las variables son positivas.

En los problemas 1 al 32, halle el valor numérico del radical.

1. $\sqrt[3]{-64}$
2. $\sqrt[5]{100,000}$
3. $\sqrt[4]{0.0001}$
4. $\sqrt[4]{1/9}\sqrt[4]{1/9}$
5. $\sqrt[5]{1024}$
6. $\sqrt[3]{-64/27}$
7. $\sqrt{1/x^2y^4}$
8. $\sqrt[3]{-1000/27}$
9. $\sqrt{10a^2/bc^4}$
10. $\sqrt[4]{x^4y^{16}/16z^8}$
11. $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$
12. $\sqrt{8x^2yz^2}\sqrt{yzw}\sqrt{2zw^3}$
13. $\dfrac{\sqrt{216}}{\sqrt{6}}$
14. $\sqrt{0.25x^4}\sqrt{z^4}$
15. $\sqrt{8a^3b^0}\sqrt{2a^5b}$
16. $\sqrt[3]{x^3y^6/z^9}$

17. $\sqrt[4]{16x^5}\sqrt[4]{2x^3y^4}$

18. $\sqrt{\sqrt{0.0016}}$

19. $\dfrac{\sqrt{8ab^2}}{\sqrt{64a}\sqrt{8b^4}}$

20. $\left(-\sqrt{xyz^5}\right)^2$

21. $\left(-\sqrt[3]{-27x/xy^3}\right)^3$

22. $\sqrt{6x/5y}\sqrt{9y^4/10x^2}$

23. $\sqrt[3]{-\left(p^{-1}q^2\right)^3}$

24. $\sqrt[3]{\sqrt{a^6b^{12}}}$

25. $\sqrt{-16x^2/-8x^{-2}}$

26. $\sqrt{2\sqrt{4}}$

27. $\sqrt[4]{\left(-9a^2s^8\right)^2}$

28. $\sqrt{x^3\sqrt{\left(x^2y\right)^2}}$

29. $\dfrac{\sqrt{50a^{-4}y^5}}{\sqrt{3ay^{-2}}}$

30. $\sqrt[3]{(-2t)^3/-w^6}$

31. $\sqrt{(-abc)^2}$

32. $\dfrac{\sqrt[3]{8xy}\sqrt[3]{4xy^2}}{\sqrt[3]{x^2z^3}}$

En los problemas 33 al 40, racionalice el denominador de la expresión.

33. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

34. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

35. $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

36. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

37. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$

38. $\dfrac{5}{\sqrt[3]{t-2}}$

39. $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

40. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2ab}}$

En los problemas 41 al 43, racionalice el numerador de la expresión.

41. $\dfrac{\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x}}{h}$

42. $\dfrac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}$

43. $\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{t+u}}-\dfrac{2}{\sqrt{t}}}{u}$

[*Sugerencia:* Primero combine los términos en el numerador].

En los problemas 44 al 54, pruebe que:

44. $2/5\sqrt{50a^2}=2a\sqrt{2}$ (Suponga que $a\ge 0$)

45. $\dfrac{2\sqrt{24x^3}}{\sqrt{(3x)}}=4x\sqrt{2}\,(x>0)$

46. $5\sqrt{8}-3\sqrt{18}=\sqrt{2}$

47. $3\sqrt[3]{16t^3}+8\sqrt[3]{t^3/4}=10t\sqrt[3]{2}$

48. $2\sqrt{150}-4\sqrt{54}+6\sqrt{48}=24\sqrt{3}-2\sqrt{6}$

49. $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)=8$

50. $2\sqrt{54}-6\sqrt{2/3}-\sqrt{96}=0$

51. $5\sqrt{2}-3\sqrt{50}+7\sqrt{288}=74\sqrt{2}$

52. $\sqrt{16a^3-48a^2b}=4a\sqrt{a-3b}$ $(a\ge 0)$

53. $\sqrt{48x^5}\sqrt{3x^3}=12x^4$

54. $\sqrt[n]{x^{n+1}y^{2n-1}z^{3n}}=xy^2z^3\sqrt[n]{x/y}$

En los problemas 55 al 59, combine los radicales y simplifique.

55. $4\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}$

56. $3\sqrt{8x^3}-\sqrt{18xy^2}+\sqrt{32x^5}$

57. $\sqrt[3]{x^4yz}-\sqrt[3]{xy^4z}+\sqrt[3]{xyz^4}$

58. $\sqrt[3]{x/y}-\sqrt[3]{x/y^2}-\sqrt[3]{xy/y^2}$

59. $\sqrt{2}-\sqrt{8}+\sqrt{16}$

En los problemas 60 al 62, escriba una fórmula para la cantidad que se da. Use notación radical.

60. La longitud s de la arista de un cubo es la raíz cúbica del volumen v.

61. La longitud c de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las longitudes a y b de los otros dos lados.

62. La velocidad v de un satélite en una órbita circular alrededor de la tierra es igual a la raíz cuadrada del producto del radio r de la órbita y la aceleración de caída libre g en la órbita.

63. Si un satélite da vueltas alrededor de la tierra en una órbita circular de radio $r=6.70\times10^6\,m$, halle su velocidad v si $v=R\sqrt{g/r}$, donde R es el radio de la tierra y g es la aceleración de caída libre debida a la gravedad, en la superficie de la tierra (véase figura 13). Use los valores $R=6.40\times10^6\,m$ y $g=9.8\,m/s^2$.

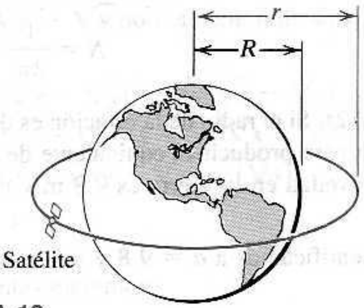


FIGURA 13

64. De acuerdo con la teoría de la relatividad de Einstein, la masa m de un objeto que se mueve a velocidad v es dada por $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ donde m_0 es la masa del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz. Halle la masa de un electrón que viaja a la velocidad de 0.6c si su masa en reposo es 9.1×10^{-31} kg.

En los problemas 65 al 70, responda falso o verdadero.

65. $\sqrt{2x+y}=\sqrt{2x}+\sqrt{y}$ para $x, y\ge 0$. _____

66. $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, para cualquier número real a. _____

67. Si n es par, $\sqrt[n]{x}$ es definida para cualquier número real x. _____

68. $5\sqrt{a^2/b^2}=5|a/b|$ para cualquiera de los números reales a y b, $b\ne 0$. _____

69. Si n es impar, $4\sqrt[n]{t}$ es definida para cualquier número real t. _____

70. $\sqrt{x^2}=x$, para cualquier número real x. _____

1.5 Exponentes racionales

El concepto de la raíz enésima de un número nos capacita para ampliar la definición de x^n de exponentes enteros a exponentes racionales; y, como veremos, con frecuencia es más fácil trabajar con **exponentes racionales** *que con radicales.*

Para cualquier número real x y para cualquier entero positivo n, definimos

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

dado que $\sqrt[n]{x}$ sea un número real. Así, $x^{1/n}$ es simplemente otra forma de designar la raíz enésima principal de x. Además, definimos

$$x^{m/n} = (x^{1/n})^m$$

para cualquier entero m tal que m/n sea la mínima expresión. Se necesita esta última definición si la ley de exponentes $(x^r)^s = x^{rs}$ va a aplicarse a exponentes racionales.

EJEMPLO 1

(a) $(25)^{1/2} = \sqrt{25} = 5$
(b) $(64)^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4$

EJEMPLO 2

(a) $(0.09)^{5/2} = [(0.09)^{1/2}]^5 = (\sqrt{0.09})^5$
$= (0.3)^5 = 0.00243$
(b) $(-27)^{-5/3} = [(-27)^{1/3}]^{-5} = [\sqrt[3]{-27}]^{-5}$
$= (-3)^{-5} = -\dfrac{1}{243}$

Para $x > 0$, se puede demostrar que

$$(x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m = x^{m/n}$$

Sin embargo, para $x < 0$ y ciertas opciones de m y n, $x^{1/n}$ no es un número real y, en consecuencia, $(x^{1/n})^m$ no está definida, aunque la expresión $(x^m)^{1/n}$ podría estar definida.

De otra parte, si $x^{m/n}$, $(x^{1/n})^m$ y $(x^m)^{1/n}$ cada uno representa un número real, entonces todos son iguales. Como lo demuestra el siguiente ejemplo, cuando estas tres formas son iguales, una de ellas puede ser más útil que las otras dos al evaluar ciertas expresiones.

EJEMPLO 3

Aunque $(125)^{2/3} = ((125)^{1/3})^2 = ((125)^2)^{1/3}$, la evaluación de

$$((125)^{1/3})^2 = (\sqrt[3]{125})^2 = 5^2 = 25$$

se puede hacer mentalmente, mientras que

$((125)^2)^{1/3} = (15{,}625)^{1/3} = \sqrt[3]{15{,}625} = 25$

podría necesitar el uso de la calculadora

El siguiente ejemplo ilustra un caso en el cual $x^{m/n}$, $(x^m)^{1/n}$, y $(x^{1/n})^m$ no son equivalentes.

EJEMPLO 4

Compare (a) $x^{m/n}$, (b) $(x^m)^{1/n}$, y (c) $(x^{1/n})^m$ para $x = -9$, $m = 2$ y $n = 2$

Solución. Al sustituir $x = -9$, $m = 2$ y $n = 2$, encontramos que:

(a) $x^{m/n} = (-9)^{2/2} = (-9)^1 = -9$
(b) $(x^m)^{1/n} = [(-9)^2]^{1/2} = 81^{1/2} = 9$
(c) $(x^{1/n})^m = [(-9)^{1/2}]^2 = (\sqrt{-9})^2$, que no es un número real, ya que contiene la raíz cuadrada de un número negativo.

LEYES DE LOS EXPONENTES

Las leyes de los exponentes que se dieron para los exponentes enteros en la sección 1.3 también son verdaderas para los exponentes racionales.

Leyes de los exponentes racionales

Sean x y y números reales y s y r números racionales. Entonces,

(i) $x^r x^s = x^{r+s}$
(ii) $(x^r)^s = x^{rs} = (x^s)^r$
(iii) $(xy)^r = x^r y^r$
(iv) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$
(v) $\dfrac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$

partiendo de que todas las expresiones representan números reales.

Como se muestra en los ejemplos siguientes, estas leyes nos permiten simplificar expresiones algebraicas. Para el resto de esta sección consideramos que todas las bases variables representan números positivos, de modo que todas las potencias racionales están definidas.

EJEMPLO 5

$$\text{(a)}\ (3x^{1/2})(2x^{1/5}) = 3(2)x^{1/2}x^{1/5} \overset{\boxed{\text{Por(i)}}}{=} 6x^{1/2+1/5}$$
$$= 6x^{(5+2)/10} = 6x^{7/10}$$

(b) $$(a^2b^{-8})^{1/4} \overset{\boxed{\text{Por(iii)}}}{=} (a^2)^{1/4}(b^{-8})^{1/4} \overset{\boxed{\text{Por(ii)}}}{=} a^{2/4}b^{-8/4} = a^{1/2}b^{-2} = \frac{a^{1/2}}{b^2}$$

(c) $$\frac{x^{2/3}y^{1/2}}{x^{1/4}y^{3/2}} \overset{\boxed{\text{Por(v)}}}{=} x^{2/3-1/4}y^{1/2-3/2} = x^{(8-3)/12}y^{-1} = \frac{x^{5/12}}{y}$$

(d) $$\left(\frac{3x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3 \overset{\boxed{\text{Por(iv)}}}{=} \frac{(3x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3} \overset{\boxed{\text{Por(iii)}}}{=} \frac{3^3(x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3} \overset{\boxed{\text{Por(ii)}}}{=} \frac{27x^{9/4}}{y}$$

EJEMPLO 6

Simplifique

$$\left(\frac{5r^{3/4}}{s^{1/3}}\right)^2\left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right)$$

Solución

$$\left(\frac{5r^{3/4}}{s^{1/3}}\right)^2\left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right) = \left(\frac{25r^{3/2}}{s^{2/3}}\right)\left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right) = \left(\frac{50r^0}{s^{7/6}}\right) = \frac{50}{s^{7/6}}$$

Como veremos en los dos ejemplos siguientes, se pueden simplificar ciertas expresiones radicales más fácilmente si se vuelven a escribir usando exponentes racionales.

EJEMPLO 7

Escriba $\sqrt{x\sqrt[4]{x}}$ como un solo radical.

Solución. Volvemos a escribir $\sqrt{x\sqrt[4]{x}}$ usando exponentes racionales y luego simplificamos:

$$\sqrt{x\sqrt[4]{x}} = (x\sqrt[4]{x})^{1/2} = (x \cdot x^{1/4})^{1/2}$$
$$= (x^{5/4})^{1/2} = x^{5/8} = \sqrt[8]{x^5}$$

EJEMPLO 8

Escriba $\sqrt[3]{16}/\sqrt{2}$ como un solo radical.

Solución. Volvemos a escribir la expresión usando exponentes racionales:

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2}} = \frac{16^{1/3}}{2^{1/2}}$$

Luego, debemos encontrar una base común para que podamos usar las propiedades de los exponentes racionales para simplificar la expresión. Ya que $16 = 2^4$, tenemos

$$\frac{16^{1/3}}{2^{1/2}} = \frac{(2^4)^{1/3}}{2^{1/2}} = \frac{2^{4/3}}{2^{1/2}} = 2^{4/3-1/2} = 2^{5/6}$$
$$= \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$$

EJEMPLO 9

Simplificar $(8{,}000{,}000)^{2/3}(\sqrt[4]{0.0001r^8t^{12}})$.

Solución. Escribimos los números en notación científica y usamos las leyes de los exponentes:

$$\begin{aligned}(8{,}000{,}000)^{2/3}\sqrt[4]{0.0001r^8t^{12}} &= (8 \times 10^6)^{2/3}(1 \times 10^{-4} \cdot r^8t^{12})^{1/4}\\ &= 8^{2/3}(10^6)^{2/3}(10^{-4})^{1/4}(r^8)^{1/4}(t^{12})^{1/4}\\ &= (\sqrt[3]{8})^2(10^4)(10^{-1})r^2t^3\\ &= (4 \times 10^3)r^2t^3\\ &= 4000r^2t^3\end{aligned}$$

EJEMPLO 10

Supongamos que parte de una propiedad costaba p dólares hace n años. Si ahora cuesta q dólares, entonces el promedio de la tasa de inflación anual r es dado por

$$r = \left(\frac{q}{p}\right)^{1/n} - 1$$

Halle el promedio de la tasa de inflación anual para una casa que ahora vale US$500,000 si hace 12 años se compró por US$80,000.

Solución. Primero identificamos $p = 80{,}000$, $q = 500{,}000$ y $n = 12$. Al sustituir, entonces obtenemos:

$$r = \left(\frac{500{,}000}{80{,}000}\right)^{1/12} - 1$$
$$= 6.25^{1/12} - 1$$

Al usar la tecla $\boxed{y^x}$ en una calculadora con $y = 6.25$ y $x = 1/12$, encontramos

$$r \approx 0.165$$

Por tanto, el promedio de la tasa de inflación anual para esta propiedad ha sido 16.5%

En la sección 5.1 indicaremos cómo se pueden definir las expresiones con exponentes irracionales tales como $x^{\sqrt{2}}$ o x^{π}. Las leyes de los exponentes también se pueden aplicar a los exponentes irracionales.

EJERCICIO 1.5

Para todos los ejercicios siguientes suponga que todas las variables son positivas.

En los problemas 1 al 7, vuelva a escribir la expresión usando exponentes racionales.

1. $\sqrt[3]{27xy}$ **2.** $\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^4}$

3. $\sqrt[5]{8t}$ **4.** $\sqrt{x+\sqrt{x}}$

5. $6\sqrt[3]{u^2+t^2}$ **6.** $\sqrt{x^2-y^2}$

7. $\dfrac{3}{\left(\sqrt[4]{p}\right)^3}$

En los problemas 8 al 13, vuelva a escribir la expresión usando notación radical.

8. $a^{3/5}$ **9.** $3+a^{2/3}$

10. $(5x)^{-3/2}$ **11.** $3/a^{2/3}$

12. $(5+u)^{2/3}$ **13.** $2a^{1/3}$

En los problemas 14 al 17, encuentre los números indicados.

14. (a) $(49)^{1/2}$; **(b)** $(49)^{-1/2}$

15. (a) $(1/64)^{2/3}$; **(b)** $(1/64)^{-2/3}$

16. (a) $(-27)^{1/3}$; **(b)** $(-27)^{-1/3}$

17. (a) $(-81/36)^{3/4}$; **(b)** $(-81/36)^{-3/4}$

En los problemas 18 al 40, simplifique y elimine cualquier exponente negativo.

18. $\left(4x^{1/2}\right)\left(3x^{1/2}\right)$ **19.** $a^{1/8}a^{1/4}a^{1/3}$

20. $\left(2x^{1/2}/z^{-1/6}y^{2/3}\right)^6$ **21.** $\left(32^{-2}x^{5/6}/y^{-5/4}z^{10}\right)^{1/5}$

22. $\left(x^{1/(a-1)}/x^{1/(a+1)}\right)^{1/2}$ **23.** $\left(t^{a+b}/t^a\right)^a\left(t^{b-a}/t^b\right)^{a+b}$

24. $\left(w^{a-2b}/w^{-b}\right)^{a/(a-b)}$ **25.** $\left(y^{a^3\cdot b^3}\right)^{1/(a-b)}$

26. $\left(x^{a+b}/x^b\right)\left(x^{b-a}/x^b\right)^{a-b}$ **27.** $\left(z^{b+2c}/z^c\right)^{b/(b^2-c^2)}$

28. $\left(x^{3c-3k}\right)^{1/(c-k)}$ **29.** $\left(\left(-27a^3b^{-6}\right)^{1/3}\right)^2$

30. $\left(-5x^3\right)\left(x^{5/3}\right)$ **31.** $\left(100x^4\right)^{-3/2}$

32. $\left(-t^{1/3}/t^{-1/3}\right)^{-1}$ **33.** $\left[\left(x^{-2/5}y^{3/10}\right)/x^{1/5}y^{1/2}\right]^{-10}$

34. $\left(a^{-1/3}b^{2/9}c^{1/6}\right)^9/\left(a^{1/6}b^{-2/3}\right)^6$ **35.** $\left(x^2y^2z^6/x^{-4}y^{-4}z^6\right)^{1/6}$

36. $\left(a^2b^4\right)^{1/4}$ **37.** $\left(2a^{1/2}/a^{-3/2}\right)(1/6a)^{-1/2}$

38. $\left(-x^{1/2}y^{1/4}/8x^2y^4\right)^{1/3}$ **39.** $\dfrac{5xy^{1/3}}{x^{1/3}y}$

40. $a^{3/2}\left(4a^{2/3}\right)$

41. Calcule $4x^{-2/3}+3x^{1/3}+2x^0$ para $x=8$

42. Calcule $\dfrac{(-3)^2(-2x)^{-3}}{(x+1)^{-2}}$ para $x=2$

43. Calcule $\dfrac{5x^0}{2^{-3}}$ para $x=6$

44. Calcule $\left(\sqrt{x+y}\right)(x+y)$ para $x=-2$, $y=6$

En los problemas 45 al 48, halle los valores de las letras para los cuales las expresiones dadas tengan sentido real.

45. $\sqrt{x^2}=\left(x^2\right)^{1/2}=x^1=x$

46. $\sqrt{t^2+2t+1}=\sqrt{(t+1)^2}=t+1$

47. $\sqrt{y^4+2y^2+1}=\sqrt{\left(y^2+1\right)^2}=y^2+1$

48. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{(x-1)}{(x-1)^{1/2}}=(x-1)^{1-1/2}=(x-1)^{1/2}=\sqrt{x-1}$

49. Se le preguntó a un estudiante de la universidad w respecto al resultado de la expresión $x+2y+\sqrt{(x-2y)^2}$ para $x=2$, $y=4$. Él hizo lo siguiente: $x+2y+\sqrt{(x-2y)^2}=x+2y+x-2y=2x$, obteniendo el valor $2x=2(2)=4$. ¿Es correcta la respuesta? Explique.

50. Calcule $x^{2/3}+3x^{-1}-2x^0$ para $x=1/8$

51. Calcule $\dfrac{3^0x+4x^{-1}}{x^{-2/3}}$ si $x=8$

En los problemas 52 al 57, vuelva a escribir la expresión como un solo radical.

52. $\sqrt{7\sqrt[3]{2}}$ **53.** $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{4}}$

54. $2\sqrt{t^3\sqrt{t}}$ **55.** $\sqrt[3]{y^2\sqrt{y}/\sqrt[4]{y}}$

56. $\dfrac{\sqrt{x}}{3\sqrt[8]{x}}$ **57.** $\sqrt[3]{4}\sqrt{2}$

En los problemas 58 al 60, use notación científica para simplificar la expresión.

58. $\sqrt{0.000004}\,(8000)^{2/3}\,(100{,}000)^{4/5}$

59. $\dfrac{\sqrt{80{,}000}\sqrt[3]{4000}}{(0.000004)^{3/2}}$

60. $\sqrt[4]{\left(160{,}000a^{8/3}\right)^3}$

61. La velocidad del sonido v medida en pies por segundo a través del aire de temperatura t grados celsius está dada por

$$v=\frac{1{,}087(273+t)^{1/2}}{16.52}$$

Use calculadora para hallar la velocidad del sonido a través del aire cuando la temperatura es de 20 °C.

62. Determine el área de la corona circular, sabiendo que el círculo exterior tiene un radio de 52.50 centímetros y el del círculo interior mide 28.84 centímetros.

63. Un arroyo de corriente rápida puede transportar partículas más grandes que uno de corriente lenta. Los estudios de laboratorio han demostrado que la velocidad crítica v_t del agua que se necesita para que una partícula arranque en la cuenca de un arroyo está dada por la fórmula

$$v_t=0.152\,d^{4/9}(G-1)^{1/2}$$

donde v se mide en metros por segundo, d es el diámetro de la partícula en milímetros, y G es la gravedad específica de la partícula. Halle la velocidad crítica que se necesita para empezar a mover un grano de feldespato que tiene una gravedad específica de 2.56 y un diámetro de 3 mm.

64. El radio r de una esfera con volumen v está dado por $r = (3v/4\pi)^{1/3}$. Use calculadora para hallar el radio de una esfera que tiene de volumen 100 cm^3 (centímetros cúbicos).

En los problemas 65 al 74, responda falso o verdadero. (Suponga que todas las variables representan números positivos.)

65. $x^{2/3}y^{-2/3} = 1.$ ____ **66.** $(t^2+16)^{1/2} = t+4.$ ____

67. $x^{-3/2} = \dfrac{1}{x^{2/3}}.$ ____ **68.** $\left[(-9)^{1/2}\right]^2 = -9.$ ____

69. $\dfrac{p^{1/2}}{p^{-1/2}} = p.$ ____ **70.** $\left[(-9)^2\right]^{1/2} = 9.$ ____

71. $36x^{1/2} = 6\sqrt{x}.$ ____ **72.** $\left[(-1)^{-1}\right]^{-1} = -1.$ ____

73. $(-2)^{-1}(-2)^{-1} = 1/4.$ ____ **74.** $(b^{4/3})^{3/4} = b.$ ____

1.6 Polinomios y productos notables

VARIABLES

Ya hemos encontrado conveniente usar letras tales como x o y para representar números; cada símbolo se llama **variable.** Una **expresión algebraica** es el resultado de llevar a cabo un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o raíces en un grupo de variables y números reales. Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$x^3 - 2x^2 + \sqrt{x} - \pi, \qquad \frac{4xy - x}{x+y}, \qquad \text{y} \qquad \sqrt[3]{\frac{7y-3}{x^5y^{-2}+z}}$$

A veces una expresión algebraica representa un número real solamente para ciertos valores de una variable. Al considerar la expresión $\sqrt{x}$, encontramos que debemos tener $x > 0$ para que $\sqrt{x}$ represente un número real. Cuando trabajamos con expresiones algebraicas, suponemos que las variables son restringidas para que la expresión represente un número real. El conjunto de valores permisibles para la variable se llama el **dominio** de la variable. Así, el dominio de la variable en $\sqrt{x}$ es el conjunto de todos los números reales no negativos $\{x|x \geq 0\}$, y para $3/(x+1)$ el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto $x = -1$; es decir, $\{x|x \neq -1\}$.

Si números específicos se sustituyen por las variables en una expresión algebraica, el número real que resulta se llama **valor** de la expresión. Por ejemplo, el valor de $x^2 + 2y$ cuando $x = 1$ y $y = 2$ es $(1)^2 + 2(2) = 5$.

POLINOMIOS

Ciertas expresiones algebraicas tienen nombres especiales. Un **monomio** en una variable es cualquier expresión algebraica de la forma ax^n, donde a es un número real, x es una variable y n es un entero no negativo. El número a se llama **coeficiente** del monomio y n se llama el **grado.** Por ejemplo, $17x^5$ es un monomio de grado 5 con coeficiente 17. La suma de dos monomios, tal como $6x + 3x^5$, recibe el nombre de **binomio.** Un **polinomio** es cualquier suma finita de monomios. Más formalmente tenemos la siguiente definición.

DEFINICION 4

Un polinomio de grado n en la variable x es cualquier expresión algebraica de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

donde n es un entero no negativo y a_i, $i = 0, 1 \ldots n$ son números reales.

Ya que un polinomio en x representa un número real para cualquier número real x, el dominio de un polinomio es el conjunto de todos los números reales R.

Los monomios a_ix^i en el polinomio se llaman **términos** del polinomio y el coeficiente a_n de la potencia más alta de x se llama **coeficiente principal.** Por ejemplo, $6x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 1$ es un polinomio de grado 5 con coeficiente principal 6. Los términos de este polinomio son $6x^5$, $-7x^3$, $3x^2$ y -1. El número a_0 se llama **término constante** del polinomio. Puede ser 0, como en el polinomio $6x^2 - x$. Si todos los coeficientes de un polinomio son cero, entonces el polinomio se llama **polinomio cero** y se denota con 0.

Los polinomios se pueden clasificar por sus grados, aunque al polinomio cero no se le ha asignado ningún grado. Se usan nombres especiales para describir los polinomios de menor grado, según la lista que aparece en la siguiente tabla.

POLINOMIO	GRADO	FORMA ESTANDAR	EJEMPLO
Constante	0	a_0 $(a_0 \neq 0)$	4
Lineal	1	$a_1x + a_0$ $(a_1 \neq 0)$	$3x - 5$
Cuadrático	2	$a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_2 \neq 0)$	$-\frac{1}{2}x^2 + x - 2$
Cúbico	3	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_3 \neq 0)$	$x^3 - 6x + \sqrt{3}$
Enésimo grado	n	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ $(a_n \neq 0)$	$x^n - 1$

Nota de advertencia: en cada término en un polinomio, el exponente de la variable debe ser un entero no negativo. Por ejemplo:

Entero negativo **No entero**

$$x^{-1} + x - 1 \quad \text{y} \quad x^2 - 2x^{1/2} + 6$$

no son polinomios. Sin embargo,

$$3^{-1}x^2 + 4 \quad \text{y} \quad 0.5x^3 + 6^{1/3}x$$

son polinomios, ya que los coeficientes pueden ser cualesquiera de los números reales.

EJEMPLO 1

Determine cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios. Si la expresión es un polinomio, dé su grado y su coeficiente principal.

(a) $x^2 + \sqrt{x} - 1$
(b) $\sqrt{2} - x + 3x^2 - 17x^8$
(c) $7x^5 - x^2 + \frac{1}{2}x + x^{-2}$
(d) $x^4 - x^2$

Solución. Ya que la variable en cada término debe ser elevada a una potencia entera no negativa, (a) y (c) no son polinomios. Los polinomios en (b) y en (d) son del grado 8 y del grado 4, respectivamente. Al escribir (b) en la forma estándar $-17x^8 + 3x^2 - x + \sqrt{2}$ vemos que el coeficiente principal es -17. Ya que (d) está en la forma estándar, el coeficiente principal es 1.

EL ALGEBRA DE LOS POLINOMIOS

Ya que cada símbolo en un polinomio representa a un número real, podemos usar las propiedades del sistema de los números reales que se analizaron en la sección 1.1 para sumar, restar y multiplicar polinomios.

EJEMPLO 2

Encuentre la suma de los polinomios $x^4 - 3x^2 + 7x - 8$ y $2x^4 + x^2 + 3x$.

Solución. Al reorganizar los términos y al usar las propiedades distributivas, tenemos

$$\begin{aligned}(x^4 - 3x^2 + 7x - 8) + (2x^4 + x^2 + 3x) &= x^4 + 2x^4 - 3x^2 + x^2 + 7x + 3x - 8 \\ &= (1 + 2)x^4 + (-3 + 1)x^2 + (7 + 3)x - 8 \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 10x - 8\end{aligned}$$

El ejemplo 2 indica que podemos sumar dos polinomios en x mediante la suma de los coeficientes de potencias iguales. Algunos estudiantes encuentran que es más fácil sumar polinomios por la alineación de los términos con potencias iguales de x en un formato vertical, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^2 + 7x - 8 \\ \underline{2x^4 + x^2 + 3x} \\ 3x^4 - 2x^2 + 10x - 8 \end{array}$$

La elección del formato por usar es simplemente un asunto de preferencia personal. Generalmente, el formato vertical requiere más espacio; por tanto, después de esta sección, usaremos el formato horizontal.

Como lo muestra el siguiente ejemplo, la resta de polinomios se lleva a cabo de una manera similar a la suma.

EJEMPLO 3

Reste $2x^3 - 3x - 4$ de $x^3 + 5x^2 - 10x + 6$.

Solución. Al restar términos con potencias iguales de x, tenemos

$$\begin{array}{r} x^3 + 5x^2 - 10x + 6 \\ \underline{-(2x^3 - 3x - 4)} \\ -x^3 + 5x^2 - 7x + 10 \end{array}$$

Para llevar a cabo esta resta usando un formato horizontal, procedemos así:

$$\begin{aligned}&(x^3 + 5x^2 - 10x + 6) - (2x^3 - 3x - 4) \\ &\quad = x^3 + 5x^2 - 10x + 6 - 2x^3 + 3x + 4 && \textbf{(Propiedad distributiva)} \\ &\quad = (x^3 - 2x^3) + 5x^2 + (-10x + 3x) + (6 + 4) && \textbf{(Agrupación de términos iguales)} \\ &\quad = -x^3 + 5x^2 - 7x + 10\end{aligned}$$

Nota de advertencia: ¡un error muy común cuando se restan polinomios en forma horizontal es no aplicar la propiedad distributiva. Se debe cambiar el signo de cada término del polinomio que se está restando.

$$\begin{aligned} -(2x^3 - 3x - 4) &= (-1)(2x^3 - 3x - 4) \\ &= (-1)(2x^3) + (-1)(-3x) + (-1)(-4) \\ &= -2x^3 + 3x + 4 \neq -2x^3 - 3x - 4 \end{aligned}$$

Para hallar el **producto** de dos polinomios, usamos las propiedades distributivas y las leyes de los exponentes, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4

Multiplique $x^3 + 3x - 1$ y $2x^2 - 4x + 5$.

Solución

$$\begin{aligned} &(x^3 + 3x - 1)(2x^2 - 4x + 5) \\ &\qquad = (x^3 + 3x - 1)(2x^2) + (x^3 + 3x - 1)(-4x) + (x^3 + 3x - 1)(5) \\ &\qquad = (2x^5 + 6x^3 - 2x^2) + (-4x^4 - 12x^2 + 4x) + (5x^3 + 15x - 5) \end{aligned}$$

Combinando términos semejantes, encontramos el producto

$$2x^5 - 4x^4 + 11x^3 - 14x^2 + 19x - 5$$

Como en el ejemplo 4, cuando se multiplican dos polinomios debemos multiplicar cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio. Se puede usar un formato vertical (con tal que conservemos los términos semejantes alineados), de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rrrrrrl} & & x^3 & & +\ 3x & -\ 1 & \\ & & & 2x^2 & -\ 4x & +\ 5 & \\ \hline & & 5x^3 & & +\ 15x & -\ 5 & \Leftarrow \boxed{5(x^3 + 3x - 1)} \\ & -\ 4x^4 & & -\ 12x^2 & +\ 4x & & \Leftarrow \boxed{-4x(x^3 + 3x - 1)} \\ 2x^5 & & +\ 6x^3 & -\ 2x^2 & & & \Leftarrow \boxed{2x^2(x^3 + 3x - 1)} \\ \hline 2x^5 & -\ 4x^4 & +\ 11x^3 & -\ 14x^2 & +\ 19x & -\ 5 & \end{array}$$

POLINOMIOS CON VARIAS VARIABLES

Hasta ahora hemos considerado polinomios con una variable. Podemos tener polinomios con x o con otras variables, tal como $2y^2 - y + 5$ o $\sqrt{2}\,z^3 - 17$, o con dos o más variables. **Un polinomio con las dos variables x y y** es una suma de monomios (o términos) de la forma $ax^n y^m$, donde a es un número real, x y y son las variables y n y m son enteros no negativos. Ejemplos:

$$5x - 2y, \qquad x^2 + xy - y^2, \qquad 5x^3y + xy^2 - x + \frac{7}{2}$$

Un polinomio con tres o más variables se puede definir de manera similar.

Sumamos, restamos y multiplicamos polinomios de varias variables usando las propiedades de los números reales así como lo hicimos para los polinomios con una variable.

EJEMPLO 5

Sume $xy^3 + x^3y - 3$ y $x^3 - y^3 + 3xy^3 - x^3y$.

Solución

$$\begin{array}{rrrrrl} & & xy^3 + & x^3y & - 3 & \\ x^3 - & y^3 + & 3xy^3 - & x^3y & & \\ \hline x^3 - & y^3 + & 4xy^3 + & 0x^3y & - 3 & = x^3 - y^3 + 4xy^3 - 3 \end{array}$$

EJEMPLO 6

Multiplique $x + y$ y $x^2 - xy + y^2$

Solución

$$\begin{aligned}(x + y)(x^2 - xy + y^2) &= x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2)\\ &= x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3\\ &= x^3 + y^3\end{aligned}$$

Podemos usar el formato vertical alternativamente

$$\begin{array}{rrrrl} & x^2 - & xy & + y^2 & \\ & & x + & y & \\ \hline & x^2y - & xy^2 & + y^3 & \leftarrow \boxed{y(x^2 - xy + y^2)} \\ x^3 - & x^2y + & xy^2 & & \leftarrow \boxed{x(x^2 - xy + y^2)} \\ \hline x^3 + & 0x^2y + & 0xy^2 & + y^3 & = x^3 + y^3 \end{array}$$

Como muestra el ejemplo 6, cuando multiplicamos polinomios con varias variables, es más fácil identificar términos semejantes si seleccionamos un orden para las variables y lo usamos consistentemente en cada término.

La división por un monomio usa las propiedades de las fracciones y las leyes de los exponentes, como se muestra en el ejemplo 7. La división de dos polinomios es más complicada y se trata en el capítulo 4.

EJEMPLO 7

Divida $15xy^3 + 25x^2y^2 - 5xy^2$ por $5xy^2$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{15xy^3 + 25x^2y^2 - 5xy^2}{5xy^2} &= \frac{15xy^3}{5xy^2} + \frac{25x^2y^2}{5xy^2} - \frac{5xy^2}{5xy^2}\\ &= 3y + 5x - 1\end{aligned}$$

PRODUCTOS NOTABLES

Ciertos productos de binomios ocurren tan frecuentemente que se debe aprender a reconocerlos. A continuación se da una lista de estos **productos notables.** Pueden verificarse ejecutando las multiplicaciones indicadas (véanse problemas 89 - 93).

Fórmulas de los productos notables

(i) $(X + Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$
(ii) $(X - Y)^2 = X^2 - 2XY + Y^2$
(iii) $(X + Y)(X - Y) = X^2 - Y^2$
(iv) $(X + Y)^3 = X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$
(v) $(X - Y)^3 = X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - Y^3$
(vi) $(X + Y)(X^2 - XY + Y^2) = X^3 + Y^3$
(vii) $(X - Y)(X^2 + XY + Y^2) = X^3 - Y^3$

En cada uno de estos productos notables, X o Y se pueden remplazar por otra variable, un número o por una expresión más complicada.

EJEMPLO 8

Encuentre cada uno de los siguientes productos.

(a) $(2x + 3)^2$

(b) $\left(4x - \dfrac{1}{x^2}\right)^3$

Solución

(a) A partir de (i) con X remplazada por $2x$ y Y remplazada por 3, tenemos:

$$\begin{aligned}(2x + 3)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(3) + (3)^2\\ &= 4x^2 + 12x + 9\end{aligned}$$

(b) A partir de (v) con X remplazada por $4x$ y Y remplazada por $1/x^2$, tenemos

$$\begin{aligned}\left(4x - \frac{1}{x^2}\right)^3 &= (4x)^3 - 3(4x)^2\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3(4x)\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{x^2}\right)^3\\ &= 64x^3 - 48 + \frac{12}{x^3} - \frac{1}{x^6}\end{aligned}$$

EJEMPLO 9

Podemos aplicar (iii) dos veces al producto

$$\begin{aligned}(2x + y)(2x - y)(4x^2 + y^2) &= [(2x + y)(2x - y)](4x^2 + y^2)\\ &= (4x^2 - y^2)(4x^2 + y^2)\\ &= 16x^4 - y^4\end{aligned}$$

EJEMPLO 10

Si observamos que el producto

$$(x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$$

tiene la forma (vii), tenemos que

$$\begin{aligned}(x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2) &= [(x^2) - y)][(x^2)^2 + (x^2)y + y^2]\\ &= (x^2)^3 - y^3\\ &= x^6 - y^3\end{aligned}$$

Cuando múltiplicamos dos polinomios lineales, encontramos la siguiente fórmula de producto notable:

(viii) $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

Esta regla de producto puede lograrse mentalmente según el esquema que se presenta en la figura 14.

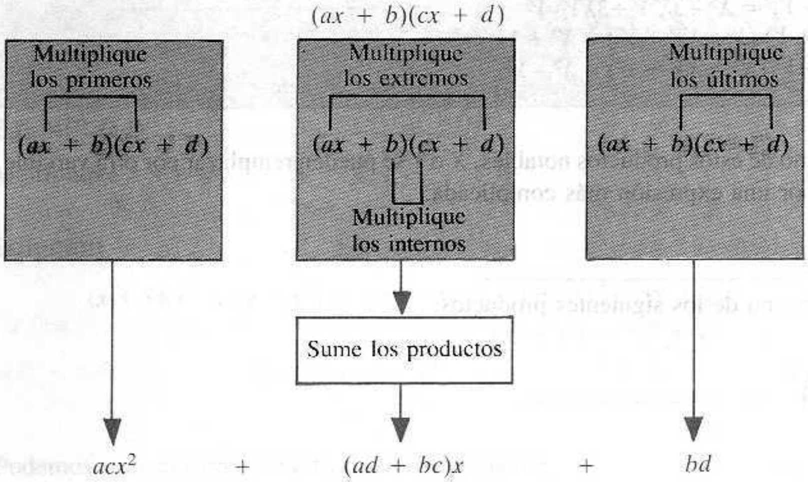


FIGURA 14

EJEMPLO 11

$$\begin{aligned}(\tfrac{2}{3}x - 2)(x - \tfrac{1}{3}) &= \tfrac{2}{3}(1)x^2 + [(\tfrac{2}{3})(-\tfrac{1}{3}) + (-2)(1)]x + (-2)(-\tfrac{1}{3})\\ &= \tfrac{2}{3}x^2 + (-\tfrac{2}{9} - 2)x + \tfrac{2}{3}\\ &= \tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{20}{9}x + \tfrac{2}{3}\end{aligned}$$

A primera vista, algunos productos parecen no ser de la forma

$$(ax + b)(cx + d)$$

cuando, de hecho, sí lo son. Sin embargo, con práctica cualquiera llegará a adquirir habilidad para reconocerlos.

EJEMPLO 12

$$\begin{aligned}(5x^2 + 2)(x^2 - 4) &= 5(1)(x^2)^2 + [5(-4) + 2(1)]x^2 + 2(-4)\\ &= 5x^4 + (-20 + 2)x^2 - 8\\ &= 5x^4 - 18x^2 - 8\end{aligned}$$

EJEMPLO 13

$$\begin{aligned}(2\sqrt{x} + 1)(4\sqrt{x} - 3) &= 2(4)(\sqrt{x})^2 + [2(-3) + 1(4)]\sqrt{x} + 1(-3)\\ &= 8x - 2\sqrt{x} - 3\end{aligned}$$

Cuanto más familiarizados nos encontremos con estos productos notables (i) - (viii), más fácilmente entenderemos la factorización, que se tratará en la siguiente sección.

EJERCICIO 1.6

En los problemas 1 al 8, halle el valor del polinomio para (a) $x = -3$; (b) $x = 1/2$; y (c) $x = 0$.

1. $x - 3x^2 + 6x^3$ **2.** $2x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 1$

3. $0.1x^2 - 0.5x + 0.2$ **4.** $(3x+1)^2$

5. $\sqrt{2}x^2 + 3x - 4\sqrt{2}$ **6.** $x^2 - 5x + 7$

7. $(x-1)^2 + (x-1)$ **8.** $2/5\,x - 1$

En los problemas 9 al 11, halle el valor de la expresión tomando las letras con los valores numéricos indicados.

9. $a + 2|a| - |b|, \quad a = -3, \quad b = 2$

10. $|a| + a - 2|b|$, $a = -2$, $b = 1$

11. $-|a| - 2a - 3|b|, \quad a = -3, \quad b = -1$

12. Una terna (x, y, z) de enteros positivos se denomina terna pitagórica si $x^2 + y^2 = z^2$. Ejemplo, (3, 4, 5) y (5, 12, 13) son ternas pitagóricas. Pruebe que $(2a, a^2 - 1, a^2 + 1)$ es una terna pitagórica siempre que a sea un entero mayor que 1.

13. Si $t > 0$ y $(t + t^{-1})^2 = 5$, determine $t^3 + t^{-3}$.

14. Si $x + y = 1$ y $x^2 + y^2 = 2$, determine $x^3 + y^3$.

15. Si $u + t = \sqrt{11}$ y $u^2 + t^2 = 16$, determine $u^4 + t^4$. [*Sugerencia*: le ayudará saber que $(u+t)^4 = u^4 + 4u^3t + 6u^2t^2 + 4ut^3 + t^4$.]

16. Pruebe que $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$ es una terna pitagórica, siempre que x, y sean enteros positivos y $x > y$.

En los problemas 17 al 21, determine si la expresión algebraica es un polinomio. Si lo es, dé su grado y su coeficiente principal.

17. $\sqrt{3} + 8x$ **18.** $0.6x^{10} - 2.4x^3 + 3.0x - 8.1$

19. $3 + 2x - \sqrt{7}x^3 + \frac{1}{2}x^{-10}$ **20.** $t^3 - 4t^2 + t^{1/3} - 8$

21. $t^4 - t^3 + t^{-1} - 1$

En los problemas 22 al 33, ejecute la operación indicada y exprese el resultado como un polinomio en forma estándar.

22. $(3x^5 - 5x^2 + 4x - 7) + (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$

23. $\left(\sqrt{2}z^5 - 6z^3 + 17z + \sqrt[3]{6}\right) + \left(z^4 + 16z^3 - 5z + \sqrt{6}\right)$

24. $5(t^3 - 4t^2 + 6t - 6) + 3(-t^3 + 2t^2 - 9t + 11)$

25. $(3x^2 + 2x - 1) - (x^4 - 4x^2 + 2x)$

26. $(4s^{10} - 5s^5 + 9/2) - (s^{10} + 1/2\,s^5 - s + 1/2)$

27. $(3x^7 - 7x^6 + x^5 - 14) - (x^4 - 2x^2 + 8x)$

28. $(4x + 8)(x^2 - 6x)$ **29.** $(z^3 + 4z - 3)(2z^3 - 7z + 1)$

30. $(t^2 - t + 3)(t^4 - t^2)$ **31.** $(x/3 + y/5)(x/3 - y/5)$

32. $(x^2 - 2x + 5)^2$ **33.** $2u(3u - 1)(3u + 1)$

34. Halle el coeficiente de x^5 en la expansión de $(x^4 + 2x^3 + 3x^2)^2$.

35. Efectúe $(2x + y)^4$ y exprese el resultado en forma estándar.

En los problemas 36 al 45, ejecute las operaciones indicadas y simplifique.

36. $(8a^4 + 7a^2b^2 + 6b^4) + (7a^4 - a^3b + a^2b^2 - 8ab^3 + 5b^4)$

37. $(8x^3y^3 - 12x^2y^5)/x^2y^3$

38. $\left(\sqrt{2}\,xy^3 - \sqrt{3}y^2\right) - \left(x^3 + y^3 - \sqrt{2}xy^3 + 6\sqrt{3}y^2 - \sqrt{5}\right)$

39. $(6x^2y^2z^2 - 4xy^2z + 2\;\;5xyz)/2xyz$

40. $\left(4x^2y^2 - (2x^2y)^2 + 8x^8y^3\right)/4x^2y^2$

41. $(3a - b)(2a^2 - ab + 3b^2)$

42. $5s^2(2rs - 8rs^2)/2rs^3$

43. $33x^2 - 3\{x - 2x[x - 7(x-2) - 3] + 2\} - 60x$

44. $4a - 5[a - 2(2b - 3c) - 2b]$

45. $4x^2 - \{[2x^2 - 2x(x - 3y + 1) - 3x^2 + 3y] - (2x - 2y + 1)\}$

En los problemas 46 al 81, halle el producto.

46. $(x-1)(x+2)$ **47.** $(u^2 + 3)(u^2 - 5)$

48. $(5x + 2)(10x + 4)$ **49.** $(3x - 2)^3$

50. $[4(x+1) + 3][4(x+1) - 3]$ **51.** $(2 + \sqrt{7})(2 - \sqrt{7})$

52. $(x^{2/3} - x^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3})$ **53.** $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)$

54. $(a - 5)(a^2 + 2a + 7)$

55. $(1/y^2 - 1/x^2)(1/y^4 + 1/y^2x^2 + 1/x^4)$

56. $(2/5x + 5)(1/5x + 1)$ **57.** $(2 - x + y)(2 - x - y)$

58. $((x^2 - 1)/x^2)^3$ **59.** $(3x^{1/2} - x)(x + 7)$

60. $(5\sqrt{x} + 1)(6\sqrt{x} - 3)$ **61.** $(0.3x + 0.7)(10.0x + 2.1)$

62. $(x + z^2)(x^2 - xz^2 + z^4)$ **63.** $(7z - 5)(3z + 2)$

64. $(1.2x + 0.4)(2.0x - 1.3)$ **65.** $(3 + 5a)^2$

66. $(9 + y)(81 - 9y + y^2)$ **67.** $(4y - 7)(y + 3)$

68. $(\sqrt{x} - y + 1)(\sqrt{x} + y - 1)$ **69.** $(t^{-1} - 3x)(t^{-1} + 3x)$

70. $(2 - y)(4 + 2y + y^2)$ **71.** $4(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^0$

72. $(x/(x+y))^{-1}(x/(x+y))^{1/2}$ **73.** $(t^2 + 1)^{-5/2}(t^2 + 1)^2$

74. $(m - p)^0\left[(m - p)^4\right]^{-1/2}$ **75.** $(x^5 - x^2)(x - 1)$

76. $(5x - 4)(x + 3)$ **77.** $(u - t)^3(u + t)^3$

78. $(e^t + 1)(e^t - 1)\left(1/(e^{2t} - 1)^3\right)$ **79.** $(z - x)(x^2 + xz + z^2)$

80. $(x^2y^3 + 2)^3$ **81.** $(x + y + 1)^3$

En los problemas 82 al 87, responda falso o verdadero.

82. $(t+1)^2 = t^2 + 1$. ______

83. El coeficiente principal de $\frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{6}x^8 + 4$ es $-\frac{1}{6}$ ______

84. El grado del polinomio $x^4 - 3x^2 + x^5$ es 4. ______

85. El valor de $z^4 - 3z + 1$ cuando $z = \sqrt{2}$ es $5 - 3\sqrt{2}$. ______

86. La expresión $3r^{14} - \sqrt{2r} + \pi$ es un polinomio en la variable r. ______

87. $5t^3 + 3t - (t^3 + 2t + 9) = 4t^3 - t - 9$. ______

88. Verifique que $\left(\sqrt{x + y - z}\right)\left(z + \sqrt{x + y}\right) + 4$ es igual a 5.

89. Verifique la fórmula (i). **90.** Verifique la fórmula (iii).

91. Verifique la fórmula (iv). **92.** Verifique la fórmula (vii).

93. Verifique la fórmula (vi).

94. Si se suman un polinomio de grado 2 y uno de grado 3, ¿cuál es el grado del polinomio resultante? ¿Cuál es el grado de su producto?

95. ¿Qué se puede decir acerca del grado de la suma de dos polinomios de grado n? ¿De su producto y de su diferencia?

96. Escriba un polinomio en las variables r y s para el área de la región (un rectángulo con extremos semicirculares) que se muestra en la figura 15.

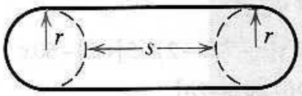


FIGURA 15

97. Escriba polinomios en la forma estándar para (a) el volumen y (b) el área de la superficie del objeto que se muestra en la figura 16.

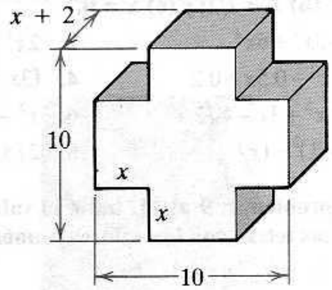


FIGURA 16

1.7 Factorización

En la sección anterior multiplicamos polinomios. Ahora, invertimos el procedimiento y tratamos de escribir un polimonio como producto de otros polinomios. Este proceso se llama **factorización** y cada polinomio en el producto se llama **factor** del polinomio original. Por ejemplo, $3x^2$ y $x^2 + 2$ son factores de $3x^4 + 6x^2$ porque

$$3x^4 + 6x^2 = 3x^2(x^2 + 2)$$

Generalmente, buscamos factores polinómicos de grado 1 ó mayores.

Al factorizar, a veces podemos remplazar una expresión complicada por un producto de factores lineales. Un ejemplo es:

$$5x^3 + 6x^2 - 29x - 6 = (5x + 1)(x - 2)(x + 3)$$

Por tanto, la factorización puede ser muy útil para simplificar expresiones. Como veremos en el capítulo 2, es particularmente útil para resolver ecuaciones. En general, el primer paso en la factorización de cualquier expresión algebraica es determinar si los términos tienen un factor común.

EJEMPLO 1

Factorice $6x^4y^4 - 4x^2y^2 + 10\sqrt{2}xy^3 - 2xy^2$.

Solución. Ya que $2xy^2$ es un factor común de los términos, tenemos que

$$\begin{aligned} &6x^4y^4 - 4x^2y^2 + 10\sqrt{2}xy^3 - 2xy^2 \\ &\quad = 2xy^2(3x^3y^2) - 2xy^2(2x) + 2xy^2(5\sqrt{2}y) - 2xy^2(1) \\ &\quad = 2xy^2(3x^3y^2 - 2x + 5\sqrt{2}y - 1) \end{aligned}$$

Cuando los términos de una expresión no tienen un factor común, aún podrían factorizarse *agrupando* los términos de una manera apropiada.

EJEMPLO 2

Factorice $x^2 + 2xy - x - 2y$.

Solución. Al agrupar los dos primeros términos y los dos últimos da

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy - x - 2y &= (x^2 + 2xy) + (-x - 2y) \\ &= x(x + 2y) + (-1)(x + 2y) \end{aligned}$$

Observamos el factor común $x + 2y$ y completamos como

$$x^2 + 2xy - x - 2y = (x - 1)(x + 2y)$$

FORMULAS DE FACTORIZACION

Mediante la inversión de las fórmulas de productos notables de la sección 1.6, tenemos las siguientes fórmulas importantes de factorización.

Fórmulas de factorización

(i) Cuadrado de una suma

$$X^2 + 2XY + Y^2 = (X + Y)^2$$

(ii) Cuadrado de una diferencia

$$X^2 - 2XY + Y^2 = (X - Y)^2$$

(iii) Diferencia de dos cuadrados

$$X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y)$$

(iv) Suma de dos cubos

$$X^3 + Y^3 = (X + Y)(X^2 - XY + Y^2)$$

(v) Diferencia de dos cubos

$$X^3 - Y^3 = (X - Y)(X^2 + XY + Y^2)$$

Hemos usado mayúsculas en estas fórmulas para poner en claro nuestro trabajo cuando las aplicamos.

EJEMPLO 3

Factorice $16x^4y^2 - 25$.

Solución. Esta es la diferencia de dos cuadrados. Así, a partir de (iii) con $X = 4x^2y$ y $Y = 5$ tenemos:

$$\begin{aligned} 16x^4y^2 - 25 &= (4x^2y)^2 - (5)^2 \\ &= (4x^2y - 5)(4x^2y + 5) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

Factorice $8a^3 + 27b^6$.

Solución. Ya que $8a^3 + 27b^6$ es la suma de dos cubos, se puede factorizar usando (iv). Si identificamos $X = 2a$ y $Y = 3b^2$, entonces

$$\begin{aligned} 8a^3 + 27b^6 &= (2a)^3 + (3b^2)^3 \\ &= (2a + 3b^2)[(2a)^2 - (2a)(3b^2) + (3b^2)^2] \\ &= (2a + 3b^2)(4a^2 - 6ab^2 + 9b^4) \end{aligned}$$

Obsérvese que las fórmulas (iii) - (v) indican que la diferencia de dos cuadrados y la suma y la diferencia de dos cubos siempre se factorizan mientras no limitemos los coeficientes al conjunto de los enteros. Por ejemplo, al usar (iii) para factorizar $x^2 - 5$, identificamos $X = x$ y $Y = \sqrt{5}$, de modo que

$$\begin{aligned} x^2 - 5 &= x^2 - (\sqrt{5})^2 \\ &= (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Sin embargo, para el resto de esta sección buscaremos únicamente factores polinómicos con coeficientes *enteros*.

FACTORIZACION DE POLINOMIOS CUADRATICOS (DE SEGUNDO GRADO)

A veces es posible factorizar los polinomios cuadráticos $ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son enteros, como

$$(Ax + B)(Cx + D)$$

donde A, B, C y D son también enteros.

Inicialmente, para simplificar nuestra exposición suponemos que el polinomio cuadrático tiene como coeficiente principal $a = 1$. Si $x^2 + bx + c$ tiene una factorización usando coeficientes enteros, entonces será de la forma

$$(x + B)(x + D)$$

donde B y D son enteros. Al hallar el producto y al comparar los coeficientes,

$$B + D = b$$

$$(x + B)(x + D) = x^2 + (B + D)x + BD = x^2 + bx + c$$

$$BD = c$$

vemos que

$$B + D = b \quad \text{y} \quad BD = c$$

Así, para factorizar $x^2 + bx + c$ con coeficientes enteros, hacemos una lista de todas las factorizaciones posibles de c como producto de dos enteros B y D. Entonces, comprobamos cuál de las sumas de $B + D$ es igual a b.

EJEMPLO 5

Factorice $x^2 - 9x + 18$

Solución. Con $b = -9$ y $c = 18$, buscamos los enteros B y D tales que

$$B + D = -9 \quad \text{y} \quad BD = 18$$

Podemos escribir 18 como un producto BD en las siguientes formas:

$$1(18), \quad 2(9), \quad 3(6), \quad (-1)(-18), \quad (-2)(-9), \quad \text{o} \quad (-3)(-6)$$

Ya que -9 es la suma de -3 y -6, la factorización es

$$x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$$

Nótese que siempre es posible comprobar una factorización mediante la multiplicación de los factores.

EJEMPLO 6

Factorice $x^2 + 3x - 1$

Solución. Se puede escribir el número -1 como producto de dos enteros BD solamente en una forma, a saber: $(-1)(1)$. Ya que la suma

$$B + D = -1 + 1 \neq 3$$

$x^2 + 3x - 1$ no se puede factorizar usando coeficientes enteros.

Es más complicado factorizar el polinomio cuadrático general $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 1$, ya que debemos considerar los factores de a así como los de c.

Hallando el producto y comparando los coeficientes

$$AC = a \qquad BD = c$$

$$(Ax + B)(Cx + D) = ACx^2 + (AD + BC)x + BD = ax^2 + bx + c$$

$$AD + BC = b$$

vemos que $ax^2 + bx + c$ se factoriza como $(Ax + B)(Cx + D)$ si

$$AC = a, \qquad AD + BC = b, \qquad \text{y} \qquad BD = c$$

EJEMPLO 7

Factorice $2x^2 + 11x - 6$.

Solución. Los factores serán

$$(2x + \_\_)(1x + \_\_)$$

donde los espacios en blanco se deben llenar con un par de enteros B y D cuyo producto BD es igual a -6. Los pares posibles son:

$$1 \text{ y } -6, \qquad -1 \text{ y } 6, \qquad 3 \text{ y } -2, \qquad -3 \text{ y } 2$$

Ahora debemos comprobar para ver si uno de los pares da 11 como valor de $AD + BC$ (el coeficiente del término medio), donde $A = 2$ y $C = 1$. Encontramos que:

$$2(6) + 1(-1) = 11$$

por tanto, $2x^2 + 11x - 6 = (2x - 1)(x + 6)$

Este método general se puede aplicar a expresiones de la forma $ax^2 + bxy + cy^2$, donde a, b y c son enteros.

EJEMPLO 8

Factorice $15x^2 + 17xy + 4y^2$.

Solución. Los factores podrían tener la forma

$$(5x + \_\_y)(3x + \_\_y) \quad \text{o} \quad (15x + \_\_y)(1x + \_\_y) \tag{6}$$

No se necesita considerar los casos

$$(-5x + \_\_y)(-3x + \_\_y) \quad \text{y} \quad (-15x + \_\_y)(-x + \_\_y)$$

(¿Por qué?)

Los espacios en blanco en (6) se deben llenar con un par de enteros cuyo producto sea 4.

Los pares posibles son:

$$1 \text{ y } 4, \qquad -1 \text{ y } -4, \qquad 2 \text{ y } 2, \qquad -2 \text{ y } -2$$

Comprobamos cada par con las formas posibles en (6) para ver cuál combinación, si es que hay alguna, nos da un coeficiente de 17 para el término medio. Encontramos que

$$15x^2 + 17xy + 4y^2 = (5x + 4y)(3x + y)$$

EJEMPLO 9

Factorice $2t^4 + 11t^2 + 12$.

Solución. Siendo $X = t^2$, podemos considerar esta expresión como un polinomio cuadrático en la variable X.

$$2X^2 + 11X + 12$$

Entonces, factorizamos este polinomio cuadrático. Los factores tendrán la forma

$$(X + \_\_)(2X + \_\_) \tag{7}$$

donde los espacios en blanco se deben llenar con un par de enteros cuyo producto sea 12. Los posibles pares son

$$1 \text{ y } 12, \qquad -1 \text{ y } -12, \qquad 2 \text{ y } 6, \qquad -2 \text{ y } -6, \qquad 3 \text{ y } 4, \qquad -3 \text{ y } -4$$

Comprobamos cada par con (7) para ver qué combinación, si la hay, nos da un coeficiente de 11 para el término medio. Encontramos que

$$2X^2 + 11X + 12 = (X + 4)(2X + 3)$$

La sustitución de t^2 por X nos da

$$2t^4 + 11t^2 + 12 = (t^2 + 4)(2t^2 + 3)$$

En el ejemplo anterior se debe verificar que ni $t^2 + 4$ ni $2t^2 + 3$ se pueden factorizar usando coeficientes enteros.

Ahora consideramos un ejemplo en el cual una primera factorización produce expresiones que se pueden factorizar otra vez. En general, necesitamos que una expresión sea **factorizada totalmente;** es decir, hasta que ninguno de los factores se puedan factorizar en polinomios de grado 1 ó mayor con coeficientes enteros.

EJEMPLO 10

Factorice completamente $x^6 - y^6$

Solución. Podemos considerar la expresión $x^6 - y^6$ de dos maneras: como diferencia de dos cuadrados o como diferencia de dos cubos. Al usar la diferencia de dos cubos, escribimos

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^2)^3 - (y^2)^3 \\ &= (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) \\ &= (x - y)(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4) \end{aligned}$$

A partir de lo anterior podríamos concluir que la factorización está completa. Sin embargo, tratar la expresión $x^6 - y^6$ como una diferencia de dos cuadrados es más revelador, ya que

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^3)^2 - (y^3)^2 \\ &= (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2) \\ &= (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

De esta manera hemos descubierto la factorización adicional

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$$

Verifique que ninguna de estas expresiones pueda factorizarse más.

EJERCICIO 1.7

En los problemas 1 al 10, factorice el polinomio hallando un factor común o agrupando.

1. $6x^5y^5 + \sqrt{2}x^2y^3 + 14xy^3$ **2.** $xyz^3 - xy^3z + x^3yz$

3. $2p^3 - p^2 + 2p - 1$ **4.** $3ax - ay - 3bx + by$

5. $2/3x + 2/3y - ux - uy$ **6.** $xy + 5x - 6y - 30$

7. $8x^3 + 14x^2 + 6x$ **8.** $2uv - 5wz + 2uz - 5wv$

9. $30xy + 6zy + 10xp + 2zp$ **10.** $3a^2b^3 - 3\sqrt{2}a^4b^2 + 9a^2b$

En los problemas 11 al 22, use las fórmulas de factorización (i) – (v) para factorizar el polinomio.

11. $x^4 - y^4$ **12.** $t^2 - 9w^2$

13. $u^2 - 3$ **14.** $z^2 + a^2$

15. $8x^3y^3 + 27$ **16.** $x^3 - 27y^3$

17. $x^6 + y^6$ **18.** $1 - p^3$

19. $36x^2 - 25$ **20.** $u^3 + 8$

21. $x^8 - y^8$ **22.** $t^2 + 1/4$

En los problemas 23 al 42, use técnicas para factorizar polinomios cuadráticos para factorizar el polinomio dado, si es posible.

23. $r^2 + 2r + 1$ **24.** $y^2 + 10y + 25$

25. $c^2/16 - 1/2 + 1/c^2$ **26.** $m^2/4 + 3m/n^2 + 9/n^4$

27. $x^2/25 - xy/5 + y^2/4$ **28.** $x^2 - 5x + 6$

29. $2p^2 + 7p + 5$ **30.** $8t^2 + 2t - 3$

31. $6a^4 + 13a^2 - 15$ **32.** $9a^2 - 6ab + b^2$

33. $9/25a^2 + 4/5ac + 4/9c^2$ **34.** $-3x^2 - 5xy + 12y^2$

35. $4x^2 + 12x + 9$ **36.** $2x^2 - 7xy + 3y^2$

37. $a^2 - ab - 2b^2$ **38.** $s^2 - 8st + 16t^2$

39. $m^2 + 2mn + n^2$ **40.** $5v^2 + 6v + 1$

41. $10b^4 - 23b^2 + 12$ **42.** $y^4 + 10y^2 + 21$

En los problemas 43 al 60, use cualquier método para factorizar la expresión.

43. $r^3s^3 - 8t^3$ **44.** $(x + y)^2 - z^2$

45. $a^{12} - (a^2 - 1)^3$ **46.** $x(x - w) + w(w - z)$

47. $s^8 - 6561$ **48.** $a^3 - a^2b - b^3 + ab^2$

49. $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y + 2$

50. $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + 4cd - 4d^2$

51. $x^2 + 6xy + 9y^2 + 2x + 6y$

52. $(x + 3)^2(x + 2)^3 - 20(x + 3)(x + 2)^2$

53. $(x^{2n} + 3x^n + 2)$ **54.** $4z^2 + 7zy - 2y^2$

55. $z^{10} - 5z^5 - 6$ **56.** $(1 - x^2)^3 - (1 - y^2)^3$

57. $x(x - y) - y(y - x)$ **58.** $x^6 + 7x^3 - 8$

59. $4p^2 + 2pq - 12q^2$ **60.** $(x^2 - 4)^3 + (4 - y^2)^3$

En los problemas 61 al 70, use las fórmulas de factorización (i) – (iii) para factorizar la expresión en factores lineales. [Ayuda: algunos coeficientes no serán enteros.]

61. $2r^2 - 1$ **62.** $y^2 - 11$

63. $k^2 - 1/9$ **64.** $t^2 - 2/5t + 1/25$

65. $a^2 - 2b^2$ **66.** $3u^2 - 4v^2$

67. $x^2 + 1/2x + 1/16$ **68.** $1/4a^2 - b^2$

69. $x^2 - 2\sqrt{2xy} + 2y^2$ **70.** $81p^2 - (3q - 2r)^2$

71. Calcule las siguientes operaciones:

(a) $(547)^2 - (453)^2$ **(b)** $(1 - 1/2^2)(1 - 1/3^2)\ldots(1 - 1/29^2)$

En los problemas 72 al 75, responda falso o verdadero.

72. $a^3 + b^3 = (a + b)^3$. ____

73. $x^2 + y^2 = (x + y)(x + y)$. ____

74. $(x - 2)(x - 2) = x^2 + 4$. ____

75. $2(t^3 - u^3) = (t - u)(t^2 + tu + u^2)2$. ____

En el libro II de *Elementos* de Euclides, los problemas algebraicos se tratan y se resuelven en términos geométricos, porque los griegos carecían de notación algebraica. Por ejemplo, el producto de dos números positivos *a* y *b* se representa como el área de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes *a* y *b*, respectivamente. En los problemas 76 al 78 se tratan en términos geométricos varias de las fórmulas de factorización.

76. Explique cómo justifica la figura 17 la fórmula de factorización $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, para los números positivos a y b.

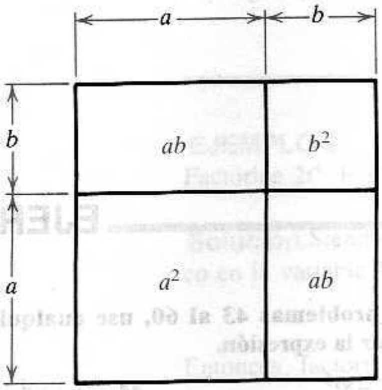


FIGURA 17

77. Explique cómo justifica la figura 18 la fórmula de factorización $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, donde $a > b > 0$.

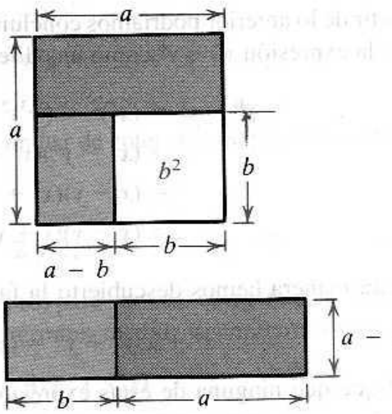


FIGURA 18

78. La figura 19 indica que la fórmula de factorización para la diferencia de dos cubos, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ para $a > b > 0$, se puede justificar geométricamente. Complete la prueba. [*Sugerencia*: marque las cuatro cajas que hay dentro del cubo y calcule el volumen de cada una.]

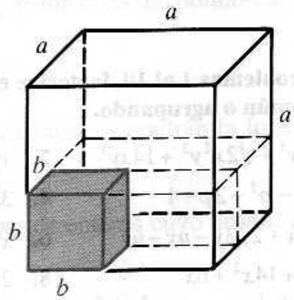


FIGURA 19

1.8 Expresiones racionales

Cuando un polinomio se divide por otro, el resultado no es necesariamente un polinomio. El cociente de dos polinomios se llama **expresión racional.** Por ejemplo,

$$\frac{2x^2+5}{x+1} \quad \text{y} \quad \frac{3}{2x^3 - x + 8}$$

son expresiones racionales. El dominio de la variable en una expresión racional consta de todos los números reales para los cuales el valor del denominador es diferente de cero. Por ejemplo, en $(2x^2 + 5)/(x + 1)$ el dominio de la variable es $\{x | x \neq -1\}$.

Para resolver problemas, con frecuencia debemos combinar expresiones racionales y luego simplificar los resultados. Ya que una expresión racional representa a un número real, podemos aplicar las propiedades del sistema de números reales para combinar y simplificar las expresiones racionales. Las propiedades de las fracciones de la sección 1.1 son particularmente útiles. A continuación, y por conveniencia, repetimos las que se usan con más frecuencia.

Para cualquiera de los números reales a, b, c, d

(i) Cancelación

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, \quad c \neq 0$$

(ii) Suma o resta

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

(iii) Multiplicación

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

(iv) División

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

con tal de que cada denominador sea diferente de cero.

EJEMPLO 1

Simplifique

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$$

Solución. Factorizamos el numerador y el denominador y cancelamos los factores comunes usando la propiedad cancelativa (i):

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(2x+1)\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{2x+1}{x+1}$$

Nótese que en el ejemplo 1 la cancelación del factor común $x - 1$ es válida solamente para aquellos valores de x tales que $x - 1$ sea diferente de cero; es decir, para $x \neq 1$. Sin embargo, ya que la expresión $(2x^2 - x - 1)/(x^2 - 1)$ no se define para $x = 1$, nuestra simplificación es válida para todos los números reales en el dominio de la variable x en la expresión *original*. Enfatizamos que la ecuación

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x+1}{x+1}$$

no es válida para $x = 1$, aunque el lado derecho $(2x + 1)/(x^2 + 1)$ se define para $x = 1$. Las consideraciones de esta naturaleza serán importantes en el capítulo siguiente cuando resolveremos ecuaciones que contengan expresiones racionales.

Para el resto de este capítulo supondremos sin comentarios posteriores que las variables están restringidas a los valores para los cuales todos los denominadores en una ecuación sean diferentes de cero.

EJEMPLO 2

Simplifique

$$\frac{4x^2 + 11x - 3}{2 - 5x - 12x^2}$$

Solución

$$\frac{4x^2 + 11x - 3}{2 - 5x - 12x^2} = \frac{(4x - 1)(x + 3)}{(1 - 4x)(2 + 3x)}$$

$$= \frac{\cancel{(4x - 1)}(x + 3)}{-\cancel{(4x - 1)}(2 + 3x)}$$

$$= \frac{x + 3}{2 + 3x} \quad \boxed{\text{Por (i)}}$$

MINIMO COMUN MULTIPLO DE LOS DENOMINADORES (MCM)

Para sumar o restar expresiones racionales, procedemos exactamente como cuando sumamos o restamos fracciones. Primero, hallamos un común denominador y luego aplicamos (ii). Aunque cualquier común denominador servirá, el trabajo será menor si usamos el **mínimo común múltiplo de los denominadores (MCM)** el cual se encuentra mediante la factorización completa de cada denominador y la formación de un producto de los diferentes factores, usando cada factor con el exponente más alto con el cual ocurra en cualquier denominador individual.

EJEMPLO 3

Encuentre el MCM de los denominadores de:

$$\frac{1}{x^4 - x^2}, \quad \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 1}, \quad \text{y} \quad \frac{1}{x}$$

Solución. Al factorizar los denominadores en las expresiones racionales, obtenemos

$$\frac{1}{x^2(x - 1)(x + 1)}, \quad \frac{x + 2}{(x + 1)^2}, \quad \text{y} \quad \frac{1}{x}$$

Los diferentes factores de los denominadores son x, $x - 1$, y $x + 1$. Usamos cada factor con el exponente más alto con el cual ocurre en cualquier denominador individual. De esta manera, el MCM de los denominadores es:

$$x^2(x - 1)(x + 1)^2$$

EJEMPLO 4

Combine y simplifique

$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$$

Solución. En la forma factorizada los denominadores son $(x - 2)(x + 2)$ y $(x + 2)^2$. De esta manera el MCM de los denominadores es $(x - 2)(x + 2)^2$. Usamos (i) a la inversa para volver a escribir cada expresión racional con el MCM como denominador:

$$\frac{x}{x^2 - 4} = \frac{x}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)(x + 2)}$$

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{1}{(x + 2)^2} = \frac{1(x - 2)}{(x + 2)^2(x - 2)}$$

Entonces, usando (ii) sumamos y simplificamos:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4} &= \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)^2}+\frac{x-2}{(x-2)(x+2)^2}\\ &= \frac{x(x+2)+x-2}{(x-2)(x+2)^2}\\ &= \frac{x^2+2x+x-2}{(x-2)(x+2)^2}\\ &= \frac{x^2+3x-2}{(x-2)(x+2)^2}\end{aligned}$$

Para multiplicar o dividir expresiones racionales, aplicamos (iii) o (iv) y luego simplificamos.

EJEMPLO 5

Combine y simplifique

$$\frac{x}{5x^2+21x+4}\cdot\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}$$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{x}{5x^2+21x+4}\cdot\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x} &= \frac{x(25x^2+10x+1)}{(5x^2+21x+4)(3x^2+x)} \quad \text{Por(iii)}\\ &= \frac{\cancel{x}(5x+1)\cancel{(5x+1)}}{\cancel{(5x+1)}(x+4)\cancel{x}(3x+1)}\\ &= \frac{5x+1}{(x+4)(3x+1)}\end{aligned}$$

EJEMPLO 6

Combine y simplifique

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}\div\frac{2x+5}{x+3}$$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}\div\frac{2x+5}{x+3} &= \frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}\cdot\frac{x+3}{2x+5} \quad \text{Por(iv)}\\ &= \frac{(2x^2+9x+10)(x+3)}{(x^2+4x+3)(2x+5)} \quad \text{Por(iii)}\\ &= \frac{\cancel{(2x+5)}(x+2)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x+1)\cancel{(2x+5)}}\\ &= \frac{x+2}{x+1}\end{aligned}$$

Como se demuestra en el siguiente ejercicio, las técnicas que se ilustraron antes nos permiten simplificar cocientes más complicados.

EJEMPLO 7
Simplique

$$\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x+1}}{1+\dfrac{1}{x}}$$

Solución. Primero obtenemos expresiones racionales individuales para el numerador y el denominador:

$$\frac{1}{x}-\frac{x}{x+1}=\frac{1(x+1)}{x(x+1)}-\frac{x\cdot x}{(x+1)x}=\frac{x+1-x^2}{x(x+1)}=\frac{-x^2+x+1}{x(x+1)}$$

y $$1+\frac{1}{x}=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$$

De esta manera $$\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x+1}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{\dfrac{-x^2+x+1}{x(x+1)}}{\dfrac{x+1}{x}}$$

Ahora aplicamos (iv) a este cociente para obtener

$$\frac{\dfrac{-x^2+x+1}{x(x+1)}}{\dfrac{x+1}{x}}=\frac{-x^2+x+1}{\cancel{x}(x+1)}\cdot\frac{\cancel{x}}{x+1}=\frac{-x^2+x+1}{(x+1)^2}$$

Un método alterno para simplificar un fraccionario complejo es multiplicar tanto el numerador como el denominador por el MCM de los denominadores de todas las fracciones que ocurran en la fracción compleja. Al usar aquí este método, multiplicamos el numerador y el denominador por $x(x+1)$ y simplificamos de la siguiente manera:

$$\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x+1}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x+1}\right)\cdot x(x+1)}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot x(x+1)}=\frac{(x+1)-x^2}{x(x+1)+(x+1)}$$

$$=\frac{-x^2+x+1}{(x+1)(x+1)}=\frac{-x^2+x+1}{(x+1)^2}$$

Las técnicas que se tratan en esta sección se pueden aplicar con frecuencia a expresiones que contienen exponentes negativos, como veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8
Simplifique $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}$.

Solución. Primero remplazamos todos los exponentes negativos por los cocientes equivalentes y luego usamos las propiedades de las fracciones para simplificar las expresiones algebraicas que resulten.

$$(a^{-1}+b^{-1})^{-1}=\frac{1}{a^{-1}+b^{-1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{b + a}{ab}}$$

$$= \frac{ab}{b + a}$$

Un cociente de dos expresiones algebraicas tales como $(\sqrt{x} - 1)/(\sqrt{x} + 1)$ se llama **expresión fraccionaria.** Las técnicas para simplificar expresiones fraccionarias son similares a aquellas que se usan para expresiones racionales.

EJEMPLO 9

Simplifique

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}$$

Solución. Primero encontramos el MCM de los denominadores y luego sumamos:

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y}\sqrt{x}} + \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$$

Si deseamos racionalizar el denominador, el resultado final sería

$$\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} = \frac{x^2\sqrt{y} + y^2\sqrt{x}}{xy}$$

Los ejemplos 10 y 11 ilustran cómo simplificar ciertos tipos de expresiones fraccionarias que ocurren en cálculo.

EJEMPLO 10

Simplifique

$$\frac{\frac{1}{x + h} - \frac{1}{x}}{h}$$

Solución

$$\frac{\frac{1}{x + h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x - (x + h)}{(x + h)x}}{h} = \frac{\frac{-h}{x(x + h)}}{h}$$

$$= \frac{-h}{x(x + h)h} = \frac{-1}{x(x + h)}$$

EJEMPLO 11

Simplifique $(2x)(x - 1)^{1/2} + (\frac{1}{2})(x - 1)^{-1/2}(x^2)$.

Solución

$$(2x)(x - 1)^{1/2} + (\tfrac{1}{2})(x - 1)^{-1/2}(x^2) = (2x)(x - 1)^{1/2} + \frac{x^2}{2(x - 1)^{1/2}}$$

$$= \frac{(2)(2x)(x-1)+x^2}{2(x-1)^{1/2}}$$
$$= \frac{4x^2-4x+x^2}{2(x-1)^{1/2}}$$
$$= \frac{5x^2-4x}{2(x-1)^{1/2}}$$

EJERCICIO 1.8

En los problemas 1 al 4, responda falso o verdadero.

1. $(u^{-1}+v^{-1})^{-1}=u+v.$ ____
2. $(a-b)/a=-b.$ ____
3. El mínimo común múltiplo de los denominadores (MCM) de $1/(r+2)^2$ y $1/[(r+3)^3(r+2)]$ es $(r+3)^3(r+2)^2$. ____
4. $2-x/x-2=-1.$ ____

En los problemas 5 al 13, simplifique la expresión racional.

5. $\frac{z^2-9}{z^3+27}$
6. $\frac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2}$
7. $\frac{w^3-9w}{w^3-6w^2+9w}$
8. $\frac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}$
9. $\frac{ax-ay+bx-by}{2ax-by-ay+2bx}$
10. $\frac{sx+2sy-tx-2ty}{2sx+4sy+tx+2ty}$
11. $\frac{x^4+4x^2+16}{x^3+8}$
12. $\frac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$
13. $\frac{x^2-2xy-3y^2}{x^2-4xy+3y^2}$

En los problemas 14 al 21, encuentre el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores de las expresiones:

14. $\frac{1}{x^2+x-2}, \frac{4}{x+2}$
15. $\frac{2}{x-4}, \frac{3x}{x+4}, \frac{x^2}{x^2-16}$
16. $\frac{1}{(t-2)^2}, \frac{2}{t^2-4}, \frac{3}{t+2}$
17. $\frac{1}{x^3-x^2}, \frac{x}{x^2-1}, \frac{1}{x^3+2x^2+x}$
18. $\frac{1}{c^2+c}, \frac{c}{c^2+2c+1}, \frac{1}{c^2-1}$
19. $\frac{6}{x^2+2x+1}, \frac{x}{x^2-3x-4}$
20. $\frac{p}{p+r}, \frac{r}{p^2+2pr+r^2}, \frac{1}{p^3+r^3}$
21. $\frac{10}{b^3+b^2-6b}, \frac{1}{b^3-6b^2}, \frac{b}{b-2}$

En los problemas 22 al 48, combine y simplifique la expresión.

22. $\frac{3}{a-2}-\frac{6}{a^2+4}$
23. $\frac{y^2-1}{y^2+y}\cdot\frac{y^2}{y+1}$
24. $\frac{2x}{x+1}+\frac{5}{x^2-1}$
25. $\frac{x}{3x+1}-\frac{3x}{x-3}$
26. $\frac{3}{x}-\frac{2-3x}{3x-1}+\frac{1-2x}{x(3x-1)}$
27. $\frac{2x}{x^2-1}-\frac{x+3}{x(x-1)}+\frac{7x+5}{x(x^2-1)}$
28. $\frac{4x}{4x+5}+\frac{5}{4x+5}$
29. $(x^2-2x+1)\cdot\frac{x+1}{x^3-1}$
30. $\frac{z}{2z+3}-\frac{3}{4z^2-3z-1}+\frac{4z+1}{2z^2+z-3}$
31. $\frac{2a}{a-b}+\frac{a}{b-a}$
32. $\frac{7}{u^2-u-12}+\frac{3u}{u+3}$
33. $\frac{x}{2x^2+3x-2}-\frac{1}{2x-1}-\frac{4}{x+2}$
34. $\frac{x+y^2}{x^2}+\frac{x-1}{x}-1$
35. $\frac{x+y}{1/x+1/y}$
36. $\frac{2+1/x}{2x^2+x}$
37. $\dfrac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}$

38. $\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{1+x/y}}$

39. $2-\dfrac{2}{1-\dfrac{2}{2-2/x^2}}$

40. $\dfrac{x+\dfrac{2x}{x-2}}{1+\dfrac{4}{x^2-4}}$

41. $\dfrac{u+1}{u+2}\div\dfrac{u+1}{u+7}$

42. $\dfrac{q^2-1}{q^2+2q-3}\div\dfrac{q-4}{q+3}$

43. $\dfrac{s^2-5s+6}{s^2+7s+10}\div\dfrac{2-s}{s+2}$

44. $\dfrac{6x+5}{3x+3}\cdot\dfrac{x+1}{6x^2-7x-10}$

45. $\dfrac{2p+8}{p-1}\cdot\dfrac{p+4}{2p}$

46. $x(x-w)+w(w-z)$

47. $(1+1/(x+2))(4/(3x+9))$

48. $a^3-a^2b-b^3+ab^2$

49. Sean x, y, z, números positivos. ¿Cómo se compara el tamaño de $\dfrac{(x+z)}{(y+z)}$ con el de x/y?

En los problemas 50 al 68, simplifique la expresión dada:

50. $\dfrac{1/x^2-x}{1/x^2+x}$

51. $\dfrac{z+1/2}{2+1/z}$

52. $\left(w^{-1}-w^{-1}\right)^{-2}$

53. $\dfrac{1}{\sqrt{u}}+\dfrac{1}{\sqrt{w}}$

54. $\dfrac{x+2y}{x^{-1}+(2y)^{-1}}$

55. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}$

56. $\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{y}}}$

57. $\dfrac{a}{\sqrt{z}}-\dfrac{z}{\sqrt{a}}$

58. $\dfrac{3+2/x}{1/x}$

59. $\dfrac{2-3/a}{2+1/a}$

60. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^3}-\dfrac{1}{x^3}}{h}$

61. $\dfrac{n-n^2/(n-m)}{1+m^2/(n^2-m^2)}$

62. $1-\dfrac{x-(1/x)}{1-(1/x)}$

63. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2/y-y^2/x}$

64. $\dfrac{1/s+1/t}{2/s-3/t}$

65. $\dfrac{u^{-2}-z^{-2}}{u^2z^2}$

66. $\dfrac{\dfrac{5}{2x+2h-1}-\dfrac{5}{2x-1}}{h}$

67. $\left(x^2-1\right)(1/3)(x+1)^{-2/3}+(x+1)^{1/3}(2x)$

68. $\dfrac{\left(x^2+1\right)(1/2)\left(x^{-1/2}\right)-\left(x^{1/2}\right)(2)}{\left(x^2+1\right)^2}$

69. En el campo de la óptica, si p es la distancia del objeto a la lente y q es la distancia de la imagen a la lente, entonces la longitud focal de la lente está dada por

$$\frac{1}{1/p+1/q}$$

Simplifique esta expresión.

70. Si tres resistencias en un circuito eléctrico con resistencias de R_1, R_2 y R_3 ohmios, respectivamente, se hallan conectadas en paralelo, entonces la resistencia (en ohmios) de la combinación está dada por

$$\frac{1}{1/R_1+1/R_2+1/R_3}$$

Simplifique esta expresión.

CONCEPTOS IMPORTANTES

Conjunto subconjunto unión intersección disjunto Números reales número natural entero número racional número irracional Recta de números reales origen coordenada	Relación de orden menor que mayor que Valor absoluto Desigualdad triangular Distancia Punto medio Leyes de los exponentes Exponente base notación científica Radical raíz cuadrada raíz cúbica raíz enésima Racionalización del denominador	Expresión algebraica Polinomio monomio binomio coeficiente grado término coeficiente principal término constante Factorización completa Expresión racional dominio numerador denominador Mínimo común múltiplo de los denominadores

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 22, llene los espacios en blanco o conteste falso o verdadero.

1. π es un número racional. ____
2. El ____ del segmento de recta que une −4 y 7 es 1.5.
3. Si x es negativo, entonces $|x| =$ ____ .
4. La expresión $4x^5 - x^3 + 5x^2 + 3x$ es un ____ de grado ____ con coeficiente principal ____ y término constante ____
5. Si x es un número real, entonces $\sqrt{x^2} = x$ ____
6. El ____ de x se puede escribir $1/x$ como x^{-1}.
7. La raíz cúbica de un número negativo es indefinida. ____
8. La expresión algebraica $2/3x^{-1} + \sqrt{3}$ es un polinomio. ____
9. Para $x \neq 0, x^0 =$ ____
10. Geométricamente, $a < b$ significa que el punto correspondiente a $\underline{b}$ en la recta numérica está a la ____ del punto correspondiente a $\underline{a}$.
11. Si $t = -6$, el inverso aditivo de $t^2 - 12$ es ____
12. El número 83.4×10^{-3} está escrito en notación científica. ____
13. El valor absoluto de un número mide su distancia al ____ en la recta numérica.
14. Se dice que los conjuntos $\{0,2,4,5\}$ y $\{1,3,7\}$ son ____
15. Si $t = 0$, $t^0 = 1$ ____
16. La expresión $\sqrt[4]{x^2 + y^2}$ se llama un ____ de índice ____
17. Si $x^{1/n} = r$, entonces $r^n = x$. ____
18. $a/0, a \neq 0$ es un número real. ____
19. 0/0 es un número irracional. ____
20. Cada número real se puede escribir como cociente de dos enteros. ____
21. El dominio de la variable x en $\dfrac{(3x-1)}{x^2-1}$ es ____
22. La distancia de $\underline{a}$ a $\underline{b}$ está dada por ____

En los problemas 23 al 27, escriba cada una de las siguientes expresiones decimales como cociente de dos enteros.

23. $0.\overline{7}$
24. $0.1\overline{23}$
25. $0.\overline{321}$
26. 0.63
27. 0.325
28. En 1983 un aficionado que asistió a un partido de fútbol gastó un promedio de US$6.40 en comida, US$13.45 por concepto de entrada, US$1.15 por parqueadero y US$0.90 por un programa. Aproximadamente, ¿qué porcentaje del total gastó en comida en el juego?
29. Entre 1995 y 1996 había 1,000,426 microcomputadores en las escuelas de un país. Si 60.32% de estos microcomputadores eran IBM, ¿cuántos eran IBM?
30. Alrededor del año 240 a. de C. Arquímedes determinó que $223/71 < \pi < 22/7$. Encuentre el porcentaje de error en cada una de estas aproximaciones para π. [*Sugerencia*: use una calculadora con una tecla π].
31. El déficit fiscal federal en los EE.UU. en 1985 fue de US$211,900 millones. En 1985, el senado de los Estados Unidos intentó reducir el déficit a US$180,000 millones para 1986. ¿Cuál habría sido el porcentaje de esa reducción?

En los problemas 32 al 34 escriba la proposición dada como una desigualdad.

32. $x - y$ es mayor o igual a 10.
33. $w + 1$ es no negativo.
34. t es no positivo.

En los problemas 35 al 39, inserte el signo apropiado: <, >, =.

35. $-1.4, -\sqrt{2}$ **36.** $3.5, 7/2$

37. $2/3, 0.67$ **38.** $-0.5, -0.2$

39. Si en un segmento de recta t está a la izquierda de w, entonces, w __ t.

En los problemas 40 al 46, encuentre el valor absoluto indicado.

40. $\left|\sqrt{8-3}\right|$ **41.** $\left|-\left(\sqrt{17}-5\right)\right|$

42. $\left|t^2+7\right|$ **43.** $\dfrac{|x|}{|-x|},\ x \neq 0$

44. $|k|$ **45.** $|r-s|$, si $r > s$

46. $|t+5|$, si $t < -5$

En los problemas 47 y 48, encuentre: (a) la distancia entre los puntos dados y (b) la coordenada del punto medio del segmento de recta que une los puntos dados.

47. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ **48.** $-2.6, 4.3$

En los problemas 49 al 63, elimine los exponentes negativos y cero, y simplifique. Suponga que todas las variables son positivas.

49. $\left(3uv^2\right)\left(6u^2v^3\right)^2$ **50.** $\dfrac{8a^3b^2}{24ab^3}$

51. $\dfrac{\left(2x^{-5}y^3\right)^{-2}}{x^2y^{-1}}$ **52.** $\dfrac{x^{1/3}y^{-2/3}}{x^{4/3}y^{-7/9}}$

53. $\dfrac{s^{-1}t^{-1}}{s^{-1}+t^{-1}}$ **54.** $4\sqrt{xy}-\sqrt{\sqrt{x^2y^2}}+\sqrt{2xy}$

55. $\dfrac{\sqrt[3]{64}}{8^{-1/2}}$ **56.** $\dfrac{\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{b^4}}{b}$

57. $\dfrac{2x^5y^{-3}z^2}{6x^3y^{-3}z^{-5}}$ **58.** $\sqrt[3]{a^2}\sqrt{a}$

59. $\left(\left(81w^2z^{-1/2}\right)^{-1}\right)^{1/4}$ **60.** $3\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2}$

61. $\left(\left(-8c^3d^6\right)/\left(c^{-9}d^{12}\right)\right)^{2/3}$ **62.** $\left[\left(1/2x^{-2}\right)^3\left(4xy^{-1}\right)^2\right]^2$

63. $\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{x}}$

En los problemas 64 y 65, escriba el número dado en notación científica.

64. 0.0000007023 **65.** 372,000,000

En los problemas 66 y 67 use notación científica para determinar la expresión dada.

66. $\dfrac{(16{,}000)(5{,}000{,}000)^2}{0.00008}$ **67.** $\overline{(0.0001)(587{,}000)/0.04}$

68. En 1982 los norteamericanos gastaron US$17,600 millones en deportes, en actividades relacionadas con el deporte y en equipos deportivos. Escriba este número (a) en forma decimal y (b) en notación científica.

En los problemas 69 al 76, ejecute las operaciones indicadas y simplifique.

69. $\left(4x^3-3x^2+6x-2\right)-\left(x^2-3x+4\right)$

70. $\left(2z^3-3z\right)^2$

71. $\left(3x^4-\sqrt{2x^2}\right)+x\left(\sqrt{2x}+5\right)$ **72.** $\dfrac{x^2y^2-4xy^3+7x^3y^2}{xy^2}$

73. $(u-v)\left(u^2+uv+v^2\right)$ **74.** $\left(t^2+4z\right)^3$

75. $\left(3x^2+5y\right)\left(3x^2-5y\right)$ **76.** $(y+1)(y-3)(y+2)$

En los problemas 77 al 84, factorice los polinomios dados usando coeficientes enteros.

77. $12x^2-19x-18$ **78.** $81a^4-16x^4$

79. $4t^4-4t^2s+s^2$ **80.** $a^2-2ab+b^2-c^2+4cd-4d^2$

81. $27x^3+125y^6$ **82.** $2xy+3y-6x-9$

83. $x^2+6xy+9y^2+2x+6y$ **84.** $4w^2+40wz+100z^2$

En los problemas 85 al 94, ejecute las operaciones indicadas y simplifique.

85. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}$ **86.** $\dfrac{a^2-1}{a}\div\dfrac{a^3-1}{5x^2}$

87. $\dfrac{\dfrac{4}{(x+h)^3}-\dfrac{4}{x^3}}{h}$ **88.** $\dfrac{2+x^{-3}}{2-x^{-3}}$

89. $\dfrac{\sqrt{c}+1/d}{d+1/\sqrt{c}}$

90. $\dfrac{(x+1)^{5/2}\left(3x^2\right)-\left(x^3\right)(5/2)(x+1)^{3/2}}{\left[(x+1)^{5/2}\right]^2}$

91. $\left(x^{-2}-y^{-2}\right)(y-x)^{-3}$ **92.** $(1/x+1/y)(1/(x+y))$

93. $\dfrac{\dfrac{r}{s}+2}{\dfrac{s}{r}+2}$ **94.** $\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{b^2}{a^2}}{a/b-b/a}$

En los problemas 95 y 96, racionalice el denominador y simplifique.

95. $\dfrac{4xy^2}{\sqrt[3]{2xy^2}}$ **96.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}-\sqrt{b}}$

En los problemas 97 al 100, racionalice el numerador y simplifique.

97. $\dfrac{\sqrt{5(1+x)}-\sqrt{2}}{x}$ **98.** $\dfrac{\sqrt{(t+u)^2-3}+\sqrt{t^2-3}}{2u}$

99. $\dfrac{\sqrt[3]{ab}}{7}$ **100.** $\dfrac{\sqrt[4]{(x+1)^3}}{3}$

CONCEPTOS IMPORTANTES

Conjunto
- subconjunto
- unión
- intersección
- disjunto

Números reales
- número natural
- entero
- número racional
- número irracional

Recta de números reales
- origen
- coordenada

Relación de orden
- menor que
- mayor que

Valor absoluto
Desigualdad triangular
Distancia
Punto medio
Leyes de los exponentes
Exponente
- base
- notación científica

Radical
- raíz cuadrada
- raíz cúbica
- raíz enésima

Racionalización del denominador

Expresión algebraica
Polinomio
- monomio
- binomio
- coeficiente
- grado
- término
- coeficiente principal
- término constante

Factorización completa
Expresión racional
- dominio
- numerador
- denominador

Mínimo común múltiplo de los denominadores

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 22, llene los espacios en blanco o conteste falso o verdadero.

1. π es un número racional. ______
2. El ______ del segmento de recta que une -4 y 7 es 1.5.
3. Si x es negativo, entonces $|x| =$ ______.
4. La expresión $4x^5 - x^3 + 5x^2 + 3x$ es un ______ de grado ______ con coeficiente principal ______ y término constante ______.
5. Si x es un número real, entonces $\sqrt{x^2} = x$ ______
6. El ______ de x se puede escribir $1/x$ como x^{-1}.
7. La raíz cúbica de un número negativo es indefinida. ______
8. La expresión algebraica $2/3x^{-1} + \sqrt{3}$ es un polinomio. ______
9. Para $x \neq 0$, $x^0 =$ ______
10. Geométricamente, $a < b$ significa que el punto correspondiente a $\underline{b}$ en la recta numérica está a la ______ del punto correspondiente a $\underline{a}$.
11. Si $t = -6$, el inverso aditivo de $t^2 - 12$ es ______
12. El número 83.4×10^{-3} está escrito en notación científica. ______
13. El valor absoluto de un número mide su distancia al ______ en la recta numérica.
14. Se dice que los conjuntos $\{0,2,4,5\}$ y $\{1,3,7\}$ son ______
15. Si $t = 0$, $t^0 = 1$ ______
16. La expresión $\sqrt[4]{x^2 + y^2}$ se llama un ______ de índice ______
17. Si $x^{1/n} = r$, entonces $r^n = x$. ______
18. $a/0$, $a \neq 0$ es un número real. ______
19. $0/0$ es un número irracional. ______
20. Cada número real se puede escribir como cociente de dos enteros. ______
21. El dominio de la variable x en $\dfrac{(3x-1)}{x^2-1}$ es ______
22. La distancia de $\underline{a}$ a $\underline{b}$ está dada por ______

En los problemas 23 al 27, escriba cada una de las siguientes expresiones decimales como cociente de dos enteros.

23. $0.\overline{7}$
24. $0.\overline{123}$
25. $0.\overline{321}$
26. 0.63
27. 0.325
28. En 1983 un aficionado que asistió a un partido de fútbol gastó un promedio de US\$6.40 en comida, US\$13.45 por concepto de entrada, US\$1.15 por parqueadero y US\$0.90 por un programa. Aproximadamente, ¿qué porcentaje del total gastó en comida en el juego?
29. Entre 1995 y 1996 había 1,000,426 microcomputadores en las escuelas de un país. Si 60.32% de estos microcomputadores eran IBM, ¿cuántos eran IBM?
30. Alrededor del año 240 a. de C. Arquímedes determinó que $223/71 < \pi < 22/7$. Encuentre el porcentaje de error en cada una de estas aproximaciones para π. [*Sugerencia*: use una calculadora con una tecla π].
31. El déficit fiscal federal en los EE.UU. en 1985 fue de US\$211,900 millones. En 1985, el senado de los Estados Unidos intentó reducir el déficit a US\$180,000 millones para 1986. ¿Cuál habría sido el porcentaje de esa reducción?

En los problemas 32 al 34 escriba la proposición dada como una desigualdad.

32. $x - y$ es mayor o igual a 10.
33. $w + 1$ es no negativo.
34. t es no positivo.

En los problemas 35 al 39, inserte el signo apropiado: <, >, =.

35. $-1.4, -\sqrt{2}$ **36.** $3.5, 7/2$

37. $2/3, 0.67$ **38.** $-0.5, -0.2$

39. Si en un segmento de recta t está a la izquierda de w, entonces, w __ t.

En los problemas 40 al 46, encuentre el valor absoluto indicado.

40. $\left|\sqrt{8}-3\right|$ **41.** $\left|-\left(\sqrt{17}-5\right)\right|$

42. $\left|t^2+7\right|$ **43.** $\dfrac{|x|}{|-x|},\ x \neq 0$

44. $|k|$ **45.** $|r-s|$, si $r > s$

46. $|t+5|$, si $t < -5$

En los problemas 47 y 48, encuentre: (a) la distancia entre los puntos dados y (b) la coordenada del punto medio del segmento de recta que une los puntos dados.

47. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ **48.** $-2.6, 4.3$

En los problemas 49 al 63, elimine los exponentes negativos y cero, y simplifique. Suponga que todas las variables son positivas.

49. $\left(3uv^2\right)\left(6u^2v^3\right)^2$ **50.** $\dfrac{8a^3b^2}{24ab^3}$

51. $\dfrac{\left(2x^{-5}y^3\right)^{-2}}{x^2y^{-1}}$ **52.** $\dfrac{x^{1/3}y^{-2/3}}{x^{4/3}y^{-7/9}}$

53. $\dfrac{s^{-1}t^{-1}}{s^{-1}+t^{-1}}$ **54.** $4\sqrt{xy}-\sqrt{\sqrt{x^2y^2}}+\sqrt{2xy}$

55. $\dfrac{\sqrt[3]{64}}{8^{-1/2}}$ **56.** $\dfrac{\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{b^4}}{b}$

57. $\dfrac{2x^5y^{-3}z^2}{6x^3y^{-3}z^{-5}}$ **58.** $\sqrt[3]{a^2}\sqrt{a}$

59. $\left(\left(81w^2z^{-1/2}\right)^{-1}\right)^{1/4}$ **60.** $3\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2}$

61. $\left(\left(-8c^3d^6\right)/\left(c^{-9}d^{12}\right)\right)^{2/3}$ **62.** $\left[\left(1/2x^{-2}\right)^3\left(4xy^{-1}\right)^2\right]^2$

63. $\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{x}}$

En los problemas 64 y 65, escriba el número dado en notación científica.

64. 0.0000007023 **65.** 372,000,000

En los problemas 66 y 67 use notación científica para determinar la expresión dada.

66. $\dfrac{(16{,}000)(5{,}000{,}000)^2}{0.00008}$ **67.** $\sqrt{(0.0001)(587{,}000)/0.04}$

68. En 1982 los norteamericanos gastaron US$17,600 millones en deportes, en actividades relacionadas con el deporte y en equipos deportivos. Escriba este número (a) en forma decimal y (b) en notación científica.

En los problemas 69 al 76, ejecute las operaciones indicadas y simplifique.

69. $\left(4x^3-3x^2+6x-2\right)-\left(x^2-3x+4\right)$

70. $\left(2z^3-3z\right)^2$

71. $\left(3x^4-\sqrt{2x^2}\right)+x\left(\sqrt{2x}+5\right)$ **72.** $\dfrac{x^2y^2-4xy^3+7x^3y^2}{xy^2}$

73. $(u-v)\left(u^2+uv+v^2\right)$ **74.** $\left(t^2+4z\right)^3$

75. $\left(3x^2+5y\right)\left(3x^2-5y\right)$ **76.** $(y+1)(y-3)(y+2)$

En los problemas 77 al 84, factorice los polinomios dados usando coeficientes enteros.

77. $12x^2-19x-18$ **78.** $81a^4-16x^4$

79. $4t^4-4t^2s+s^2$ **80.** $a^2-2ab+b^2-c^2+4cd-4d^2$

81. $27x^3+125y^6$ **82.** $2xy+3y-6x-9$

83. $x^2+6xy+9y^2+2x+6y$ **84.** $4w^2+40wz+100z^2$

En los problemas 85 al 94, ejecute las operaciones indicadas y simplifique.

85. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}$ **86.** $\dfrac{a^2-1}{a}\div\dfrac{a^3-1}{5x^2}$

87. $\dfrac{\dfrac{4}{(x+h)^3}-\dfrac{4}{x^3}}{h}$ **88.** $\dfrac{2+x^{-3}}{2-x^{-3}}$

89. $\dfrac{\sqrt{c}+1/d}{d+1/\sqrt{c}}$

90. $\dfrac{(x+1)^{5/2}\left(3x^2\right)-\left(x^3\right)(5/2)(x+1)^{3/2}}{\left[(x+1)^{5/2}\right]^2}$

91. $\left(x^{-2}-y^{-2}\right)(y-x)^{-3}$ **92.** $(1/x+1/y)(1/(x+y))$

93. $\dfrac{\dfrac{r}{s}+2}{\dfrac{s}{r}+2}$ **94.** $\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{b^2}{a^2}}{a/b-b/a}$

En los problemas 95 y 96, racionalice el denominador y simplifique.

95. $\dfrac{4xy^2}{\sqrt[3]{2xy^2}}$ **96.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}-\sqrt{b}}$

En los problemas 97 al 100, racionalice el numerador y simplifique.

97. $\dfrac{\sqrt{5(1+x)}-\sqrt{2}}{x}$ **98.** $\dfrac{\sqrt{(t+u)^2-3}+\sqrt{t^2-3}}{2u}$

99. $\dfrac{\sqrt[3]{ab}}{7}$ **100.** $\dfrac{\sqrt[4]{(x+1)^3}}{3}$

2

Ecuaciones e inecuaciones

Un profesor griego

Poco se conoce de la vida personal del matemático griego Diofante, que vivió en Alejandría, Egipto, en el siglo III de la era cristiana. Su trabajo, sin embargo, fue de enorme importancia para el desarrollo del álgebra e influyó grandemente sobre los matemáticos europeos del siglo XVII. Escribió varios tratados, de los cuales el más famoso es *Aritmética*. Este texto maneja principalmente tipos especiales de ecuaciones llamadas ahora *ecuaciones diofantinas*. La leyenda asevera que sobre la tumba de Diofante se inscribió el siguiente epitafio:

Diofante pasó una sexta parte de su vida en la niñez, una doceava parte en la juventud y una séptima parte soltero. Cinco años después de su matrimonio nació un niño que murió cuatro años antes de que su padre cumpliera la mitad de su edad (final)

Si x representa la edad de Diofante al morir, entonces la información anterior puede representarse con la ecuación

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

En este capítulo examinaremos técnicas para solucionar varias clases de ecuaciones (incluyendo la anterior) e inecuaciones. Veremos también cómo aplicar estos métodos para obtener soluciones de problemas prácticos.

2.1 Ecuaciones, identidades y ecuaciones lineales

Una ecuación es una afirmación de que dos expresiones son iguales, mientras que una inecuación plantea que una expresión es menor que otra. Una amplia gama de problemas de la vida real puede expresarse como ecuación, o como inecuación. Comenzamos esta sección con cierta terminología que describe las ecuaciones y sus soluciones.

Cuando dos expresiones se igualan, se obtiene una **ecuación.** Por ejemplo,

$$\sqrt{x-1} = 2, \qquad x^2 - 1 = (x+1)(x-1), \qquad \text{y} \qquad |x+1| = 5$$

son ecuaciones con la variable x.

Una *solución,* o ***raíz,*** de una ecuación es cualquier número que, sustituido en la ecuación, la convierte en una proposición verdadera. Se dice que un número *satisface la ecuación* si es una solución de la ecuación. *Resolver una ecuación* significa encontrar sus soluciones.

EJEMPLO 1

El número 2 es una solución de $3x - 2 = x + 2$, porque

$$3(2) - 2 = 2 + 2$$

Como lo veremos más adelante, no hay otros valores de x que satisfagan esta ecuación.

Una ecuación se llama **identidad** si todos los números del dominio de la variable la satisfacen. Si hay por lo menos un número en el dominio de la variable que no satisfaga la ecuación, entonces se dice que es una **ecuación condicional.**

EJEMPLO 2

(a) La ecuación

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

se satisface con la serie de todos los números reales excepto en $x = 1$. Puesto que 1 no está en el dominio de la variable, la ecuación es una identidad.

(b) El número 3 está en el dominio de la variable en la ecuación

$$4x - 1 = 2$$

pero no satisface esta ecuación, puesto que $4(3) - 1 \neq 2$. Así, $4x - 1 = 2$ es una ecuación condicional.

Decimos que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones. Por ejemplo,

$$2x - 1 = 0, \qquad 2x = 1, \qquad \text{y} \qquad x = \tfrac{1}{2}$$

son ecuaciones equivalentes. Generalmente, resolvemos una ecuación encontrando una ecuación equivalente que tenga soluciones que se determinen fácilmente. Se puede demostrar que las siguientes operaciones producen ecuaciones equivalentes.

Operaciones que producen ecuaciones equivalentes

(i) Sume o reste de cada lado de una ecuación la misma expresión que represente un número real.

(ii) Multiplique o divida cada lado de una ecuación por la misma expresión que represente un número real diferente de cero.

EJEMPLO 3

Resuelva $3x - 6 = 0$.

Solución. Obtenemos la siguiente lista de ecuaciones equivalentes.

$$
\begin{aligned}
3x - 6 &= 0 \\
3x - 6 + 6 &= 0 + 6 && \Leftarrow \boxed{\text{Por (i)}} \\
3x &= 6 \\
\tfrac{1}{3}(3x) &= \tfrac{1}{3}(6) && \Leftarrow \boxed{\text{Por (ii)}} \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Puesto que la última ecuación tiene como única solución 2, se deduce que 2 es la única solución de la ecuación *original*.

Nota de advertencia: ya que es posible cometer errores aritméticos o algebraicos cuando se soluciona una ecuación, siempre es buena práctica verificar cada solución, sustituyéndola en la ecuación original. Para verificar la solución en el ejemplo 3, sustituimos 2 por x en $3x - 6 = 0$:

$$
\begin{aligned}
3(2) - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\
6 - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

ECUACIONES LINEALES

Una ecuación de la forma

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0 \tag{1}$$

donde a y b son números reales, se llama **ecuación lineal.** La ecuación del ejemplo 3 es una ecuación lineal. Para solucionar (1), procedemos de una manera similar al ejemplo 3:

$$
\begin{aligned}
ax + b &= 0 \\
ax + b - b &= 0 - b && \Leftarrow \boxed{\text{Por (i)}} \\
ax &= -b
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(-b) \quad \boxed{\text{Por(ii)}}$$

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Así la ecuación lineal $ax + b = 0$, $a \neq 0$ tiene exactamente una solución: $x = -b/a$.

En el resto de esta sección, nos ocuparemos de ecuaciones que pueden transformarse en ecuaciones lineales equivalentes.

EJEMPLO 4

Resuelva $2x - 7 = 5x + 6$.

Solución. Debe dar razones por las cuales las siguientes ecuaciones son equivalentes.

$$2x - 7 = 5x + 6$$
$$2x - 7 - 5x = 5x + 6 - 5x$$
$$-3x - 7 = 6$$
$$-3x - 7 + 7 = 6 + 7$$
$$-3x = 13$$
$$-\tfrac{1}{3}(-3x) = -\tfrac{1}{3}(13)$$
$$x = -\tfrac{13}{3}$$

Así, la solución de la ecuación original es $-\frac{13}{3}$.

Cuando los dos lados de la ecuación se multiplican por una expresión que contenga una variable, la ecuación resultante puede *no* ser equivalente a la original, por esta razón hemos excluido la multiplicación por 0 en la operación (ii). Por ejemplo, la multiplicación de la ecuación $2x = 4$ por x produce $2x^2 = 4x$. Las dos ecuaciones no son equivalentes, ya que 0 es una solución de la última ecuación pero no es una solución de la primera. Denominamos a 0 una **solución externa.**

EJEMPLO 5

Resuelva

$$2 - \frac{1}{z+1} = \frac{z}{z+1} \tag{2}$$

Solución. Multiplicando los dos lados de la ecuación dada por $z + 1$ produce una ecuación lineal:

$$(z+1)\left(2 - \frac{1}{z+1}\right) = (z+1)\left(\frac{z}{z+1}\right)$$
$$2z + 2 - 1 = z \tag{3}$$

La solución de la ecuación (3) es $z = -1$. Puesto que hemos multiplicado por una expresión que contiene una variable, debemos verificar $z = -1$, sustituyéndola en la ecuación original (2). Obtenemos

$$2 + \frac{1}{-1+1} = \frac{-1}{-1+1}, \quad \text{o} \quad 2 + \frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$$

Ya que la división por 0 no es permisible, $z = -1$ no es una solución de la ecuación original. Así, 0 es una solución extraña, y la ecuación (2) no tiene soluciones.

Nota de advertencia: como lo muestra el ejemplo 5, es esencial verificar una "solución" que se ha obtenido como resultado de multiplicar ambos lados de una ecuación por una expresión que puede ser 0 para algunos valores de la variable.

EJEMPLO 6

Resuelva

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} = \frac{2}{x^2-4x} \tag{4}$$

Solución. Para eliminar los denominadores en (4), multiplicamos ambos lados por el MCM de los denominadores de las fracciones en la ecuación:

$$x(x-4)\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}\right] = x(x-4)\left[\frac{2}{x^2-4x}\right]$$

$$(x-4) + x = 2$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Sustituyendo $x = 3$ en (4), encontramos que este valor satisface la ecuación original.

EJERCICIO 2.1

En los problemas 1 al 6, determine si los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes.

1. $x = 8; x - 8 = 0$

2. $x = 12; 12 + x = 0$

3. $5y - (y - 2) = 5; 4y = 3$

4. $-2z - 4 = 6z + 10; -4z = 7$

5. $t + 1 = 1; \dfrac{t+1}{t} = \dfrac{1}{t}$

6. $x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + 4x - 2; 5x + 4 = 2x + 6$

En los problemas 7 al 48, solucione la ecuación dada.

7. $2x + 14 = 0$

8. $3x - 5 = 0$

9. $7z + 8 = -6$

10. $-5w + 1 = 2$

11. $5y - 3 = y + 9$

12. $7(y + 1) - 2 = 5(y + 1) + 2$

13. $x - (4 - x) = 5(x + 1) + x$

14. $1/3x - 2/5 = 0$

15. $x[x - 3(6 - 3x) + 2x] = 6(2x^2 - 1)$

16. $3/8x + 7/8 = -1$

17. $2 - 6t + 2(3 - t) = (t - 3)5 - 3$

18. $1/3(t - 2) + 2/3t = 2t + 4/3$

19. $1/3(u - 3/2)(u + 3/2) = u(u/3 - 1/4)$

20. $0.2x + 1.2 = 0.5$

21. $0.27x - 1.75 = -0.7$

22. $2.1x - 3 = 0.5x + 0.2$

23. $3.5x - 0.5x = 0.2(3 - x)$

24. $-3.6z + 1.3 = 0.2(z - 3)$

25. $\sqrt{2}x - 1/\sqrt{2} = \sqrt{8}x$

26. $-2x/\sqrt{3} + 1 = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x$

27. $p^2 + 4p - 2 = p^2 - p + 8$

28. $(r - 3)^2 = (r^2 - 5r) + 3$

29. $2r^2 - 3 = -3 - 2(2r - r^2)$

30. $w(w + 4) = w^2 - 5w + 16$

31. $(x - 2)^3 = x^2(x - 6) + 2x$

32. $(x + 4)^2 + (x + 3)^3 = x^3 + 10x^2 + 64$

33. $2 + 1/x = 3 + 2/x$

34. $\frac{2}{t}-1=5-\frac{1}{t}$

35. $\frac{3}{s-2}=\frac{1}{s+2}$

36. $\frac{3}{2(x-3)}+\frac{x-4}{(3-x)(4-x)}=0$

37. $\frac{1}{y-2}=\frac{2y+1}{y^2-4}$

38. $\frac{x}{x-3}=3+\frac{4}{x-3}$

39. $\frac{4-z}{z-3}=\frac{z}{z+3}-2$

40. $\frac{2x}{x-2}-2=\frac{-4}{2-x}$

41. $\frac{3}{(x-3)^2}+\frac{4}{(x+3)}=\frac{4x}{(x-3)(x+3)}$

42. $\frac{3}{2x-1}-\frac{5}{4x-2}=\frac{3}{8x^2-8x+2}$

43. $\frac{8}{4w-8}-\frac{6}{3w-6}=0$

44. $\frac{g}{g-3}-\frac{6}{g^2-2g-3}=1$

45. $\frac{x^2+3}{x-3}-\frac{x+6}{3-x}=1$

46. $\frac{2x-4}{x-3}=\frac{2}{x-3}+3$

47. $\frac{6}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}=\frac{9}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}$

48. $\frac{1}{3\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{x}}=-\frac{5}{\sqrt{x}-1}$

49. Halle c de manera que $3y-3c=3y-5$ sea una identidad.

50. Halle a de modo que $(x-1)(x+a)=x^2-2x-a$ sea una identidad.

51. Encuentre a de tal modo que la solución de $3x+3a=6x-a$ sea 4.

52. Halle d de manera que la ecuación $\frac{2x-1}{x+2}-\frac{x+d}{x+2}=0$ no tenga solución.

53. Halle a de modo que $5-z=1$ y $3z+2a=10$ sean ecuaciones equivalentes.

54. Halle la relación entre a y b si $ax+b=0$ tiene la solución $x=5$.

55. Considere lo siguiente

$$x=-1$$
$$x^2+x=x^2-1$$
$$x(x+1)=(x-1)(x+1)$$
$$x=x-1$$
$$0=-1$$

¿Cómo se obtiene el enunciado falso $0=-1$ a partir de la proposición $x=-1$?

56. Halle a de modo que $(x-1)(x+a)=x^2-2x-a$ sea una identidad.

57. La velocidad v en pies/segundo de una bola de tenis t segundos después de que ha sido lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 1 pie/s está dada por $v=-32t+7$.
¿Cuántos segundos han transcurrido cuando
(a) $v=5$pies/s
(b) $v=3$ pies/s?

58. La relación entre la temperatura medida en grados celsius (T_C) y en grados Fahrenheit (T_F) está dada por $T_C=5/9\ (T_F-32)$
Halle la temperatura Fahrenheit correspondiente si:
(a) la temperatura normal del cuerpo humano es de 37°C.
(b) la temperatura ambiente normal es 21.11°C.

59. Resuelva la ecuación

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

(dada al iniciar el capítulo) para determinar cuánto tiempo vivió Diofante.

60. Estudios empíricos sobre la nevasca en la Gran Bretaña encontraron que el número de días D, en un año en que el suelo está cubierto de nieve aumenta linealmente con la altitud.

$$D=0.155H-11$$

donde H es la altura medida en metros.
(a) Según esta fórmula, ¿cuántos días hay una capa de nieve al nivel del mar?
(b) ¿A qué altura esta fórmula predice una capa de nieve durante un año completo (365 días)?

61. Para un gas ideal a baja presión, el volumen V a t grados Celsius está dado por:

$$V=V_0(1+t/273.15)$$

donde V_0 es el volumen a 0°C. ¿A qué temperatura es $V=3/4\ V_0$ para un gas ideal a baja presión?

62. Como lo informó Thomas Vaughan en *Science and Sport* (Boston: Little, Brown & Co. 1970), una serie de 4,200 medidas tomadas a 136 atletas mundiales se convirtieron en la fórmula para la velocidad máxima del corazón l_{max} en latidos por minuto durante el ejercicio.

$$l_{max}=0.981\,l_5+5{,}948$$

donde l_5 es la velocidad del corazón tomada dentro de los cinco segundos posteriores a la terminación del ejercicio.
(a) Si la velocidad máxima del corazón de un campeón de atletismo es de 215, encuentre la velocidad del corazón inmediatamente después del ejercicio.
(b) Si la velocidad máxima del corazón de un ciclista internacional es de 180, encuentre la velocidad del corazón inmediatamente después del ejercicio.

2.2 Fórmulas y aplicaciones

Muchas aplicaciones de las matemáticas requieren el uso de fórmulas que incluyan varias variables. Frecuentemente, es necesario cambiar una fórmula dada por una forma más conveniente. Como lo ilustran los siguientes tres ejemplos, podemos despejar una variable deseada en términos de las variables restantes, encontrando ecuaciones equivalentes.

EJEMPLO 1

El área A de un triángulo con base b y altura h está dada por $A = \frac{1}{2}\,bh$ (véase figura 1).

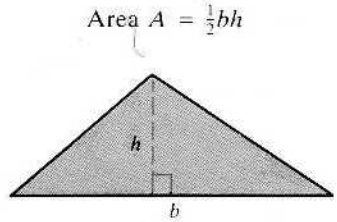


FIGURA 1

Solución. Para despejar h, primero eliminamos los fraccionarios de la ecuación, multiplicando ambos lados por 2:

$$A = \tfrac{1}{2}\,bh$$
$$2A = 2(\tfrac{1}{2}\,bh)$$
$$2A = bh$$

Para aislar h, multiplicamos ambos lados por $1/b$ y simplificamos:

$$\frac{1}{b}(2A) = \frac{1}{b}(bh)$$
$$\frac{2A}{b} = h$$
$$h = \frac{2A}{b}$$

EJEMPLO 2

El área A de un trapecio con bases b y B y altura h está dada por $A = \frac{1}{2}h\,(b + B)$ (véase figura 2). Despeje B en términos de las variables restantes.

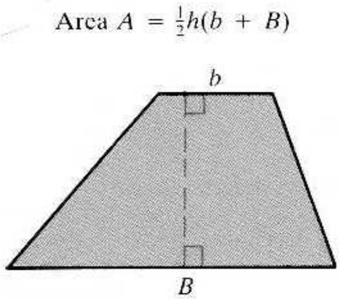


FIGURA 2

Solución. Procedemos como sigue para aislar B:

$$A = \tfrac{1}{2}\,h(b + B)$$
$$2A = h(b + B)$$
$$\frac{2A}{h} = b + B$$
$$\frac{2A}{h} - b = B$$

o $$B = \frac{2A}{h} - b$$

Una forma equivalente de la última ecuación es $B = (2A - hb)/h$.

EJEMPLO 3

La resistencia total R de un circuito eléctrico que contiene las dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, como lo muestra la figura 3, está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

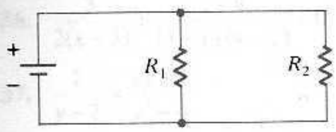


FIGURA 3

Despeje R_2 en términos de R y R_1

Solución. Primero eliminamos las fracciones de la ecuación multiplicando ambos lados por RR_1R_2 que es el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones en la ecuación:

$$RR_1R_2\left(\frac{1}{R}\right) = RR_1R_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$R_1R_2 = RR_2 + RR_1$$

Para obtener una ecuación equivalente con todos los términos que contengan a R_2 al lado izquierdo, restamos RR_2 de ambos lados:

$$R_1R_2 - RR_2 = RR_1$$

Puesto que R_2 es un factor común de cada término del lado izquierdo, podemos escribir

$$R_2(R_1 - R) = RR_1$$

Dividiendo ambos lados por $R_1 - R$ nos da

$$R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$$

PROBLEMAS DE PALABRAS

El álgebra es útil para solucionar muchos problemas prácticos que incluyen razón de cambio, mezclas, dinero, etc. Puesto que estos problemas se expresan con palabras, se llaman **problemas de palabras.** El reto de los problemas de palabras consiste en traducir las palabras en una ecuación algebraica apropiada. Ya que no hay un procedimiento único para hacer esta traducción, se requiere trabajo, práctica y paciencia para volverse un experto en la solución de problemas de palabras. Las siguientes sugerencias pueden ser útiles.

Sugerencias para solucionar problemas de palabras

1. Lea el problema cuidadosamente.
2. Relea el problema e identifique una cantidad desconocida que se necesite encontrar.
3. Si es posible, haga un diagrama.
4. Asigne una variable, digamos x, que represente la cantidad desconocida. (¡Escriba la definición de esta variable en su hoja!)
5. Si es posible, represente cualquier otra cantidad que haya en el problema en términos de x. (¡Escriba cada una de estas cantidades en su hoja!)
6. Escriba una ecuación (o inecuación) que exprese con precisión la relación descrita en el problema.
7. Solucione la ecuación (o inecuación).
8. Verifique que su respuesta concuerde con todas las condiciones planteadas en el problema.

PROBLEMAS DE EDAD

Como primer ejemplo, considere el siguiente problema de edad.

EJEMPLO 4

Hace dos años John tenía cinco veces la edad de Bill. Ahora es 8 años mayor que Bill. Encuentre la edad actual de John.

Solución. La cantidad desconocida que va a ser determinada es la edad actual de John, entonces asignamos

$$x = \text{edad actual de John}$$

Luego podemos representar las otras cantidades del problema en términos de x:

$$x - 8 = \text{edad actual de Bill}$$
$$x - 2 = \text{edad de John hace dos años}$$
$$(x - 8) - 2 = x - 10 = \text{edad de Bill hace dos años}$$

Puede encontrar útil enumerar la información en forma tabular, como se muestra a continuación:

	EDAD ACTUAL	EDAD HACE DOS AÑOS
John	x	$x - 2$
Bill	$x - 8$	$x - 10$

Una ecuación que expresa la relación de sus edades hace dos años es

$$x - 2 = 5(x - 10)$$

Resolvemos esta ecuación

$$x - 2 = 5x - 50$$
$$48 = 4x$$
$$x = 12$$

Entonces, la edad actual de John es 12.

Prueba: si John tiene ahora 12 años, Bill debe tener 4. Hace dos años John tenía 10 y Bill 2. Puesto que $10 = 5(2)$, la respuesta corresponde.

PROBLEMAS DE INVERSION

Muchos **problemas de inversión** utilizan la fórmula del interés simple

$$I = Crt$$

donde I es la cantidad de interés ganada sobre una suma de dinero C (llamada capital) invertida a una tasa de interés simple de porcentaje r por t años. Como lo muestra el siguiente ejemplo, puede ser útil organizar los datos en forma tabular.

EJEMPLO 5

Una mujer de empresa planea invertir un total de US\$24,000. Parte de él se pondrá en un certificado de ahorros que paga 9% de interés simple, y el resto en un fondo de inversiones que produce 12% de interés simple. ¿Cuánto debe invertir en cada uno para obtener una ganancia de 10% sobre su dinero después de un año?

Solución. Sea

$x =$ la cantidad en dólares invertida en el certificado de ahorros,

entonces $24{,}000 - x =$ la cantidad de dólares puesta en el fondo de inversiones.

La siguiente tabla resume la información dada.

	CAPITAL C	TASA DE INTERES r	TIEMPO t	INTERES GANADO $I = Crt$
Certificado de ahorros	x	0.09	1	$x(0.09)(1) = 0.09x$
Fondo de inversiones	$24{,}000 - x$	0.12	1	$(24{,}000 - x)(0.12)(1)$ $= 0.12(24{,}000 - x)$
Inversión equivalente	24,000	0.10	1	$(24{,}000)(0.10)(1)$ $= 2{,}400$

Puesto que el interés combinado procedente del certificado de ahorros y el fondo de inversiones va a igualar el de una inversión total equivalente hecha a 10% de interés simple, tenemos

$$0.09x + 0.12(24{,}000 - x) = 0.10(24{,}000)$$

Despeje x como sigue:

$$\begin{aligned} 9x + 12(24{,}000 - x) &= 10(24{,}000) \\ 9x + 288{,}000 - 12x &= 240{,}000 \\ -3x &= -48{,}000 \\ x &= 16{,}000 \end{aligned}$$

Entonces, se deben invertir US\$16,000 en el certificado de ahorros, y se deben poner US\$24,000 − US\$16,000 = US\$8,000 en el fondo de inversiones.

Prueba: la suma de US\$16,000 y US\$8,000 es US\$24,000. El interés ganado sobre el certificado de ahorros es US\$16,000 (0.9)(1) = US\$1,440. El interés ganado sobre el fondo de inversiones es de US\$8,000 (0.12) (1) = US\$960. Si los US\$24,000 se invirtieron a 10%, el interés ganado sería (US\$24,000)(0.10) (1) = 2,400. Puesto que US\$1,440 + US\$960 = US\$2,400, la respuesta corresponde.

PROBLEMAS DE RAZON DE CAMBIO

Si un objeto se mueve a una velocidad constante r, entonces la distancia d que recorre en t unidades de tiempo está dada por

$$d = rt \tag{5}$$

Otras formas de (5) que pueden ser útiles para solucionar ciertos problemas de razón de cambio son

$$r = \frac{d}{t} \quad \text{y} \quad t = \frac{d}{r}$$

Comúnmente la parte más difícil de solucionar en un problema de distancia es determinar qué relación expresar como ecuación. Puede ser útil considerar las siguientes preguntas:

¿Hay dos distancias (o tiempos o velocidades) que sean iguales?
¿Es la suma de dos distancias (o tiempos o velocidades) una constante?
¿Es la diferencia de dos distancias (o tiempos o velocidades) una constante?

EJEMPLO 6

A una motociclista le toma 1 hora y media más en la noche que en el día viajar entre dos ciudades. En la noche recorre un promedio de 40 millas por hora mientras que en el día puede recorrer un promedio de 55 millas por hora. Encuentre la distancia entre las dos ciudades.

Solución. Asignemos $d =$ a la distancia entre las dos ciudades. La siguiente tabla muestra la distancia, velocidad y tiempo de cada viaje.

	DISTANCIA d	VELOCIDAD r	TIEMPO $t = \frac{d}{r}$
Noche	d	40	$\frac{d}{40}$
Día	d	55	$\frac{d}{55}$

Puesto que le toma 1.5 horas más recorrer la distancia entre las dos ciudades en la noche, tenemos

$$\frac{d}{40} - \frac{d}{55} = 1.5$$

Multiplicamos ambos lados de esta ecuación por (40)(55) = 2,200 y despejamos:

$$55d - 40d = 3{,}300$$
$$15d = 3{,}300$$
$$d = 220$$

La distancia entre las dos ciudades es de 200 millas.

Prueba: su tiempo en la noche es de $220/40 = 5.5$ horas, y durante el día es $220/5 = 4$ horas. Puesto que $5.5 - 4 = 1.5$, la respuesta corresponde.

PROBLEMAS DE MEZCLAS

Los **problemas de mezclas** se dan principalmente en química, farmacología, manufactura y situaciones de la vida diaria. Cuando resolvemos problemas mezclas, nos centramos en la cantidad que tiene un elemento en cada una de las diferentes combinaciones. De nuevo, puede ser útil organizar la información en forma tabular, como lo vemos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7

Halle cuántos litros de alcohol puro deben añadirse a 15 L de solución que contiene 20% de alcohol para que la mezcla resultante sea de 30% de alcohol.

Solución

Sea $x =$ cantidad de alcohol puro añadida

Entonces $15 + x =$ cantidad en litros en la nueva solución.

La siguiente tabla resume la información dada.

	LITROS DE SOLUCION	CONCENTRACION DE ALCOHOL	LITROS DE ALCOHOL
Solución original	15	0.20	0.20(15)
Alcohol puro	x	1.00	$1.00x$
Mezcla resultante	$15 + x$	0.30	$0.30(15 + x)$

Puesto que la cantidad de alcohol en la solución original más la cantidad de alcohol puro añadida balancean la cantidad de alcohol en la mezcla resultante, tenemos:

$$0.20(15) + 1.00x = 0.30(15 + x)$$
$$3 + x = 4.5 + 0.3x$$
$$0.7x = 1.5$$
$$x = \tfrac{15}{7}$$

La cantidad de alcohol puro añadida es $\frac{15}{7}$ L.

Prueba: si se agregan $\frac{15}{7}$ L de alcohol, la nueva solución sumando $15 + \frac{15}{7} = \frac{120}{7}$ L contiene $(0.20)(15) + \frac{15}{7} = \frac{36}{7}$ L de alcohol. Ya que $\frac{36}{7}/\frac{120}{7} = 0.30$, la nueva solución es de 30% de alcohol y la respuesta corresponde.

PROBLEMAS DE TRABAJO

Muchas personas (o máquinas) que hacen el mismo trabajo, cada uno de ellos trabajando a una velocidad constante, pueden completar el trabajo más rápido que si alguno de ellos trabajara solo. Entonces, para solucionar **problemas de trabajo,** utilizamos el siguiente principio básico. Si un individuo puede hacer todo el trabajo en T unidades de tiempo, se concluye que en x unidades de tiempo, x/T del trabajo se completa. Por ejemplo, si una persona puede hacer un trabajo completo en 5 horas, entonces en 3 horas pueden hacerse $\frac{3}{5}$ del trabajo.

EJEMPLO 8

Trabajando sola, una bomba A puede llenar un tanque en 2 horas y una bomba B puede llenar el mismo tanque en 3. Determine qué tan rápido las bombas pueden llenar el tanque trabajando juntas.

Solución. Asignando a

$x =$ el número de horas que ambas bombas requieren para llenar el tanque juntas.

Entonces

$\frac{x}{2} =$ fracción del trabajo completo culminado en x horas por una bomba A y

$\frac{x}{3}$ = fracción de todo el trabajo culminado en x horas por una bomba B.

Esta información se sintetiza en el siguiente cuadro.

	TIEMPO (EN HORAS) PARA COMPLETAR TODO EL TRABAJO	FRACCION DE TRABAJO COMPLETADO EN x HORAS
Bomba A	2	$\frac{x}{2}$
Bomba B	3	$\frac{x}{3}$
Ambas	x	1

La suma de las fracciones hechas por cada bomba en x horas es 1, ya que las dos bombas, al trabajar juntas completan todo el trabajo en x horas. Entonces, tenemos

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$$

Despejando x, encontramos

$$3x + 2x = 6$$
$$5x = 6$$
$$x = \tfrac{6}{5}$$

Trabajando ambas bombas les toma $\frac{6}{5}$ horas (1 hora 12 min) para llenar el tanque.

Prueba: en $\frac{6}{5}$ horas la bomba A llena $\frac{6}{5}/2 = \frac{3}{5}$ de tanque, y la bomba B llena $\frac{6}{5}/3 = \frac{2}{5}$ de tanque. Puesto que $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$, la solución corresponde.

Además de la edad, la inversión, la razón de cambio, la mezcla y los problemas de trabajo que acabamos de considerar, hay una gran variedad de problemas de palabras. Terminamos esta sección con dos ejemplos adicionales.

EJEMPLO 9

Un campo rectangular que es 20 metros (m) más largo que ancho está circundado de exactamente 100 m de cercado ¿Cuáles son las dimensiones del campo?

Solución. La descripción geométrica de este problema nos obliga a hacer un diagrama. (Véase figura 4).

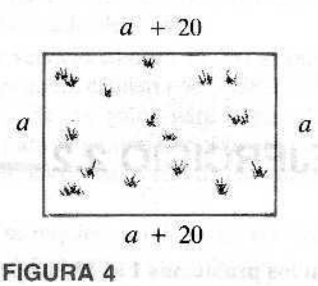


FIGURA 4

Asignando a = ancho del campo en metros

Entonces $a + 20$ = longitud del campo en metros.

Ya que el perímetro del campo es de 100 m, tenemos

$$100 = 2a + 2(a + 20)$$

Despejando a, encontramos que

$$100 = 4a + 40$$
$$60 = 4a$$
$$15 = a$$

Así, el ancho es $a = 15$ y la altura es $a + 20 = 35$ m.

Prueba: la altura es de 20 m más que el ancho, ya que $35 - 15 = 20$, y la cantidad de cercado requerida es $2(35) + 2(15) = 70 + 30 = 100$. Entonces, la respuesta corresponde.

EJEMPLO 10

Un estudiante saca un puntaje de 75 y 82 en sus dos primeros exámenes. ¿Qué puntaje en el próximo examen elevará a 85 su promedio?

Solución. Sea

$$x = \text{puntaje en el tercer examen.}$$

Entonces, el promedio de los puntajes de los 3 exámenes se representa por

$$\frac{75 + 82 + x}{3}$$

Ya que este promedio debe igualarse a 85, tenemos

$$\frac{75 + 82 + x}{3} = 85$$

Despejando x, obtenemos

$$\begin{aligned} 75 + 82 + x &= 3(85) \\ 157 + x &= 255 \\ x &= 98 \end{aligned}$$

En consecuencia, un puntaje de 98 en el tercer examen elevará a 85 el promedio del estudiante.

Prueba: si los tres puntajes de los exámenes son 75, 82 y 98, el promedio del estudiante será

$$\frac{75 + 82 + 98}{3} = 85$$

Por tanto, la respuesta corresponde.

A medida que empiece a hacer los ejercicios, recuerde seguir las sugerencias dadas en la página 68. Leer y profundizar los ejemplos de esta sección algunas veces puede ayudarle. Examine cómo seguimos nosotros las sugerencias. Sobre todo, ¡no se desanime!

EJERCICIO 2.2

En los problemas 1 al 18, despeje la variable indicada en términos de las variables restantes.

1. Circunferencia de un círculo
   $C = 2\pi r$, para r
2. Perímetro de un rectángulo
   $P = 2a + 2l$, para l
3. Interés simple
   $I = Crt$, para r
4. Volumen de un paralelepípedo rectangular
   $V = lah$, para h
5. Area lateral de la superficie de un cilindro
   $S = 2\pi rh$, para r
6. Línea recta; forma general
   $ax + by + c = 0$, para y
7. Línea recta: pendiente-intersecto
   $y = mx + b$, para m

8. Cantidad acumulada bajo interés simple
$$A = C + Crt, \text{ para } C$$

9. Ecuación de la recta: intersectos en x y en y
$$x/a + y/b = 1, \text{ para } x$$

10. Ecuación de la recta: punto pendiente
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m, \text{ para } y$$

11. Resistencia, en circuitos paralelos
$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \text{ para } R_1$$

12. Capacitancia en círculo en serie
$$C = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2}, \text{ para } C_2$$

13. Término enésimo de una sucesión aritmética
$$a_n = a + (n-1)d, \text{ para } n$$

14. Ley de gravitación universal de Newton
$$F = g\frac{m_1 m_2}{r_2}, \text{ para } m_2$$

15. Cuerpo de caída libre
$$S = 1/2gt^2 + v_0 t, \text{ para } v_0$$

16. Suma de una serie geométrica
$$S = \frac{a}{1-r}, \text{ para } r$$

17. Suma parcial de una sucesión geométrica
$$S = \frac{a - rl}{1-r}, \text{ para } l$$

18. Area de la superficie de un prisma rectangular
$$A = 2(hl + lw + hw), \text{ para } h$$

19. Encuentre dos números cuya suma sea 50 y cuya diferencia sea 26.

20. El cociente de dos números es 4. Si un número es 39 menos que el otro, encuentre los dos números.

21. Encuentre tres números enteros consecutivos cuya suma sea 48.

22. La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos pares es 108. Encuentre los dos números.

23. En 5 años Bryan tendrá 3 veces la edad que tenía hace 7 años; ¿cuántos años tiene?

24. La firma sanitaria Papik e hijo anuncia "33 años de experiencia" en higiene sanitaria. Si el padre tiene 17 años más de experiencia en higiene sanitaria que su hijo, ¿cuánto tiempo de experiencia en higiene sanitaria tiene cada uno? ¿Cuánto invirtió en el título?

25. El señor Janette tiene tres inversiones de las que recibe un ingreso anual de US\$3,965. Una inversión de US\$8,500 está a una tasa de interés anual de 9%; otra inversión de US\$11,000 está a una tasa de interés anual de 10%. ¿Cuál es la tasa de interés anual que recibe sobre la tercera inversión de US\$15,000?

26. Una pareja tiene US\$48,000 para invertir. Si invierte US\$18,000.00 a 15% y US\$16,000.00 a 10%, ¿a qué porcentaje debe invertir el resto para tener un ingreso de US\$5,000 proveniente de sus inversiones?

27. La señora Beecham invirtió parte de US\$12,000 en un certificado de ahorros a 9% de interés simple. El resto lo invirtió en un título que producía 14%. Si recibió un total de US\$1,400 de interés por el primer año, ¿cuánto dinero invirtió en el título?

28. Los Wilson tienen US\$30,000.00 invertidos a 12% y otra suma invertida a 8.5%. Si el ingreso anual sobre la cantidad total invertida es equivalente a un porcentaje de 10% sobre el total, ¿cuánto han invertido a 8.5%?

29. Un auto viaja del punto A al punto B a una velocidad promedio de 55 mph, y regresa a una velocidad de 50 mph. Si todo el viaje tomó 7 horas, encuentre la distancia entre A y B.

30. La velocidad de una lancha de motor en aguas quietas es de 28 km/h; sabiendo que recorre 5.5 km cuando avanza contra la corriente, en el mismo tiempo que recorre 8.5 km a favor de ella, hallar la velocidad de la corriente.

31. Una mujer puede ir caminando al trabajo a una velocidad de 3 mph, o en una bicicleta a una velocidad de 12 mph. Si le toma una hora más caminando que yendo en bicicleta, encuentre el tiempo que le toma caminar para ir al trabajo.

32. Dos autos, A y B, parten de un mismo punto p y recorren un trayecto rectilíneo con velocidades medias de 70 y 90 km/h, respectivamente. Sabiendo que B parte 2 horas después que A, hallar (a) el tiempo y (b) la distancia recorrida hasta que se encuentran.

33. David viajó en autobús a una ciudad a 54 millas de distancia y regresó a casa en su bicicleta. El autobús viajó al doble de la velocidad de la bicicleta y el viaje redondo duró 3 3/4 horas, ¿a qué velocidad viajó David en su bicicleta?

34. Un cohete llevó una cápsula a la atmósfera. La cápsula aterrizó 72 minutos más tarde, después de hacer un controlado descenso con una velocidad vertical promedio de 420 km/h. Si el cohete tenía una velocidad vertical promedio de 1,010 km/h desde el despegue hasta que se lanzó la cápsula, ¿a qué altura se lanzó la cápsula?

35. El radiador de un automóvil contiene 10 qt de una mezcla de agua y 20% de anticongelante. ¿Qué cantidad de esta mezcla debe vaciarse y remplazarse por anticongelante puro para obtener una mezcla de 50% en el radiador?

36. Un joyero mezcló 1,200 gramos de una aleación de oro con 2,200 gramos de otra que contiene 38% más de oro que la primera. Si la aleación resultante tiene 76% de oro, ¿cuál es el porcentaje de este metal en cada aleación?

37. El jefe de una estación de servicio compró 15,000 galones de gasolina corriente y de primera calidad por US\$8,550. Si el precio mayorista fue de 55¢ por galón para la gasolina corriente y 60¢ por galón para la gasolina de primera calidad, determine cuántos galones de cada clase de gasolina se compraron.

38. En una compañía vinícola se requiere producir 12,000 litros de jerez encabezando vino blanco, que tiene un contenido de alcohol de 12%, con brandy, el cual tiene un contenido de 36% por volumen. El jerez debe tener un contenido de alcohol de 16%. Determine las cantidades de vino blanco y de brandy que deben mezclarse para obtener el resultado deseado.

39. Un agricultor mezcló un fertilizante que contiene 25% de nitrógeno con otro de 55% para hacer un fertilizante con 35% de nitrógeno. Si hay 40 kg menos del fertilizante de 55% que del de 25%, ¿cuántos kilogramos hay en la mezcla total?

40. Si Karen puede recoger un sembrado de frambuesas en 5 1/2 horas y Stan puede hacerlo en 8 horas, encuentre qué tan rápido pueden recoger el sembrado juntos.

41. Si Meagan puede completar una tarea en 50 minutos trabajando sola y Colleen puede hacerlo sólo en 25 min, ¿cuánto tiempo les tomará hacerla trabajando juntas?

42. Dos mangueras llenan un depósito en 12 y 15 minutos respectivamente. Las dos mangueras anteriores y una tercera, actuando todas simultáneamente, llenan el depósito en 5 minutos. Halle el tiempo que tardaría en llenarse el depósito empleando solamente la tercera manguera.

43. Un granjero puede trabajar en cierto terreno a una velocidad dos veces mayor que la de su hijo. Ambos trabajan durante 3 horas al cabo de las cuales el padre se retira y continúa solo el hijo. Halle el tiempo que tardará el hijo en realizar el trabajo si actúa él solo.

44. Un tubo de escape puede vaciar un tanque en 4 horas. El tubo se abrió por 1.5 horas y luego se cerró. En ese momento se abrió un segundo tubo y tomó 2 horas terminar de vaciar el tanque; ¿cuánto tiempo le habría tomado al segundo tubo solo vaciar el tanque?

45. El perímetro de un rectángulo es de 50 cm y el ancho es 2/3 de la altura. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

46. El triple de la longitud de un lote rectangular supera en 60 pies al doble de la anchura. El perímetro es de 350 pies; determine el área del lote.

47. El lado mayor de un triángulo es 4 cm más largo que el lado menor. El tercer lado tiene 14 cm menos que el triple de la longitud del lado menor. Si el perímetro es 30 cm, ¿cuál es la longitud de cada lado?

48. Un granjero desea encerrar un campo rectangular y dividirlo en 3 partes iguales con cercado (véase figura 5).

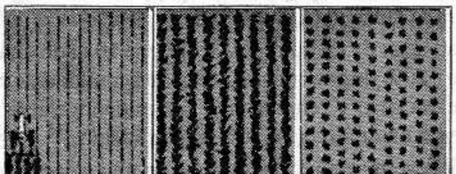


FIGURA 5

Si la longitud del campo es 3 veces el ancho y se requieren 1,000 metros de cercado, ¿cuáles son las dimensiones del campo?

49. El área de un círculo es 60π cm^2 menor que el área de uno cuyo radio es 6 cm mayor. Encuentre el radio del círculo más pequeño.

50. El área de un cuadrado excede a la de un rectángulo en 8 cm^2. Halle el lado del cuadrado sabiendo que la anchura del rectángulo es 4 cm más pequeña que el lado del cuadrado, y que la altura de aquél es 6 cm mayor que éste.

51. Josué presentó un examen. Si debe sacar 99 en un segundo examen para tener un promedio de 73 en ambos exámenes, ¿cuánto sacó en el primero?

52. En tres exámenes de igual valor, Miriam tiene un puntaje promedio de 77. Si el examen final vale 75% de cualquiera de los tres exámenes, encuentre el puntaje que Miriam debe sacar en el examen final para tener un promedio de 80.

53. Judy venció a John en una rigurosa elección de presidente del salón de los de último año, donde se registraron 320 votos. Si 6 estudiantes hubieran votado por John en vez de Judy, entonces John habría ganado por dos votos; ¿cuántos estudiantes votaron por Judy?

54. En la escuela de Cayley 60, más de la mitad de los estudiantes son muchachos. Si el número de muchachas es 4 menos que la mitad del número de muchachos, ¿cuántos estudiantes asisten a la escuela?

55. Kurt tiene 4 monedas más de 10¢ que de 5 centavos. Si el valor total de estas monedas es de US$2.35, encuentre cuántas monedas de 10¢ y de 5¢ tiene Kurt.

56. George compró US$12.00 dólares en estampillas de 10¢, 15¢ y 25¢ con un total de 57 estampillas. Si la cantidad de estampillas de 15¢ que compró es el triplo de la de 10¢, ¿cuántas estampillas de cada clase compró?

57. El dígito de las unidades de un número es 3 unidades menos que el dígito de las decenas. Si el número es 3 menos que 7 veces la suma de sus dígitos, encuentre el número.

58. El denominador de un fraccionario es 3 más que el numerador. Si tanto el numerador como el denominador se aumentan en 2 unidades, el fraccionario resultante es igual a 3/4. Encuentre el número original.

59. El señor Chaney y su hijo Ryan acordaron que el señor Chaney le daría a Ryan US$7 por cada problema de palabras que Ryan seleccionara correctamente pero que éste le pagaría a su padre US$5 por cada solución incorrecta. Después de que Ryan hubo completado 72 problemas, ninguno le debía nada al otro; ¿cuántos problemas solucionó correctamente Ryan?

60. Un trabajador obtuvo 9% de aumento, lo cual representa US$675; ¿cuál era el antiguo salario? ¿Cuál es el nuevo salario?

61. En un banquete, el administrador de un restaurante dota un bar para particulares con bebidas avaluadas en cifras redondas, para simplificar las transacciones. Se incluye 5% del impuesto de ventas en los precios redondeados. Al final del banquete, el administrador encuentra exactamente US$200 en el registro. Sabe que US$10 son mucho dinero para el impuesto, pero es incapaz de deducir la cantidad correcta que se debe pagar.

(a) Explique por qué US$10 son demasiado impuesto.

(b) Halle la cantidad correcta de impuesto de venta (hasta el último centavo).

62. La compañía de gas vende una manta aislante para un calentador de agua por US$20. Afirma que la frazada reducirá los gastos de combustible hasta 10%. Si el costo mensual promedio del combustible para el agua caliente es de US$20, ¿qué tan rápido se "pagará solo" el aislamiento?

63. Para un descuento de 25% en las ventas, un tendero siempre computa primero el descuento y luego añade 6% del impuesto de ventas. Otro empleado en el mismo almacén siempre añade primero el impuesto de ventas y luego aplica el descuento.

(a) ¿Hay alguna diferencia?

(b) ¿Puede demostrar que éste siempre es el caso para cualquier descuento y cualquier impuesto de venta?

64. Dos plantas industriales que producen componentes de máquinas están localizadas a 100 millas sobre el río Watchacallit (véase figura 6); ambas plantas venden componentes al mismo precio, US$150. Sin embargo, debido a que una planta está río arriba, sus costos de embarque son más bajos para los clientes ubicados en medio de las dos plantas: 30 centavos por milla por componente en vez de 75 centavos por milla.

(a) Suponiendo que un cliente le comprará a la planta que ofrezca el costo total más bajo, ¿a qué distancia río arriba tendrá clientes la planta de río abajo?

(b) ¿Cómo cambia su respuesta de la parte (a) si las dos plantas elevan el precio de sus componentes de US$150 a US$160?

(c) ¿Cómo cambia su respuesta de la parte (a) si los costos de embarque se duplican?

(d) ¿Qué precio de venta tendría que ofrecer la planta de río abajo para recuperar la mitad del territorio entre las dos plantas?

65. El concepto de temperatura de enfriamiento del viento está basado en el trabajo de Siple y Passel en 1945. Ellos determinaron una fórmula empírica de razón de refrigeración

$$K = \left(10\sqrt{v} + 10.45 - v\right)(33 - T)$$

donde v es la velocidad del viento en m/s, T es la temperatura del aire en grados Celsius y k es la razón de refrigeración en kilocalorías/metro cuadrado/hora. La temperatura de refrigeración del viento ha sido definida como la temperatura T' para la cual una velocidad de viento de 2.2 m/s da la misma razón de refrigeración.

(a) Utilizando las variables T, v, T' como se mencionaron arriba, escriba la ecuación que resulta de la definición de temperatura de refrigeración del viento.

(b) Resuelva la ecuación en la parte (a) para T' en términos de T y v.

(c) Encuentre la temperatura de refrigeración del viento si

$$T = -10^\circ\text{C} \text{ y } v = 5 \text{ m/s}.$$

66. Los conservacionistas tienen una forma simple de calcular la población total de especies de peces en un lago. Tienden redes por 24 horas y después cuentan y marcan los peces atrapados. Estos peces son liberados y se lanzan de nuevo las redes por otras 24 horas. Típicamente, la captura en el segundo día incluye tanto los peces marcados como los no marcados. Para obtener un cálculo de la población, los conservacionistas asumen que la razón de peces marcados respecto de la captura total del segundo día iguala la razón de captura del primer día respecto de la población total.

(a) Escriba una fórmula que exprese esta suposición, utilizando los símbolos P para población total, C_1 y C_2 para el número de peces atrapados el primero y segundo día respectivamente, y m para el número de peces marcados el segundo día.

(b) Resuelva la ecuación obtenida en la parte (a) para P.

(c) Si atrapan 40 róbalos el primer día y 5 de 45 róbalos atrapados el segundo día ya están marcados, ¿cuántos róbalos se calcula que hay en el lago?

(*Nota*: en la práctica actual se tienden las redes por varios días y se utiliza un análisis estadístico para obtener un cálculo más preciso de la población total de peces).

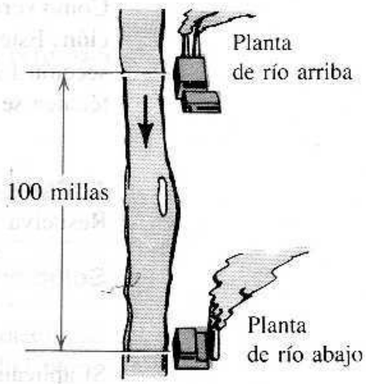


FIGURA 6

2.3 Ecuaciones cuadráticas

La ecuación lineal $ax + b = 0$, $a \neq 0$, la cual estudiamos en la sección 2.1, es un tipo especial de ecuación polinómica. Una **ecuación polinómica de grado n** es una ecuación de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0 \tag{6}$$

donde n es un número entero no negativo y a_i, $i = 0, 1 \ldots n$, son números reales. Para una ecuación lineal el grado $n = 1$.

La solución de una ecuación polinómica se llama **raíz** de la ecuación. Por ejemplo, sabemos que $-b/a$ es la única raíz de la ecuación polinómica lineal de primer grado $ax + b = 0$

En esta sección examinamos la **ecuación cuadrática** o de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \tag{7}$$

Demostraremos que esta ecuación tiene a lo sumo dos raíces. Las ecuaciones polinómicas de más alto grado se estudiarán en el capítulo 4.

Muchos problemas sobre objetos en movimiento incluyen ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, si se lanza un globo de agua con una velocidad inicial de 48 pies/s directamente hacia abajo desde una ventana de un dormitorio 64 pies arriba del suelo, la altura s (en pies) arriba del suelo después de t segundos está dada por

$$s = -16t^2 - 48t + 64$$

Cuando el globo golpea el suelo, su altura s es igual a 0; entonces, podemos hallar el tiempo transcurrido solucionando

$$-16t^2 - 48t + 64 = 0$$

Esta ecuación es equivalente a

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

METODO DE FACTORIZACION

Como veremos, esta ecuación se resuelve fácilmente por medio del **método de factorización.** Este método se basa en la propiedad de la multiplicación por cero que se trató en la sección 1.1: si a y b representan números reales y $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. La técnica se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1

Resuelva $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Solución. Por factorización, obtenemos la ecuación equivalente

$$(x + 3)(2x - 1) = 0$$

Si aplicamos la propiedad de la multiplicación por cero concluimos que

$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 1 = 0$$

Las soluciones de estas ecuaciones lineales son

$$x = -3 \quad \text{y} \quad x = \tfrac{1}{2}$$

respectivamente. El hecho de que éstas sean raíces de la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$ puede verificarse por sustitución.

Ahora podemos solucionar fácilmente $t^2 + 3t - 4 = 0$ para hallar el tiempo que le toma al globo golpear el suelo. Primero escribimos $t^2 + 3t - 4 = 0$ en su forma factorizada:

$$(t + 4)(t - 1) = 0$$

Según la propiedad de la multiplicación por cero, encontramos que debemos solucionar

$$t + 4 = 0 \quad \text{y} \quad t - 1 = 0$$

Las soluciones de estas ecuaciones son

$$t = -4 \quad \text{y} \quad t = 1$$

Por sustitución, podemos verificar que tanto $t = -4$ como $t = 1$ satisfacen la ecuación cuadrática $-16t^2 - 48t + 64 = 0$. Puesto que $t = 1$ segundo es la única respuesta positiva, es la única solución significativa al problema físico.

Nota de advertencia: como vemos en el ejemplo del globo de agua, no todas las soluciones de una ecuación necesariamente llenarán las condiciones que el problema requiere.

EJEMPLO 2

Resuelva $12x^2 + 15x = 18$.

Solución. Ya que planeamos probar el método de factorización, debemos empezar por escribir la ecuación en la forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$:

$$12x^2 + 15x - 18 = 0$$

Eliminando el factor común 3, se simplifica la ecuación:

$$3(4x^2 + 5x - 6) = 0$$
$$4x^2 + 5x - 6 = 0$$

Factorizando tenemos, entonces, $(4x - 3)(x + 2) = 0$

Utilizando la propiedad de la multiplicación por cero, igualamos cada factor a cero para obtener

$$4x - 3 = 0 \quad \text{y} \quad x + 2 = 0$$

Resolviendo cada una de estas ecuaciones resulta $x = \frac{3}{4}$ y $x = -2$. Por tanto, las raíces de la ecuación cuadrática son $\frac{3}{4}$ y -2.

Nota de advertencia: cuando se soluciona una ecuación cuadrática por factorización, se debe igualar la expresión cuadrática a cero. En el ejemplo 2 no tiene ningún sentido factorizar $4x^2 + 5x = 6$ como $x(4x + 5) = 6$. Puesto que el lado derecho es 6 (no 0), no podemos concluir nada sobre los factores x y $4x + 5$.

METODO DE RAIZ CUADRADA

Si la ecuación cuadrática tiene la forma especial

$$x^2 = d, \text{ para } d \geq 0 \tag{8}$$

podemos resolverla factorizando:

$$x^2 - d = 0$$
$$(x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) = 0$$
$$x = \sqrt{d} \quad \text{o} \quad x = -\sqrt{d}$$

Un método alternativo para resolver la ecuación (8) es sacar la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación. Esto se resume como el **método de raíz cuadrada.**

$$\text{Si } x^2 = d,\ d \geq 0, \text{ entonces } x = \pm\sqrt{d}$$

EJEMPLO 3

Utilice el método de raíz cuadrada para resolver (a) $2x^2 = 6$ y (b) $(y - 3)^2 = 5$.

SOLUCION

(a) Multiplicamos ambos lados de $2x^2 = 6$ por $\frac{1}{2}$ para obtener la forma especial (8):

$$\tfrac{1}{2}(2x^2) = \tfrac{1}{2}(6)$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

Entonces, las raíces son $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$.

(b) Observamos que para $x = y - 3$ y $d = 5$, la ecuación $(y - 3)^2 = 5$ tiene la forma especial (8). Entonces, sacamos la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación:

$$(y - 3)^2 = 5$$
$$y - 3 = \pm\sqrt{5}$$

Esto produce

$$y - 3 = \sqrt{5} \quad \text{y} \quad y - 3 = -\sqrt{5}$$

Resolviendo cada una de éstas, encontramos

$$y = 3 + \sqrt{5} \quad \text{y} \quad y = 3 - \sqrt{5}$$

Entonces, las raíces son $3 + \sqrt{5}$ y $3 - \sqrt{5}$.

METODO DE COMPLETAR EL CUADRADO

Cuando una expresión cuadrática no puede ser factorizada fácilmente y la ecuación no tiene la forma especial (8), podemos encontrar las raíces **completando el cuadro.** Esta técnica se aplica a la expresión cuadrática de la forma

$$x^2 + Bx + C$$

esto es, la expresión cuadrática debe tener 1 como su coeficiente principal. Reescribimos la ecuación

$$x^2 + Bx + C = 0 \qquad \textbf{(9)}$$

de modo que sólo los términos que estipulan la variable x están al lado izquierdo de la ecuación:

$$x^2 + Bx = -C$$

Luego, agregamos $(B/2)^2$ a ambos lados:

$$x^2 + Bx + \left(\frac{B}{2}\right)^2 = -C + \left(\frac{B}{2}\right)^2$$

Ahora, el lado izquierdo es un cuadrado perfecto,

$$\left(x + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C$$

y es fácil despejar x utilizando el método de raíz cuadrada. Este procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 4

Resuelva $2x^2 + 2x - 1 = 0$ completando el cuadrado.

Solución. Comenzamos por dividir ambos lados de la ecuación por el coeficiente de x^2, para obtener la forma (9):

$$x^2 + x - \tfrac{1}{2} = 0$$

Ahora escribimos esta ecuación como

$$x^2 + x = \tfrac{1}{2}$$

y añadimos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x a ambos lados de la ecuación:

$$x^2 + x + (\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2$$

Entonces, tenemos

$$(x + \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{3}{4}$$

Al sacar la raíz de ambos lados de la ecuación da

$$x + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Las soluciones, o raíces, son entonces $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

LA FORMULA CUADRATICA

La técnica de completar el cuadrado en una expresión cuadrática es muy útil en otras situaciones. La encontramos de nuevo en los capítulos 3 y 10. Por ahora, su valor consiste en ayudarnos a deducir una fórmula que exprese las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ en términos de los coeficientes a, b, y c. Primero escribimos la ecuación de modo que su coeficiente principal sea 1:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Luego completamos el cuadrado y despejamos x:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

Si $a > 0$, entonces $\sqrt{4a^2} = |2a| = 2a$ y tenemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{10}$$

Si $a < 0$, entonces $\sqrt{4a^2} = |2a| = -2a$ y, después de simplificar, vemos que el resultado en (10) aún es válido. Este resultado se conoce como la **fórmula cuadrática.**

Fórmula cuadrática

Si $a \neq 0$, entonces las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EL DISCRIMINANTE

De la fórmula cuadrática vemos que $ax^2 + bx + c = 0$ tiene raíces

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La naturaleza de estas raíces está determinada por el radicando $b^2 - 4ac$, al cual se llama **discriminante.** Por la ley de la tricotomía de la sección 1.2, el discriminante debe ser positivo, cero o negativo. Estos 3 posibles casos se sintetizan en la siguiente tabla.

DISCRIMINANTE	RAICES
$b^2 - 4ac > 0$	Dos raíces reales diferentes
$b^2 - 4ac = 0$	Raíces reales iguales
$b^2 - 4ac < 0$	No hay raíces reales

EJEMPLO 5

Resuelva $3x^2 - 2x - 4 = 0$.

Solución. De la fórmula cuadrática con $a = 3$, $b = -2$, y $c = -4$, tenemos

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{6}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$$

Entonces, las soluciones son $(1 - \sqrt{13})/3$ y $(1 + \sqrt{13})/3$. Aquí vemos que el discriminante positivo 13 dio por resultado dos raíces reales diferentes.

EJEMPLO 6

Resuelva $9x^2 + 16 = 24x$.

Solución. Para utilizar la fórmula cuadrática, primero debemos escribir la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Entonces, podemos aplicar la fórmula cuadrática a $9x^2 - 24x + 16 = 0$ para obtener

$$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(9)(16)}}{2(9)}$$
$$= \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{18}$$
$$= \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

Puesto que el discriminante es 0, las raíces son iguales y la solución es $\frac{4}{3}$.

EJEMPLO 7

Resuelva $3x^2 - x + 2 = 0$.

Solución. Puesto que el discriminante

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(2) = -23$$

es negativo, concluimos que la ecuación dada no tiene raíces reales.

Ciertas ecuaciones polinómicas de grado mayor que dos pueden solucionarse utilizando la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 8

Resuelva $4x^3 + 8x^2 - 4x = 0$.

Solución. Factorizando, escribimos la ecuación como

$$4x(x^2 + 2x - 1) = 0$$

o

$$x(x^2 + 2x - 1) = 0$$

Entonces, $x = 0$ o $x^2 + 2x - 1 = 0$

Resolviendo la segunda ecuación con la fórmula cuadrática nos da

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2}$$
$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Las soluciones son 0, $-1 - \sqrt{2}$ y $-1 + \sqrt{2}$.

EJEMPLO 9

Resuelva $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$.

Solución. Esta ecuación polinómica puede considerarse una ecuación cuadrática en la variable x^2; esto es,

$$(x^2)^2 - 2(x^2) - 2 = 0$$

Utilizando la fórmula cuadrática para despejar x^2, tenemos

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$$
$$= 1 \pm \sqrt{3}$$

Entonces

$$x^2 = 1 + \sqrt{3} \quad \text{o} \quad x^2 = 1 - \sqrt{3}$$

De $x^2 = 1 - \sqrt{3}$ no obtenemos raíces reales ya que $1 - \sqrt{3} < 0$.

De $x^2 = 1 + \sqrt{3}$ tenemos las raíces reales $-\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ y $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$.

Concluimos esta sección con varias aplicaciones que incluyen ecuaciones cuadráticas.

EJEMPLO 10

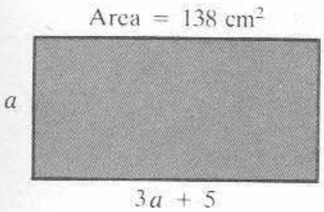


FIGURA 7

El área de un rectángulo es 138 cm^2. Si la longitud es 5 cm más que 3 veces el ancho, halle las dimensiones del rectángulo.

Solución. Empezamos por dibujar y marcar un rectángulo, como lo muestra la figura 7. Designamos

$$a = \text{ ancho del rectángulo en centímetros.}$$

Entonces $\quad 3a + 5 = $ longitud del rectángulo en centímetros

y $\quad a(3a + 5) = 138$

Para utilizar la fórmula cuadrática reescribimos esta ecuación como

$$3a^2 + 5a - 138 = 0$$

De la fórmula cuadrática, encontramos que $a = -\frac{23}{3}$ ó $a = 6$. Ya que el ancho de un rectángulo debe ser positivo, descartamos la solución $a = -\frac{23}{3}$. En consecuencia, la longitud es $3(6) + 5 = 23$ y las dimensiones del rectángulo son 6 cm y 23 cm.

Prueba: Ya que $23 = 3(6) + 5$ y $6(23) = 138$, la respuesta corresponde.

EL TEOREMA DE PITAGORAS

Pitágoras

El **teorema de Pitágoras** es uno de los más ampliamente utilizados de la geometría. Muchas de sus aplicaciones incluyen ecuaciones cuadráticas. A pesar de que se llamó así en honor del matemático griego Pitágoras, que vivió alrededor del 540 antes de Cristo, el resultado se conocía antes de su época. El teorema dice que en un triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados. Para un triángulo rectángulo como el que muestra la figura 8, tenemos la siguiente fórmula:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Hay una amplia gama de pruebas algebraicas y geométricas de este teorema. (Véanse problemas 89 y 90).

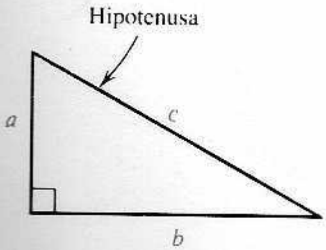


FIGURA 8

EJEMPLO 11

En un parque, dos aceras forman un ángulo recto con el patio P, el puesto de refrigerio R y el estacionamiento E, como lo muestra la figura 9. La longitud total de las aceras es 700 m. Al caminar a través del pasto directamente del estacionamiento al patio, los niños pueden acortar la distancia en 200 m. ¿Cuáles son las longitudes de las aceras?

Solución. Si designamos

$$x = \text{longitud de la acera del punto } P \text{ al } R.$$

entonces $$700 - x = \text{longitud de la acera de } R \text{ a } E.$$

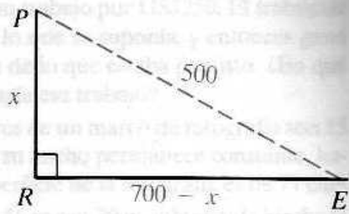


FIGURA 9

Puesto que la distancia de P a E es 200 metros menor que la longitud total de las dos aceras, tenemos

$$700 - 200 = 500 = \text{distancia de } P \text{ a } E$$

Del teorema de Pitágoras, obtenemos la siguiente relación:

$$x^2 + (700 - x)^2 = (500)^2$$

Reescribimos esta ecuación y resolvemos por factorización:

$$2x^2 - 1400x + 240{,}000 = 0$$
$$x^2 - 700x + 120{,}000 = 0$$
$$(x - 400)(x - 300) = 0$$
$$x = 400 \quad \text{o} \quad x = 300$$

Refiriéndonos a la figura 9, si utilizamos $x = 400$, encontramos que la longitud de la acera desde el patio hasta el puesto de refrigerio es 400 m y la longitud de la acera desde el punto de refrigerio hasta el estacionamiento es $700 - 400 = 300$ m. De $x = 300$, encontramos que estas distancias están invertidas. Entonces, hay dos soluciones posibles a este problema.

Prueba: puesto que

$$700 = 300 + 400 \quad \text{y} \quad (500)^2 = (300)^2 + (400)^2$$

las soluciones corresponden.

EJEMPLO 12

Un comisionista de vinos gastó US\$800 en algunas botellas de vino añejo Cabernet Sauvignon de California. Si cada botella hubiera costado US\$4 más, el comisionista habría obtenido 10 botellas menos por los US\$800. ¿Cuántas botellas se compraron?

Solución. La solución de este problema se basa en la siguiente relación:

$$(\text{costo por botella})(\text{número de botellas}) = 800 \tag{11}$$

Para la compra real, si designamos

$$x = \text{número de botellas compradas,}$$

entonces $$\frac{800}{x} = \text{costo por botella}$$

Al precio más alto,

$$x - 10 = \text{número de botellas compradas}$$

y $$\frac{800}{x} + 4 = \text{costo por botella.}$$

Utilizando esta información en la relación (11), obtenemos la ecuación

$$\left(\frac{800}{x} + 4\right)(x - 10) = 800$$

con la cual despejamos x como sigue:

$$(800 + 4x)(x - 10) = 800x$$
$$4x^2 - 40x - 8000 = 0$$
$$x^2 - 10x - 2000 = 0$$
$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{8100}}{2} = \frac{10 \pm 90}{2}$$
$$x = 50 \quad \text{o} \quad x = -40$$

Ya que debemos tener un número positivo de botellas compradas, encontramos que se compraron 50 botellas de vino.

Prueba: si se compraron 50 botellas por US\$800, el costo por botella fue de US\$800/50 = US\$16. Si cada botella costara US\$ 4 más, entonces el precio por botella habría sido US\$20. A este precio más alto precio, sólo US\$800/20 = 40 botellas se habrían podido comprar por US\$800. Ya que 50 − 10 = 40, la respuesta corresponde.

EJERCICIO 2.3

En los problemas 1 al 16, resuelva por factorización.

1. $x^2 - 16 = 0$
2. $y^2 - 42 - y = 0$
3. $2x^2 + x - 1 = 0$
4. $8t^2 + 15t + 15 = 0$
5. $1 + 6x + 9x^2 = 0$
6. $u^2 - 7u = -10$
7. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
8. $x^2 - 60 = -7x$
9. $25y^2 + 15y = -2$
10. $2a^2 = a + 1$
11. $1 - 25b^2 = 0$
12. $49 - 9/c^2 = 0$
13. $x^3 - 81x = 0$
14. $64p^2 - p^4 = 0$
15. $4g^5 - 25g^3 = 0$
16. $x^4 - 18x^2 + 32 = 0$

Los problemas 17 al 22, resuélvalos utilizando el método de la raíz cuadrada.

17. $x^2 = 17$
18. $2y^2 = 100$
19. $(v + 5)^2 = 5$
20. $(t/3 + 1)^2 = 8/9$
21. $3(t + 1)^2 = 9$
22. $3(t - 1/6)^2 = 4$

En los problemas 23 al 26 despeje *x*.

23. $x^2 - b^2 = 0$
24. $16x^2 + 8dx + d^2 = 0$
25. $(x/2 - bc)^2 = b^2c^2$
26. $(x + c)^2 = d^2$

Los problemas 27 al 34, resuélvalos completando cuadrados.

27. $u^2 + 2u - 2 = 0$
28. $x^2 + 5x + 3 = 0$
29. $4b^2 - 4b - 35 = 0$
30. $2k^2 + 5k + 3 = 0$
31. $\sqrt{2}x^2 - 4x - \sqrt{2} = 0$
32. $w^2 = 36 - 16w$
33. $9t^2 = 36t - 1$
34. $r = 5x^2 - 2$

Los problemas 35 al 46, resuélvalos utilizando la fórmula cuadrática.

35. $3x^2 + 2x - 1 = 0$
36. $9z^2 + 30z + 25 = 0$
37. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
38. $4 + 6x - 9x^2 = 0$
39. $\sqrt{3}r^2 - 2r - \sqrt{3} = 0$
40. $8t - (16t^2 + 1) = 0$
41. $3s - 2s^2 = 3/2$
42. $x + 1/2x^2 = 5$
43. $2c(c - 1) = 1$
44. $2(x^2 + 1) = 3(x^2 + x/3)$
45. $6x^4 - 7x^2 + 2 = 0$
46. $t^4 - 4t^2 = 3$

Los ejercicios 47 al 56, resuélvalos utilizando cualquier método.

47. $4 + 3s^2 - 13s = 0$
48. $6x^4 - 7x^2 - 2 = 0$
49. $x^2 - 6x - 18 = 0$
50. $1.0y + 0.1y^2 + 2.4 = 0$
51. $r^2 + 2r - 35 = 0$
52. $8t^2 + 10t = -5$
53. $3t^3 - 24t = 0$
54. $-40m + 16m^2 = -25$
55. $4p^2 = 60$
56. $2(5 - 3c)^2 = 6c^2 + 50$

Las fórmulas dadas en los problemas 57 al 62 ocurren frecuentemente en las aplicaciones. Despeje la variable indicada en términos de las variables restantes (suponga que todas las variables representan números reales positivos).

57. Area de un círculo
$A = \pi r^2$, para r
58. Volumen de un cilindro
$V = \pi r^2 h$, para r
59. Area de la superficie de un cilindro
$A = 2\pi r(r + h)$, para r
60. Ecuación de una elipse
$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \text{ para } y$$
61. Ley de la gravitación universal de Newton
$$F = g\frac{m_1 m_2}{r^2}, \text{ para } r$$
62. Cuerpo en caída libre
$s = 1/2gt^2 + v_0 t$, para t

63. Determine todos los valores de d de modo que $x^2 + (d + 6)x + 8d = 0$ tenga dos raíces iguales.

64. Determine todos los valores de d de modo que $2dx^2 - 6dx + (d + 7) = 0$ tenga dos raíces iguales.

65. Determine la otra raíz de:
$(3 - k)x^2 + 9x + (k - 3) = 0$, dado que una raíz es 2.

66. Si r_1 y r_2 son dos raíces reales de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, demuestre que $r_1 + r_2 = -b/a$ y $r_1 \cdot r_2 = c/a$.

67. La suma de dos números es 26, y la suma de sus cuadrados es 340. Halle los números.

68. El producto de dos números es 2 más que 4 veces su suma. Halle los números si su diferencia es 7.

69. En una caminata de 35 km un muchacho hace 1/2 kilómetro por hora más rápido que otro muchacho. Si hace el viaje en una hora 40 minutos menos de tiempo que el otro muchacho, halle cuánto tiempo le toma a cada muchacho hacer la caminata.

70. La base de un triángulo es 3 cm más larga que la altura. Si el área del triángulo es 119 cm^2, halle la base y la altura.

71. Bárbara ha planeado hacer un huerto de legumbres rectangular con un perímetro de 76 cm y un área de 360 m^2. Encuentre las dimensiones del huerto.

72. Si cada uno de los dos lados opuestos de un cuadrado se triplica, y cada uno de los otros lados opuestos se disminuye en dos pies, el área del rectángulo resultante supera en 36 pies cuadrados el área del cuadrado original. Encuentre la longitud del lado del cuadrado.

73. Un hombre desea construir una caja metálica abierta. La caja debe tener una base cuadrada, los lados de 10 pulgadas de altura y una capacidad de 6,760 pulgadas cúbicas. Determine el tamaño de la pieza cuadrada de metal que debe comprar para construir la caja.

74. Un jardín de flores tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles con una hipotenusa de 50 pies. ¿Cuántos pies de madera se necesitan para bordear el jardín?

75. Suponga que la hipotenusa de un triángulo es 15 cm más larga que uno de los lados y ese lado es 15 cm más largo que el otro. Encuentre la longitud de los tres lados de este triángulo rectángulo.

76. Una escalera de 20 pies se coloca contra el costado de una casa de modo que su base está a 16 pies de la casa. Si se resbala hasta que su base esté a 18 pies de la casa, ¿cuánto resbala hacia abajo la parte superior de la escalera?

77. Temprano en la mañana James salió del punto A caminando hacia el este; 1 1/2 hora más tarde, Josué salió del mismo punto caminando hacia el norte. Los dos muchachos caminaron 4 millas por hora y mantenían una comunicación por radio con un alcance de 10 millas. ¿A qué hora perdieron el contacto?

78. Un piloto realizó un vuelo de 720 km, sabiendo que si aumenta la velocidad en 60 km/h podría recorrer esa distancia en sólo 40 minutos menos. Hallar su velocidad.

79. Un equipo de remeros puede viajar 18 millas río arriba y regresar en un total de 6 3/4 horas. Si la velocidad de la corriente en aguas quietas es de 2 millas por hora, ¿a qué velocidad puede remar el equipo en aguas tranquilas?

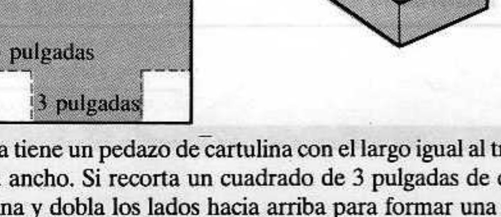
80. Una gira a una isla costó US$350. Si hubieran sido 4 miembros menos en el club, el costo por persona habría sido de US$10 más; ¿cuántos miembros hay en el club?

81. El señor Arthur realizó un trabajo por US$250. El trabajo le llevó 3 1/2 horas más de lo que se suponía, y entonces ganó US$3.50 menos por hora de lo que estaba previsto. ¿En qué tiempo se suponía realizaría ese trabajo?

82. Las dimensiones exteriores de un marco de fotografía son 15 por 11 cm; sabiendo que su ancho permanece constante, halle su valor cuando la superficie de la fotografía es de 77 cm^2.

83. A un área rectangular de 56 m por 30 m cubierta de hierba la rodea una acera. Si el área cubierta por dicha acera es de 960 m^2, ¿cuál es su ancho?

84. Se hace un recipiente con un pequeño pedazo de estaño cuadrado cortando un cuadrado de 3 pulgadas de cada esquina, y doblando los lados (véase figura 10). Si el recipiente va a tener un volumen de 48 pulg^3, encuentre la longitud de uno de los lados del pedazo de estaño original.



85. María tiene un pedazo de cartulina con el largo igual al triple de su ancho. Si recorta un cuadrado de 3 pulgadas de cada esquina y dobla los lados hacia arriba para formar una caja sin tapa, tendrá una caja con un volumen de 864 pulg^3. Halle las dimensiones del pedazo de cartulina.

86. Un alambre de 40 cm de longitud se cortó en dos pedazos. Una de las partes se dobló haciendo un cuadrado y la otra un rectángulo que es 3 veces más largo que el ancho. La suma del área del rectángulo y del cuadrado es 55 3/4 cm^2. ¿En qué lugar se cortó el alambre?

87. Si se lanza un objeto hacia arriba desde el suelo con un ángulo de 45° y una velocidad inicial de v_0 metros por segundo, entonces la altura en metros arriba del suelo a una distancia horizontal de x metros desde el punto del lanzamiento está dada por $y = x - (9.8/v_0^2)x^2$ (véase figura 11).

FIGURA 11

Si se lanza un proyectil con un ángulo de 45° y una velocidad inicial de 15m/s, ¿a qué distancia del punto de lanzamiento aterrizará?

88. Si una fuente arroja agua con un ángulo de 45° y una velocidad de 7 m/s, ¿a qué distancia del chorro caerá el agua sobre la pileta? (véanse figura 12 y problema 87).

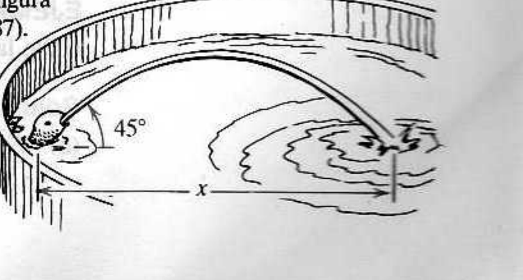


FIGURA 12

89. Una de las pruebas más concisas del teorema de Pitágoras la dio el erudito indio Bhaskara (alrededor de 1150). Presentó el diagrama mostrado en la figura 13 sin indicaciones que le ayudaran al lector; su única "explicación" fue la palabra "mirad". Suponga que un cuadrado de lado c puede dividirse en cuatro triángulos rectángulos congruentes y un cuadrado de longitud $b - a$ como se muestra. Pruebe que $a^2 + b^2 = c^2$.

90. Suponiendo que un cuadrado de lado $a + b$ puede dividirse de dos formas, como en la figura 14, pruebe el teorema de Pitágoras.

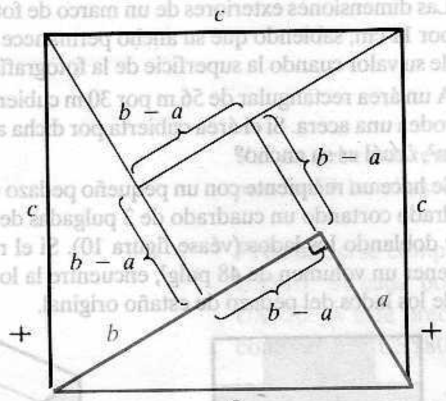


FIGURA 13

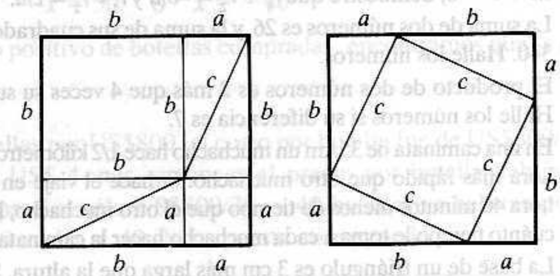


FIGURA 14

2.4 Números complejos

En la anterior sección vimos que algunas ecuaciones cuadráticas no tienen solución real. Por ejemplo, $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales porque no hay número real x tal que $x^2 = -1$. En esta sección estudiaremos el conjunto de **números complejos**, que contiene soluciones a ecuaciones tales como $x^2 + 1 = 0$. El conjunto de números complejos C contiene el conjunto de números reales R así como los números cuyos cuadrados son negativos.

Para obtener los números complejos C, comenzamos por definir la **unidad imaginaria**, denotada con la letra i, como el número que satisfaga

$$i^2 = -1$$

Es común escribir

$$i = \sqrt{-1}$$

Con i podemos definir la raíz cuadrada principal de un número negativo, como sigue:

Si c es un número real positivo, entonces la **raíz cuadrada principal de $-c$**, denotada como $\sqrt{-c}$, se define como

$$\sqrt{-c} = \sqrt{(-1)c} = \sqrt{-1}\sqrt{c} = i\sqrt{c} = \sqrt{c}\,i$$

EJEMPLO 1

Halle la raíz cuadrada principal de (a) $\sqrt{-4}$ y (b) $\sqrt{-5}$.

Solución

(a) $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(4)} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = i(2) = 2i$

(b) $\sqrt{-5} = \sqrt{(-1)(5)} = \sqrt{-1}\sqrt{5} = i\sqrt{5} = \sqrt{5}i$

El sistema de números complejos contiene la unidad imaginaria i, todos los números reales, productos tales como bi, b real, y sumas tales como $a + bi$, donde a y b son números reales. En particular, un **número complejo** se define como cualquier expresión de la forma

$$z = a + bi \tag{12}$$

donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. A los números a y b se los llama las **partes reales** e **imaginarias** de z, respectivamente. Se dice que un número complejo de la forma $0 + bi$ es un **número imaginario puro.** Note que escogiendo $b = 0$ en (12), obtenemos un número real. Así, el conjunto de números reales es un subconjunto del conjunto de números complejos.

EJEMPLO 2

(a) El número complejo $z = 4 + (-5)i$ puede escribirse como $z = 4 - 5i$. Su parte real es 4 y su parte imaginaria es -5.
(b) $z = 10i$ es un número imaginario puro.
(c) $z = 6 + 0i$ es un número real.

EJEMPLO 3

Exprese en la forma $a + bi$:

(a) $-3 + \sqrt{-7}$
(b) $2 - \sqrt{-25}$

Solución

(a) $-3 + \sqrt{-7} = -3 + i\sqrt{7} = -3 + \sqrt{7}i$
(b) $2 - \sqrt{-25} = 2 - i\sqrt{25} = 2 - 5i$

Para resolver ciertas ecuaciones que incluyen números complejos, es necesario especificar cuándo son iguales dos números complejos.

DEFINICION 1

Dos números complejos son **iguales** si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. Esto es, si

$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad \text{y} \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

entonces

$$z_1 = z_2 \quad \text{si y sólo si} \quad a_1 = a_2 \quad \text{y} \quad b_1 = b_2$$

EJEMPLO 4

Despeje x y y:

$$(2x + 1) + (-2y + 3)i = 2 - 4i$$

Solución. Según la defininción 1 debemos tener

$$2x + 1 = 2 \quad \text{y} \quad -2y + 3 = -4$$

Estas ecuaciones dan como resultado $x = \frac{1}{2}$ y $y = \frac{7}{2}$.

La adición y la multiplicación por números complejos se definen como sigue.

DEFINICION 2

> Si $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$, entonces:
>
> **(i)** su **suma** está dada por $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
>
> **(ii)** y su **producto** está dado por $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$

PROPIEDADES DEL SISTEMA DE NUMEROS COMPLEJOS

En la sección 1.1 enunciamos las propiedades básicas del sistema de números reales. Utilizando la definición de adición y multiplicación de números complejos, puede demostrarse que estas propiedades básicas también se aplican al sistema de números complejos. En particular, las leyes asociativa, conmutativa y distributiva se aplican para los números complejos. (Véanse problemas 67 al 69). Observamos, además, que en la definición 2 (i) la suma de dos números complejos se obtiene sumando sus partes reales e imaginarias correspondientes.

Además, en vez de memorizar la definición del producto, podemos multiplicar dos números complejos utilizando las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva familiares, y el hecho de que $i^2 = -1$. Aplicando este método, encontramos que

$$\begin{aligned}
(a + bi)(c + di) &= (a + bi)c + (a + bi)di \\
&= ac + (bc)i + (ad)i + (bd)i^2 \\
&= ac + (bc)i + (ad)i + (bd)(-1) \\
&= ac + (bd)(-1) + (bc)i + (ad)i \\
&= (ac - bd) + (bc + ad)i
\end{aligned}$$

Este es el mismo resultado del producto dado por la definición 2 (ii).

Estas técnicas se ilustran en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5

Si $z_1 = 5 - 6i$ y $z_2 = 2 + 4i$, halle (a) $z_1 + z_2$ y (b) $z_1 z_2$.

Solución

(a) Combinando términos semejantes, tenemos

$$(5 - 6i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-6 + 4)i = 7 - 2i$$

(b) Utilizando la ley distributiva, podemos escribir el producto $(5 - 6i)(2 + 4i)$ como

$$\begin{aligned}
(5 - 6i)(2 + 4i) &= (5 - 6i)2 + (5 - 6i)4i \\
&= 10 - 12i + 20i - 24i^2 \\
&= 10 - 24(-1) + (-12 + 20)i \\
&= 34 + 8i
\end{aligned}$$

Nota de advertencia: no todas las propiedades del sistema de números reales se aplican a los números complejos. En particular, la propiedad de radicales $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ no es cierta cuando tanto a como b son negativos. Para ver esto, considere que

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\sqrt{-1} &= ii = i^2\\ &= -1\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\sqrt{(-1)(-1)} &= \sqrt{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

Entonces $\sqrt{-1}\sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)}$. Sin embargo, *si sólo* a o b es negativo, entonces sí tenemos que $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

En el conjunto de números complejos, la **identidad aditiva** es el número $0 = 0 + 0i$ y la **identidad multiplicativa** es el número $1 = 1 + 0i$.

El **inverso aditivo** de un número complejo $z = a + bi$ es $-z = -a - bi$. El inverso aditivo se utiliza para definir la **sustracción** de números complejos:

$$\begin{aligned}(a + bi) - (c + di) &= (a + bi) + [-(c + di)]\\ &= (a + bi) + (-c - di)\\ &= (a - c) + (b - d)i\end{aligned}$$

Para obtener el **inverso multiplicativo** de $z = a + bi$, introducimos el concepto de **conjugado** de un número complejo. Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces a $\bar{z} = a - bi$ se llama su **conjugado**. Por ejemplo, el conjugado de $8 + 13i$ es $8 - 13i$, y el conjugado de $-5 - 2i$ es $-5 + 2i$.

Los siguientes cómputos muestran que tanto la suma como el producto de un número complejo z y su conjugado $\bar{z}$ son números reales:

$$\begin{aligned}z + \bar{z} &= (a + bi) + (a - bi) = 2a,\\ z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2\\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

La última propiedad hace que los conjugados sean muy útiles para hallar el inverso multiplicativo $1/z$ o para dividir dos números complejos, como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6

Para $z_1 = 3 - 2i$ y $z_2 = 4 + 5i$, exprese cada una de las siguientes proposiciones de la forma $a + bi$.

(a) $\dfrac{1}{z_1}$ **(b)** $\dfrac{z_1}{z_2}$

Solución. Multiplicamos tanto el numerador como el denominador por el conjugado del denominador y simplificamos.

(a) $$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{3 - 2i} = \frac{1}{3 - 2i}\,\frac{3 + 2i}{3 + 2i} = \frac{3 + 2i}{9 + 4} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$$

(b) $$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 - 2i}{4 + 5i} = \frac{3 - 2i}{4 + 5i}\,\frac{4 - 5i}{4 - 5i} = \frac{12 - 8i - 15i + 10i^2}{16 + 25}\\ &= \frac{2 - 23i}{41} = \frac{2}{41} - \frac{23}{41}i\end{aligned}$$

Los números complejos hacen posible solucionar ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$ cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo. Ahora vemos que las soluciones de la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

representan números complejos. Nótese que de hecho las soluciones son conjugados entre sí. Como lo muestra el ejemplo 7, estas soluciones pueden escribirse de la forma estándar (12).

EJEMPLO 7

Resuelva $x^2 - 8x + 25 = 0$.

Solución. De la fórmula cuadrática, obtenemos

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(25)}}{2}$$

esto es,

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm 6i}{2} = 4 \pm 3i$$

De ahí las soluciones $4 + 3i$ y $4 - 3i$.

EJEMPLO 8

Resuelva $x^2 + 16 = 8$.

Solución. Como en la sección 2.3, podemos utilizar el método de raíz cuadrada:

$$x^2 + 16 = 0$$

$$x^2 = -16$$

$$x = \pm\sqrt{-16} = \pm 4i$$

Entonces, las soluciones son los complejos $4i$ y $-4i$.

Ahora podemos obtener soluciones para cualquier ecuación cuadrática. En particular, si el discriminante es negativo, hemos visto que las raíces son dos conjugados complejos.

EJERCICIO 2.4

En los problemas 1 al 46, realice la operación indicada. Escriba la respuesta en la forma $A + bi$.

1. $\sqrt{-100}$
2. $-\sqrt{-8}$
3. $3\sqrt{12} - 3\sqrt{-12}$
4. $\sqrt{-125} - \sqrt{-5-5}$
5. $(4+i)-(3-4i)$
6. $(-5+6i)+(7-2i)$
7. $2(4-5i)+(-2-i)3$
8. $2(6-4i)-5(4+8i)$
9. $(-8+7i)-3i(i-2)$
10. $(4+13i)i - i(1-9i)$
11. $4i(2+i)-3(1-i)$
12. $i(4+3i)+i+(1-2i)i$
13. $(3-2i)(1-i)$
14. $(2-5i)(6+3i)$
15. $(2-i)(14-21i)$
16. $(5-\sqrt{3i})(-2+\sqrt{3i})$
17. $(4+5i)-(1+i)(2-i)$
18. $(-3+2i)(2+4i)(-3+6i)$
19. $i(2-5i)^2$
20. $(3-\sqrt{-9})(3-16i)i$
21. $(1+i)(1+2i)(1+3i)$
22. $(4+i)(4-i)(2-4i)$
23. $(1+i)[3(1+5i)-i(5-3i)]$
24. $(4+i)[i(1+3i)-2(-5+3i)]$
25. i^8
26. i^9
27. i^{-2}
28. $i^3(i^5-i^2)$
29. $\dfrac{1}{3-4i}$
30. $\dfrac{5}{3+i}$
31. $\dfrac{4}{5+4i}$
32. $\dfrac{1}{-1+2i}$

33. $\frac{i}{1+i}$ 34. $\frac{i}{4-3i}$

35. $\frac{6-4i}{i}$ 36. $\frac{3-5i}{i}$

37. $\frac{3-i}{3+i}$ 38. $\frac{3+2i}{2-i}$

39. $\frac{4+2i}{2-7i}$ 40. $\frac{4-2i}{2-7i}$

$\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i$

41. $i\left(\frac{1+i}{10-i}\right)$ 42. $i\left(\frac{1-23i}{1+3i}\right)$

43. $\frac{1}{4-3i}$ 44. $(5-3i)\frac{1-i}{2-i}$

45. $(4-9i)+\frac{2i}{2+i}$ 46. $(1+i)^2\left[(3+5i)+\frac{3+i}{3-i}\right]$

En los problemas 47 al 52, despeje *x* y *y*.

47. $2(x+yi)=i(3-4i)$

48. $3(2x+yi)-2i(1-2i)$

49. $i(x-yi)x+(2-6i)(2+3i)$

50. $(2-5i)x+(1+3i)y=8-9i$

51. $(1+i)(x-yi)=i(14+7i)-(2+13i)$

52. $i^2(1-i)(1+i)=3x+yi+i(y+xi)$

En los problemas del 53 al 64, resuelva la ecuación dada.

53. $x^2+9=0$ 54. $x^2+8=0$

55. $3x^2=-1$ 56. $2x^2=-5$

57. $3x^2-2x+1=0$ 58. $x^2-6x+10=0$

59. $2x^2+2x+5=0$ 60. $x^2-4x+11=0$

61. $4x^2-x+2=0$ 62. $x^2+x+2=0$

63. $x^4+5x^2+4=0$ 64. $x^2-2x+26=0$

65. Halle un número complejo $z=x+yi$ tal que $z^2=-i$

66. Halle un número complejo $z=x+yi$ tal que $z^2=-3+5i$

67. Demuestre que tanto la suma como la multiplicación de números complejos son conmutativas.

68. Demuestre que tanto la adición como la multiplicación de números complejos son asociativas.

69. Demuestre que la multiplicación de números complejos es distributiva respecto a la adición.

70. Sea $z=a+bi$, donde a y b no son ambos ceros, demuestre que

$$\frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

Sean $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$ dos números complejos cualesquiera. En los problemas 71 al 74, pruebe las propiedades dadas incluyendo los conjugados de

$$z_1 \text{ y } z_2,\ \bar{z}_1=a-bi \text{ y } \bar{z}_2=c-di$$

71. $\bar{z}=z_1$ si y sólo si z_1 es un número real.

72. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

73. $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

74. $\overline{(z_1/z_2)}=\bar{z}_1/\bar{z}_2$

75. Verifique que $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ si sólo a o b es negativo.

76. Cuando la luz pasa de un medio a otro, por ejemplo del aire al agua, se retracta (o desvía) y parte de ella se absorbe. Este fenómeno puede describirse por medio del índice de refracción n y un coeficiente de absorción k. Los ingenieros han encontrado útil combinarlos en un índice de refracción complejo.

$$m=n-ik$$

En tratados teóricos sobre la retrodispersión del radar por medio de gotitas de lluvia, la expresión

$$k=\frac{m^2-1}{m^2+2}$$

es importante. Halle k si el índice de refracción complejo m es $5-3i$.

2.5 Ecuaciones misceláneas

Muchas ecuaciones que no son ecuaciones polinómicas pueden convertirse a esa forma por medio de operaciones algebraicas apropiadas. Por ejemplo, para resolver

$$\frac{2x+5}{x+1}=\frac{1-2x}{x+1}+x \tag{13}$$

podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por el denominador $x+1$ y simplificar:

$$(x+1)\left(\frac{2x+5}{x+1}\right)=(x+1)\left(\frac{1-2x}{x+1}\right)+(x+1)x$$

$$2x+5=1-2x+x^2+x$$

$$0=x^2-3x-4 \tag{14}$$

Factorizando la expresión cuadrática en (14) da

$$(x-4)(x+1)=0$$

Las soluciones de esta última ecuación son $x=4$ y $x=-1$. Como lo vimos en la sección 2.1, cuando ambos lados de una ecuación se multiplican por una expresión algebraica que contenga la variable, se puede introducir una solución extraña. Así, en este caso, necesitamos verificar nuestras soluciones. Sustituyendo a 4 en la ecuación (13), obtenemos

$$\frac{2(4)+5}{4+1}=\frac{1-2(4)}{4+1}+4$$

$$\frac{13}{5}=-\frac{7}{5}+4$$

$$\frac{13}{5}=\frac{13}{5}$$

Así, 4 es una solución de la ecuación (13). Por otro lado, la inspección de (13) demuestra que -1 no está en el dominio de la variable y, por tanto, es una solución extraña.

ECUACIONES CON RADICALES

Como lo ilustran los siguientes ejemplos, se pueden introducir soluciones extrañas elevando ambos lados de la ecuación a una potencia.

EJEMPLO 1

Resuelva $x-5=\sqrt{x+7}$. **(15)**

Solución. Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación dada para eliminar el radical, tenemos

$$x^2-10x+25=x+7$$

o

$$x^2-11x+18=0$$

Esta ecuación se factoriza como

$$(x-9)(x-2)=0$$

y sus soluciones son $x=9$ y $x=2$. Si verificamos $x=9$ en la ecuación original, encontramos

$$9-5=4=\sqrt{9+7}$$

entonces, 9 es una solución de (15). Pero si sustituimos $x=2$ en la ecuación (15), encontramos

$$2-5=-3\neq\sqrt{2+7}=3$$

Por tanto, 2 es una solución externa, y la única solución de la ecuación original es $x=9$.

EJEMPLO 2

Resuelva $\sqrt[3]{4t^2-1}-2=0$.

Solución. Comenzamos por aislar la raíz a un lado:

$$\sqrt[3]{4t^2-1}=2$$

Luego elevando al cubo ambos lados se elimina el radical:

$$(\sqrt[3]{4t^2 - 1})^3 = (2)^3$$
$$4t^2 - 1 = 8$$
$$4t^2 = 9$$
$$t^2 = \tfrac{9}{4}$$
$$t = \pm\sqrt{\tfrac{9}{4}} = \pm\tfrac{3}{2}$$

Verificamos que cada una de éstas es una solución, sustituyendo en $\sqrt[3]{4t^2 - 1} = 2$. Sustituyendo $t = \frac{3}{2}$, obtenemos

$$\sqrt[3]{4\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 1} = 2, \quad \text{o} \quad \sqrt[3]{4\left(\tfrac{9}{4}\right) - 1} = 2, \quad \text{o} \quad \sqrt[3]{8} = 2$$

lo cual es verdadero. Entonces, $\frac{3}{2}$ es una solución. De igual manera, por sustitución vemos que $-\frac{3}{2}$ es también una solución.

Como lo muestra el ejemplo 3, algunas veces es necesario elevar ambos lados de la ecuación a potencias más de una vez para eliminar los radicales.

EJEMPLO 3

Resuelva $\sqrt{2w - 4} - \sqrt{w - 1} - 1 = 0$

Solución. Para eliminar los radicales debemos elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación. Pero para evitar obtener el producto de 2 radicales, reescribimos la ecuación como

$$\sqrt{2w - 4} = \sqrt{w - 1} + 1$$

antes de elevar al cuadrado ambos lados. Elevando ahora al cuadrado da

$$(\sqrt{2w - 4})^2 = (\sqrt{w - 1} + 1)^2$$
$$2w - 4 = (w - 1) + 2\sqrt{w - 1} + 1$$

o
$$w - 4 = 2\sqrt{w - 1}$$

Elevando de nuevo al cuadrado se produce

$$(w - 4)^2 = 4(w - 1)$$
$$w^2 - 8w + 16 = 4w - 4$$
$$w^2 - 12w + 20 = 0$$
$$(w - 10)(w - 2) = 0$$

Las soluciones de esta última ecuación son $w = 10$ y $w = 2$. Verificando estos valores en la ecuación original, encontramos

$$\sqrt{2(10) - 4} - \sqrt{10 - 1} - 1 = \sqrt{16} - \sqrt{9} - 1 = 0$$

y
$$\sqrt{2(2) - 4} - \sqrt{2 - 1} - 1 = \sqrt{0} - \sqrt{1} - 1 = -2$$

Así, la única solución de la ecuación original es $w = 10$.

La siguiente lista sintetiza el procedimiento general para resolver ecuaciones con radicales.

Sugerencias para resolver ecuaciones con radicales

1. Aísle el radical más complicado a un lado de la ecuación.
2. Elimine ese radical elevando ambos lados de la ecuación a una potencia apropiada.

$\frac{1}{\sqrt{x}}$

x^{-2}

$\boxed{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}$

$\frac{1}{2} = 2^{-1}$

$(\sqrt{x}^{-1})$

3. *Repita los pasos (1) y (2) hasta que se hayan eliminado todos los radicales de la ecuación.*
4. Después de haber eliminado todos los radicales, resuelva la ecuación.
5. Verifique su(s) respuesta(s).

ECUACIONES DE TIPO CUADRATICO

Ciertas clases de ecuaciones pueden transformarse en ecuaciones cuadráticas por medio de una apropiada sustitución. Los siguientes ejemplos ilustran esta técnica.

EJEMPLO 4

Resuelva $x^{2/3} + 4x^{1/3} - 5 = 0$.

Solución. Esta ecuación puede reescribirse como

$$(x^{1/3})^2 + 4(x^{1/3})^1 - 5 = 0$$

por tanto, puede considerarse una ecuación cuadrática en la variable $v = x^{1/3}$. La expresión cuadrática del lado izquierdo de

$$v^2 + 4v - 5 = 0$$

se factoriza, y tenemos entonces

$$(v + 5)(v - 1) = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $v = -5$ y $v = 1$. Ya que $v = x^{1/3}$, tenemos

$$x^{1/3} = -5 \quad \text{y} \quad x^{1/3} = 1$$

Elevando al cubo ambos lados de cada una de estas ecuaciones, obtenemos

$$x = -125 \quad \text{y} \quad x = 1$$

Luego, por sustitución, podemos verificar que ambas respuestas satisfagan la ecuación original. Por tanto, las soluciones son -125 y 1.

EJEMPLO 5

Resuelva $r^{1/2} + 30r^{-1/2} - 11 = 0$.

Solución. Comenzamos por eliminar los exponentes negativos:

$$r^{1/2} + 30r^{-1/2} - 11 = 0$$

$$r^{1/2} + \frac{30}{r^{1/2}} - 11 = 0$$

Para eliminar los fraccionarios de la ecuación, multiplicamos ambos lados por $r^{1/2}$:

$$r + 30 - 11r^{1/2} = 0$$

$$r - 11r^{1/2} + 30 = 0$$

o

$$(r^{1/2})^2 - 11r^{1/2} + 30 = 0$$

Si dejamos ahora a $v = r^{1/2}$, obtenemos una ecuación cuadrática,

$$v^2 - 11v + 30 = 0$$

que se factoriza como: $(v - 6)(v - 5) = 0$

da como resultado que

$$v = 6 \quad \text{y} \quad v = 5$$

y así

$$r^{1/2} = 6 \quad \text{y} \quad r^{1/2} = 5$$

Elevando al cuadrado cada una de éstas nos dan las respuestas $r = 36$ y $r = 25$. Debe verificar que los dos números satisfagan la ecuación original.

ECUACIONES CON VALORES ABSOLUTOS

De la definición de valor absoluto de un número (véase sección 1.2) se deduce que para cualquier número real *positivo* a,

$$|x| = a \quad \text{si y sólo si} \quad x = a \text{ o } x = -a$$

EJEMPLO 6

Resuelva $|5x - 3| = 8$.

Solución. La ecuación dada equivale a dos ecuaciones:

$$5x - 3 = 8 \quad \text{or} \quad 5x - 3 = -8$$

Resolvemos cada una de éstas. De $5x - 3 = 8$, obtenemos

$$5x = 11, \text{ lo cual implica que } x = \frac{11}{5}.$$

De $5x - 3 = -8$, tenemos

$$5x = -5 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Entonces, las respuestas son -1 y $\frac{11}{5}$. Por sustitución se puede verificar que ambas satisfacen la ecuación dada.

EJEMPLO 7

Puesto que el valor absoluto de un número real es siempre positivo, no hay solución para la ecuación

$$|x - 4| = -3$$

En el ejemplo 8, resolvemos una fórmula utilizando algunas de las técnicas tratadas en esta sección.

EJEMPLO 8

El periodo de oscilación T, o tiempo de una oscilación completa de un péndulo, está dado por la fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y l es la longitud del péndulo (véase figura 15). Despeje l.

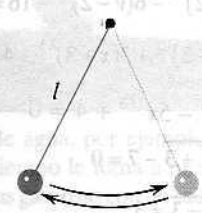


FIGURA 15

Solución. Primero dividimos ambos lados por 2π para aislar el radical:

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{2\pi}$$

$$\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Elevando ambos lados al cuadrado para eliminar el radical, obtenemos

$$\frac{l}{g} = \frac{T^2}{4\pi^2}$$

Multiplicando ambos lados por g, encontramos

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

Prueba: sustituimos $l = (gT^2)/(4\pi^2)$ en $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ y simplificamos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(gT^2)/(4\pi^2)}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{T^2}{4\pi^2}}$$

Puesto que $T \geq 0$, $\sqrt{T^2} = T$, y completamos la comprobación como sigue

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{T^2}{4\pi^2}} = \frac{2\pi T}{2\pi} = T$$

EJERCICIO 2.5

En los problemas 1 al 40, resuelva la ecuación dada.

1. $\dfrac{1}{x-2} = \dfrac{2x+1}{x^2-4}$
2. $\dfrac{x}{2a} = \dfrac{4a}{x+2a}$
3. $\dfrac{s^2-s}{2s-1} = s+3$
4. $\dfrac{1-2t}{3-t} = \dfrac{t-2}{3t-1}$
5. $\dfrac{1}{(y+2)^2} + \dfrac{1}{y+2} - 6 = 0$
6. $\dfrac{1}{y^4} + \dfrac{1}{y^2} - 2 = 0$
7. $3 - \dfrac{2z}{z+1} - \dfrac{z^2}{(z+1)^2} = 0$
8. $1 - \dfrac{8}{x^2+1} + \dfrac{16}{(x^2+1)^2}$
9. $x^{2/5} - 7x^{1/5} - 8 = 0$
10. $4w^{1/3} - 7w^{1/6} - 2 = 0$
11. $4x^{-4} - 17x^{-2} + 4 = 0$
12. $(v-2)^{1/2} - 6(v-2)^{1/4} - 16 = 0$
13. $4(x+3)^{1/3} + 3(x+3)^{2/3} - 4 = 0$
14. $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 4 = 0$
15. $\sqrt{6r^2+3} - 7 = 0$
16. $\sqrt{4x^2+2} + 5 = 0$
17. $\sqrt[3]{2x-3} = 3$
18. $\sqrt[3]{3x-5} = 0$
19. $\sqrt[3]{x^2+2x} = 2$
20. $\sqrt[4]{g^2-4} = 2$
21. $\sqrt{x+1} + x - 1 = 0$
22. $x^2 - \sqrt{2x+1} = 2$
23. $\sqrt{2x-5} - \sqrt{x-3} = 1$
24. $\sqrt[3]{2x-1} = 5$
25. $\sqrt{2u} - \sqrt{u+1} + 1 = 0$
26. $\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{x+1}$
27. $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+6} - 3 = 0$
28. $3w + \sqrt{w+1} = -3$
29. $\sqrt{2x+8} + \sqrt{2x+5} = \sqrt{2x+13}$
30. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} = \sqrt{4x+3}$
31. $(\sqrt{x}-1)^2 - 7(\sqrt{x}-1) + 10 = 0$
32. $r + \sqrt{r} - 20 = 0$
33. $|4x-1| = 2$
34. $|4-3x| = 8$
35. $\left|\dfrac{1}{4} - \dfrac{3u}{2}\right| = 1$
36. $|4x-3| = 2x+3$
37. $|15-4y| = 0$
38. $|2x-8| = 0$
39. $|2w-3| = -5$
40. $|x^2-2x-4| = 0$

En los problemas 41 y 42, encuentre las soluciones reales de la ecuación dada.

41. $|1-2x^2| = 4$
42. $|x^2-4x+4| = 4$

Las fórmulas en los problemas 43 al 48 ocurren en las aplicaciones. Despeje la variable indicada en términos de las demás variables (suponga que todas las variables son números reales positivos).

43. Teorema de Pitágoras

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ para } a$$

44. Perímetro aproximado de una elipse

$$c = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \text{ para } b$$

45. Curvatura de una gráfica

$$\kappa = \frac{f'}{\left[1 + (f')^2\right]^{3/2}}, \text{ para } f'$$

46. Movimiento elíptico: velocidad

$$v = R\sqrt{\frac{g_R}{r}}, \text{ para } r$$

47. Movimiento elíptico: periodo

$$T = \frac{2\pi}{R\sqrt{g_R}}\, r^{3/2} \text{ para } r$$

48. Area de la superficie lateral de un cono

$$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}, \text{ para } r$$

En los problemas 49 al 52, use una calculadora para aproximar las soluciones de la ecuación dada.

49. $2x^{-2} - 4x^{-1} = 3$ **50.** $1.8y + 8\sqrt{y} - 5.6 = 0$

51. $3y^{1/4} - y^{1/2} = -5$ **52.** $\sqrt{0.2x^2 - 1} - 3 = 0$

53. La raíz cuadrada de 4 veces un número disminuido en 2 es 6; halle el número.

54. La raíz cúbica de 5 veces un número aumentado en 2 es 3; halle el número.

55. Un rombo es un cuadrilátero con 4 lados iguales s y lados opuestos paralelos. Las diagonales D y d son perpendiculares y se bisecan entre sí (véase figura 16). Utilice el teorema de Pitágoras para verificar que:

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + d^2}$$

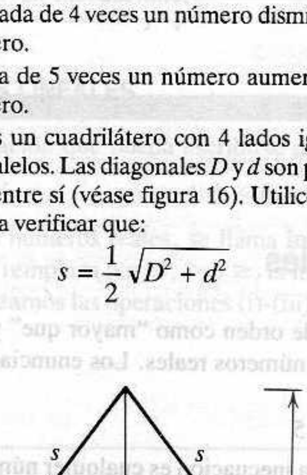


FIGURA 16

56. Randy está haciendo una cometa en el contorno de un rombo. Cada lado de la cometa debe tener 5 pies de largo y su palo para la franja horizontal mide 4 pies. Utilice los resultados del problema 55 para determinar de qué longitud debe ser el palo vertical.

57. La longitud de la diagonal d de una caja rectangular de ancho a, altura h, y longitud l está dada por

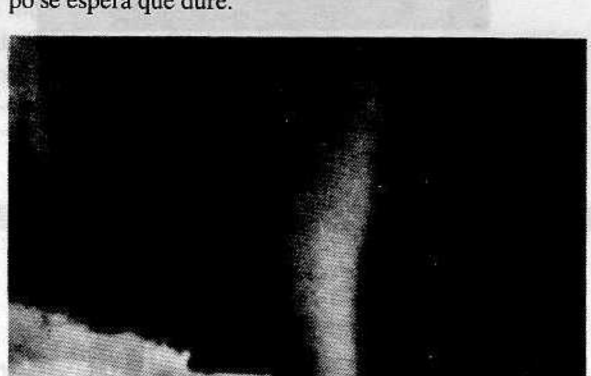
$$d = \sqrt{a^2 + h^2 + l^2}$$

Si la diagonal de una caja rectangular es de 225 cm, la altura es 2 veces el ancho, y el largo es la mitad del ancho, encuentre las dimensiones de la caja.

58. Los meteorólogos utilizan la ecuación $D^3 = 216T^2$ como modelo para describir la dimensión e intensidad de cuatro clases de tormentas violentas: tornados, tronadas, huracanes y ciclones, donde D es el diámetro de la tormenta en millas y T es el número de horas durante las cuales viaja la tormenta antes de disiparse. Despeje T. (*Fuente*: *Notas de matemáticas de un estudiante, NCTM*, enero de 1987).

59. El peor monzón registrado en el mundo tuvo lugar entre el 13 y el 14 de noviembre de 1970 en el delta de las islas de Ganges en Bangladesh. Más de un millón de personas murieron. Dado que esta tormenta duró 24 horas, utilice la fórmula del problema 58 para determinar su diámetro.

60. En los Estados Unidos ocurren cerca de 150 tornados cada año. Si el diámetro de un tornado es de 2 millas, utilice la fórmula dada en el problema 58 para determinar cuánto tiempo se espera que dure.



61. Al gasear una gran cantidad de agua, por ejemplo un lago artificial, es útil saber cuánto tiempo le toma a una burbuja llegar a la superficie. Las burbujas gaseosas con un radio mayor de 0.5 cm suben en el agua con una velocidad v en metros por segundo dada por la fórmula.

$$v = 1.02\sqrt{gr}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (9.8 m/s^2) y r es el radio de una burbuja esférica medida en metros. Suponga que un aeróforo localizado a una profundidad de 20 m produce burbujas de 2 cm de radio. ¿En cuánto tiempo tal burbuja llega a la superficie?

(*Nota*: esta fórmula pronostica que las burbujas grandes ascienden más rápido que las pequeñas. Esto es cierto también para las burbujas de todos los tamaños, como usted lo puede verificar vertiendo un vaso de cualquier bebida carbonada).

62. Los estudios geológicos sobre la corteza terrestre indican que la litosfera fresca (roca fundida) que se apiña sobre los rebordes de los océanos se hunde a medida que éstos se enfrían y se alejan de la orilla. En planchas de estructura terrestre, la velocidad a la cual se hunde la litosfera se predice por la ecuación

$$Z = C\sqrt{T}, \quad 0 \le T \le 100$$

donde Z, es la profundidad en metros con la cual se ha hundido la litosfera, T es la edad de la litosfera en millones de años, y C es una constante. (El valor $C = 300$ se ajusta relativamente bien a los datos). Véase figura 17.

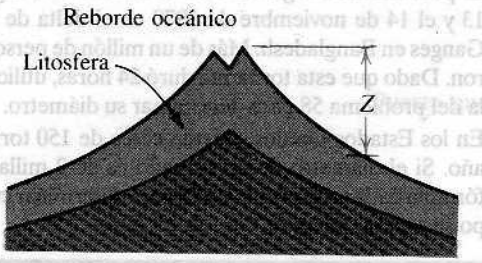


FIGURA 17

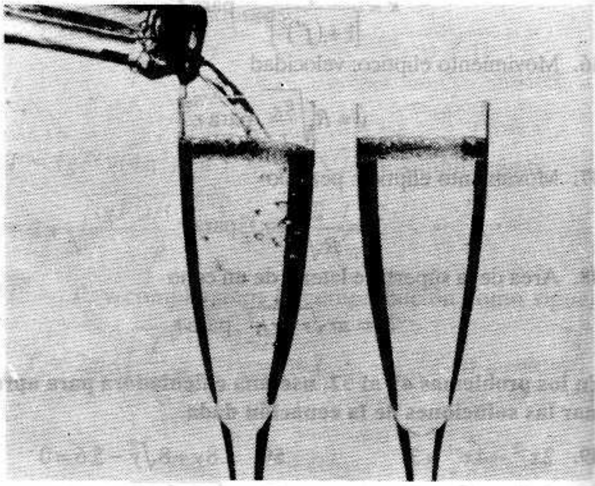
(a) ¿Hasta dónde se ha hundido la litosfera después de 100 millones de años?

(b) Resuelva la ecuación dada para T. ¿Qué edad tiene la litosfera que se ha hundido 500 m?

63. En 1948 Court afirmó que

$$K = (10.9\sqrt{v} + 9.0 - v)(33 - T)$$

era un mejor ajuste empírico a los datos recogidos por Siple y Passel para la razón de refrigeración del viento, que la fórmula que ellos mismos habían dado (véase problema 65 en la sección 2.2). Halle la velocidad del viento v, a la cual las dos fórmulas concuerdan sobre la razón de refrigeración.



2.6 Inecuaciones lineales

En la sección 1.2 definimos las relaciones de orden como "mayor que" y "menor que" y vimos cómo interpretarlas en la recta de los números reales. Los enunciados que incluyen relaciones de orden tales como

$$3x - 7 > 5 \tag{16}$$

se llaman **inecuaciones.** Una **solución** de una inecuación es cualquier número que, cuando se lo sustituye por la variable, hace que el enunciado sea verdadero. Por ejemplo, si sustituimos $x = 5$ en (16), tenemos el enunciado verdadero $3(5) - 7 > 5$. Resolver una inecuación significa encontrar el conjunto de todos los números reales para los cuales el enunciado es verdadero. Se dice que dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

Como cuando se resuelven ecuaciones, resolvemos una inecuación encontrando una inecuación equivalente con solución obvia. Las siguientes operaciones dan como resultado inecuaciones equivalentes.

> **Operaciones que producen inecuaciones equivalentes**
>
> Sean a, b y c números reales.
>
> **(i)** Si $a < b$ y c es cualquier número real, entonces
> $$a + c < b + c$$
> **(ii)** Si $a < b$ y c es positivo, entonces
> $$a \cdot c < b \cdot c$$
> **(iii)** Si $a < b$ y c es negativo, entonces
> $$a \cdot c > b \cdot c$$

Las operaciones de (i) a (iii) también son aplicables con $>$ en lugar de $<$ y $<$ en lugar de $>$. Además, (i)-(iii) pueden formularse para las relaciones de orden $\leq$ y $\geq$ (véanse problemas 49 y 50). Para verificar (i), asuma que $a < b$; luego, de la discusión en la sección 1.2 se deduce que $b - a$ es positivo. Si le añadimos $c - c = 0$ a un número positivo, la suma es positiva. Por tanto,

$$\begin{aligned} b - a + (c - c) &= b + c - a - c \\ &= (b + c) - (a + c) \end{aligned}$$

es un número positivo. Entonces, tenemos $a + c < b + c$. Dejamos la comprobación de (ii) y (iii) como ejercicios (véanse problemas 51 y 52).

Nota de advertencia: cuando ambos lados de una inecuación se multiplican por un número negativo, entonces aplicando (iii) la dirección de la desigualdad se invierte. Olvidar invertir la dirección de una desigualdad es uno de los errores más comunes que se cometen cuando se resuelven inecuaciones.

INECUACIONES LINEALES

Cualquier inecuación que pueda escribirse de la forma

$$ax + b < 0, \quad a \neq 0 \qquad \textbf{(17)}$$

donde a y b son números reales, se llama **inecuación lineal** en x. Si el símbolo $<$ en la ecuación (17) se remplaza por $\leq$, $>$ o $\geq$, la inecuación resultante también se llama inecuación lineal. Utilizamos las operaciones (i)-(iii) para encontrar la solución de una inecuación lineal.

EJEMPLO 1

Resuelva $8x + 4 < 16 + 5x$.

Solución. Obtenemos inecuaciones equivalentes, como sigue:

$$8x + 4 < 16 + 5x$$

$$8x + 4 - 4 < 16 + 5x - 4 \qquad \boxed{\text{Por (i)}}$$

$$8x - 5x < 12 + 5x - 5x \qquad \boxed{\text{Por (i)}}$$

$$3x < 12$$

$$\tfrac{1}{3}(3x) < \tfrac{1}{3}(12) \qquad \text{Por (ii)}$$

$$x < 4.$$

Por tanto, las respuestas de $8x + 4 < 16 + 5x$ son todos los números reales menores que 4.

EJEMPLO 2

Resuelva $\frac{1}{2} - 3x \leq \frac{5}{2}$.

Solución. Las siguientes inecuaciones son equivalentes. (Usted debe ser capaz de explicar cada paso).

$$\tfrac{1}{2} - 3x \leq \tfrac{5}{2}$$

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 3x \leq -\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2}$$

$$-3x \leq \tfrac{4}{2}$$

$$-3x \leq 2$$

$$-\tfrac{1}{3}(-3x) \geq -\tfrac{1}{3}(2)$$

$$x \geq -\tfrac{2}{3}$$

Se deduce que las soluciones de la inecuación dada son todos los números reales mayores o iguales que $-\frac{2}{3}$.

INECUACIONES SIMULTANEAS

La **inecuación simultánea**

$$a < x < b$$

significa que tanto $a < x$ como $x < b$. Por ejemplo, el conjunto de números reales que satisfacen

$$2 < x < 5$$

es la intersección de los conjuntos $\{x|2 < x\}$ y $\{x|x < 5\}$. Estos conjuntos se grafican en la figura 18. Para **graficar** un conjunto de números reales, oscurecemos los puntos en la línea de números reales que correspondan al conjunto dado.

Utilizando inecuaciones básicas e inecuaciones simultáneas, podemos describir ciertos conjuntos de números reales llamados **intervalos**. A estos intervalos corresponden una notación y terminología de intervalo especiales que se muestran en el siguiente cuadro. Como lo veremos en los ejemplos siguientes, la notación de intervalo nos proporciona una manera eficaz de escribir las soluciones de muchas inecuaciones.

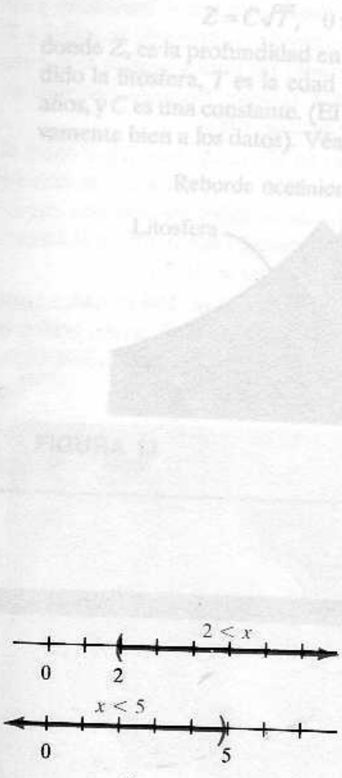


FIGURA 18

INTERVALO	NOTACION DE INTERVALO	NOMBRE	GRAFICA
$\{x \mid a < x < b\}$	(a, b)	Intervalo abierto	a b
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	Intervalo cerrado	a b
$\{x \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	Intervalo semiabierto	a b

(*continúa*)

INTERVALO	NOTACION DE INTERVALO	NOMBRE	GRAFICA
$\{x \mid a \le x < b\}$	$[a, b)$ $[a, b[$	Intervalo semiabierto	
$\{x \mid a < x\}$	(a, ∞) $]a, \infty[$	Intervalo infinito	
$\{x \mid x < b\}$	$(-\infty, b)$ $]-\infty, b[$	Intervalo infinito	
$\{x \mid x \le b\}$	$(-\infty, b]$ $]-\infty, b]$	Intervalo infinito	
$\{x \mid a \le x\}$	$[a, \infty)$ $[a, \infty[$	Intervalo infinito	

En la tabla utilizamos los símbolos ∞, leído "infinito", y $-\infty$, leído "menos infinito", para representar ciertos tipos de intervalos llamados **intervalos infinitos**. Estos símbolos no representan números reales. Por ejemplo, $(7, \infty)$ significa simplemente todos los números reales mayores que 7. Nótese también que un corchete cuadrado indica que el punto final respectivo se incluye en el intervalo, mientras que un paréntesis redondo indica que el punto final respectivo no se incluye en el intervalo.

EJEMPLO 3

Utilizando la notación de intervalo, podemos expresar las soluciones de los ejemplos 1 y 2 de la forma $(-\infty, 4)$ y $[-\frac{2}{3}, \infty)$, respectivamente. Las gráficas se muestran en la figura 19.

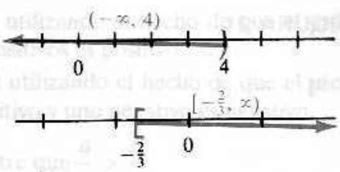


FIGURA 19

SOLUCION DE INECUACIONES SIMULTANEAS

Como lo muestran los siguientes ejemplos, usualmente podemos resolver inecuaciones simultáneas aislando la variable en la mitad. Las operaciones (i)-(iii) se aplican en ambas partes de la inecuación al mismo tiempo.

EJEMPLO 4

Resuelva $-7 \le 2x + 1 < 19$. Dé las soluciones en notación de intervalo y trace la gráfica.

Solución. Obtenemos inecuaciones equivalentes como sigue:

$$-7 \le 2x + 1 < 19$$

$$-7 - 1 \le 2x + 1 - 1 < 19 - 1 \quad \text{Por (i)}$$

$$-8 \le 2x < 18$$

$$\tfrac{1}{2}(-8) \le \tfrac{1}{2}(2x) < \tfrac{1}{2}(18) \quad \text{Por (ii)}$$

$$-4 \le x < 9$$

Así, las soluciones de la inecuación dada son todos los números del intervalo $[-4, 9)$. La gráfica se muestra en la figura 20.

FIGURA 20

Nota de advertencia: se usa escribir inecuaciones simultáneas con el número menor a la izquierda. Por ejemplo, a pesar de que $5 > x > 2$ está técnicamente correcto, debe reescribirse como $2 < x < 5$ para mostrar el orden en la recta numérica. El siguiente ejemplo ilustra este punto.

EJEMPLO 5

Resuelva $-1 < 1 - 2x < 3$. Dé las soluciones en notación de intervalo y trace la gráfica.

Solución. Debe explicar por qué las siguientes son inecuaciones equivalentes:

$$-1 < 1 - 2x < 3$$
$$-1 - 1 < -1 + 1 - 2x < -1 + 3$$
$$-2 < -2x < 2$$

Aislamos la variable x de la mitad de la inecuación simultánea, multiplicando por $-\frac{1}{2}$, ya que la multiplicación por un número negativo invierte la dirección de las desigualdades:

$$-\tfrac{1}{2}(-2) > -\tfrac{1}{2}(-2x) > -\tfrac{1}{2}(2)$$
$$1 > x > -1$$

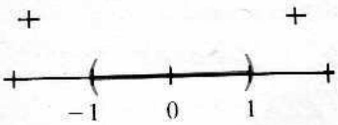


FIGURA 21

Para expresar esta solución en notación de intervalo, primero la reescribimos poniendo el número menor a la izquierda:

$$-1 < x < 1$$

Por lo tanto, las soluciones pueden expresarse como el intervalo $(-1, 1)$, el cual se dibuja en la figura 21.

El ejemplo 6 ilustra una aplicación que incluye inecuaciones

EJEMPLO 6

A la señora Johnston se le pagan US\$15,000 al año más una comisión de 8% sobre sus ventas. ¿Qué ventas anuales corresponderían a un ingreso anual entre los US\$23,000 y los US\$27,000?

Solución. Si asignamos a x la cantidad en dólares de las ventas anuales de la señora Johnston, entonces $15{,}000 + 0.08x$ es igual a su ingreso anual en dólares. Entonces, queremos hallar x tal que

$$23{,}000 \leq 15{,}000 + 0.08x \leq 27{,}000$$

Resolvemos esta inecuación como sigue

$$8000 \leq 0.08x \leq 12{,}000$$
$$100{,}000 \leq x \leq 150{,}000$$

Entonces, las ventas anuales de la señora Johnston deben estar entre US\$100,000 y US\$150,000 para que su ingreso anual oscile entre US\$23,000 y US\$27,000.

EJERCICIO 2.6

En los problemas 1 al 8, escriba la inecuación utilizando notación de intervalo y luego haga la gráfica del intervalo.

1. $x < 0$
2. $0 < x < 6$
3. $x \geq 5$
4. $-1 \leq x$
5. $4 \leq x < 6$
6. $-4 \leq x \leq -1$
7. $-5 < x \leq 3$
8. $x > -4$

En los problemas 9 al 14, diga si es falso o verdadero.

9. Si $a > b$, entonces $a - 15 > b - 15$. ____
10. Si $a < b$, entonces $-a < -b$. F
11. Si $0 < a$, entonces $a < a + a$. ____
12. Si $a < 0$, entonces $a + a < a$. ____
13. Si $1 < a$, entonces $1/a < 1$. ____
14. Si $a < 0$, entonces $a/-a < 0$. ____

En los problemas 15 al 26, resuelva la inecuación e indique dónde se utilizan las operaciones (i)-(iii).

15. $x + 3 > -2$ **16.** $3 - 9x < -6$

17. $2/3x + 10 \leq 4$ **18.** $4 - 3/4x \geq -5$

19. $x/2 - 1/3 \leq 2/3x$ **20.** $-(1 - 2x) > x - 1$

21. $-7 < x - 2 < 1$ **22.** $-5 \leq x - 4 \leq 3$

23. $4 \leq 1/2x - 1/3 < 5$ **24.** $-3 < 4x < 0$

25. $0 < 1/2\,(8 - 4x) < 6$ **26.** $-2 < \dfrac{6 - x/3}{5} \leq 4$

En los problemas 27 al 42, resuelva la inecuación, exprese las soluciones en notación de intervalo y trace la gráfica.

27. $2 + 3x < 0$ **28.** $\dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{3}x \leq \dfrac{3}{2}x - 2$

29. $2(x+3) \geq 3(x-1)$ **30.** $-7x + 3 \leq 4 - x$

31. $\pi + 6 > 3x - 2$ **32.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}x - \dfrac{5}{2} > 1/2\left(3 - 4\dfrac{\sqrt{2}}{3}x\right)$

33. $8x - 5 > 1 - 2x$ **34.** $-10 < \dfrac{2}{3}x < 4$

35. $-3 \leq -x < 2$ **36.** $0 < 7 - 3x < 2$

37. $-3 < 4x - 2 < -3/2$ **38.** $2 \leq 1/2x - 6 < 8$

39. $\sqrt{2} + 1 < 5x + 1 < 8$ **40.** $100 - x < 6x - 4 < 121 - x$

41. $x^2 - 1 \leq (x-1)^2 - 5$ **42.** $(x-3)(x-2) \geq (x+3)(x+2)$

43. James desea obtener una calificación de B en matemáticas. En los tres primeros exámenes obtuvo 79%, 75% y 74% respectivamente. La calificación B requiere un promedio entre 75% y 85%; ¿qué calificación debe obtener James en el examen final para lograr la B en el curso?

44. Si 7 veces un número se disminuye en 5, el resultado es menor que 47. ¿Qué puede concluirse sobre el número?

45. A un tarro de 4 onzas de café instantáneo se le descuentan 50 centavos, y el tarro de 2.5 onzas se vende a US\$3. ¿A qué precio sería más económico el tarro más grande?

46. Un taxi cobra 80 centavos por el primer cuarto de milla y 30 centavos por cada cuarto de milla adicional. ¿Qué distancia en cuartos de milla puede recorrer una persona que tiene entre US\$5 y US\$9?

47. Generalmente se considera que una persona tiene fiebre si presenta una temperatura oral mayor de 37° C. ¿Qué temperatura en la escala Fahrenheit indica fiebre? [*Sugerencia*: recuerde que $T_C = \dfrac{5}{9}(T_F - 32)$, donde T_F es el grado Fahrenheit y T_C es el grado Celsius].

48. El administrador de una fábrica debe decidir si deberán producir sus propios empaques, que la empresa ha estado adquiriendo de proveedores externos a US\$1.10 cada uno. La fabricación de los empaques incrementaría los costos generados de la empresa en US\$1,800 y el costo del material y de la mano de obra será de 90 centavos por cada empaque. ¿Cuántos empaques deberá usar la empresa al mes para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques?

49. Escriba de nuevo la operación (i) para la relación de orden mayor o igual que ($\geq$).

50. Escriba de nuevo la operación (iii) para la relación de orden mayor que ($>$).

51. Pruebe la operación (ii) utilizando el hecho de que el producto de dos números positivos es positivo.

52. Pruebe la operación (iii) utilizando el hecho de que el producto de un número positivo y uno negativo es negativo.

53. Si $a > b$ y $c > 0$, demuestre que $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

54. Si $9 < a < b$, demuestre que $a^2 < b^2$. ¿Cuál es la relación entre a^2 y b^2, si $a < c$? ¿Si $b < a < 0$?

2.7 inecuaciones con valor absoluto

Muchas aplicaciones importantes de inecuaciones incluyen también valores absolutos. Recuerde que en la sección 1.2 $|x|$ representa la distancia a lo largo de la recta numérica desde x hasta el origen. Así $|x| < b (b > 0)$ significa que la distancia desde x hasta el origen es menor que b. Podemos ver en la figura 22 que éste es el conjunto de números reales x tales que $-b < x < b$. Por otra parte, $|x| > b$ significa que la distancia desde x hasta el origen es mayor que b. Por tanto, como lo muestra la figura 23, $x > b$ o $x < -b$. Estas observaciones geométricas indican las siguientes propiedades del valor absoluto.

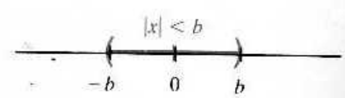


FIGURA 22

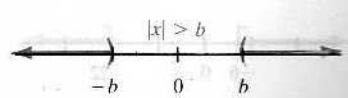


FIGURA 23

Propiedades del valor absoluto

Sea b un número positivo.

(i) $|X| < b$ si y sólo si $-b < X < b$.

(ii) $|X| > b$ si y sólo si $X < -b$ o $X > b$.

Las propiedades (i) y (ii) también se aplican con $\leq$ en lugar de $<$ y $\geq$ en lugar de $>$

EJEMPLO 1

Resuelva $|3x - 7| < 1$ y grafique las soluciones.

Solución. Utilizando la propiedad (i), hacemos la identificación de que $X = 3x - 7$ y reemplazamos $|3x - 7| < 1$ por la inecuación simultánea equivalente. Luego, resolvemos:

$$-1 < 3x - 7 < 1$$
$$-1 + 7 < 3x - 7 + 7 < 1 + 7$$
$$6 < 3x < 8$$
$$\tfrac{1}{3}(6) < \tfrac{1}{3}(3x) < \tfrac{1}{3}(8)$$
$$2 < x < \tfrac{8}{3}$$

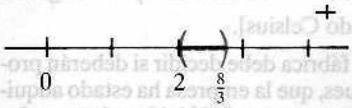


FIGURA 24

Las soluciones son todos los números del intervalo abierto $(2, \frac{8}{3})$. La gráfica se muestra en la figura 24.

EJEMPLO 2

Resuelva $|4 - \frac{1}{2}x| \geq 7$ y grafique las soluciones.

Solución. De la propiedad (ii), para $\geq$, hacemos la identificación de que $X = 4 - \frac{1}{2}x$. Concluimos que

$$|4 - \tfrac{1}{2}x| \geq 7$$

equivale a

$$4 - \tfrac{1}{2}x \leq -7 \quad \text{o} \quad 4 - \tfrac{1}{2}x \geq 7$$

resolvemos cada una de estas inecuaciones por separado. Tenemos primero

$$4 - \tfrac{1}{2}x \leq -7$$
$$-\tfrac{1}{2}x \leq -11$$
$$x \geq 22$$

En notación de intervalo esto es $[22, \infty)$. Luego, resolvemos

$$4 - \tfrac{1}{2}x \geq 7$$
$$-\tfrac{1}{2}x \geq 3$$
$$x \leq -6$$

En notación de intervalo esto se escribe $(-\infty, -6]$.

Puesto que cualquier número real que satisfaga bien sea a

$$4 - \tfrac{1}{2}x \leq -7 \quad \text{o} \quad 4 - \tfrac{1}{2}x \geq 7$$

también satisface $|4 - \frac{1}{2}x| \geq 7$, las soluciones son los números que están en la unión de los dos intervalos sin elementos comunes

$$(-\infty, -6] \cup [22, \infty)$$

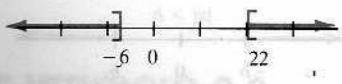


FIGURA 25

La gráfica de estas soluciones se muestra en la figura 25.

EJEMPLO 3

Resuelva $|3x - 4| \leq 0$.

Solución. Puesto que el valor absoluto de una expresión nunca es negativo, los únicos valores que satisfacen la inecuación dada son aquellos para los cuales

$$|3x - 4| = 0 \quad \text{o} \quad 3x - 4 = 0.$$

Entonces, la respuesta es $\frac{4}{3}$.

Recuerde de la sección 1.2 que $|x - a|$ representa la distancia a lo largo de la recta numérica desde x hasta a. Así, la inecuación

$$|x - a| < b$$

la cumplirán todos los números reales x cuya distancia de a sea menor que b. Esto es, las soluciones son todos los números del intervalo abierto de longitud $2b$ centrado en a. Este intervalo se muestra en la figura 26.

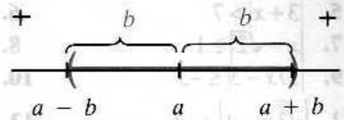


FIGURA 26

EJEMPLO 4

Utilice una inecuación para describir el conjunto de números reales que se encuentren a menos de 7 unidades de 2. Exprese las respuestas de esta inecuación en forma de intervalo y trace la gráfica.

Solución. Del análisis previo con $a = 2$ y $b = 7$ vemos que la inecuación es

$$|x - 2| < 7$$

Podríamos resolver esta inecuación utilizando la propiedad (i) o simplemente anotar que el intervalo descrito tiene punto medio 2 y longitud $2(7) = 14$. Como lo muestra la figura 27, esto se puede escribir como $(2 - 7, 2 + 7)$ ó $(-5, 9)$.

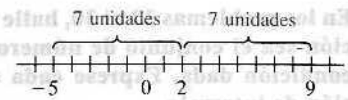


FIGURA 27

Recuerde de la sección 1.2 que el valor absoluto satisface

$$|ab| = |a||b|$$

para cualquier número real a y b. Esta propiedad se utiliza en el siguiente ejemplo, que ilustra un tipo de problema que se encuentra en cálculo.

EJEMPLO 5

Demuestre que $|2x + 6 - (2(3) + 6)| < \epsilon$* equivale a $|x - 3| < \epsilon/2$.

Solución. Primero simplificamos la expresión que está dentro de los símbolos del valor absoluto:

$$|2x + 6 - (2(3) + 6)| < \epsilon$$
$$|2x + 6 - (12)| < \epsilon$$
$$|2x - 6| < \epsilon$$
$$|2(x - 3)| < \epsilon$$

Utilizando el hecho $|ab| = |a||b|$, obtenemos

$$|2|\,|x - 3| < \epsilon$$
$$2|x - 3| < \epsilon$$
$$|x - 3| < \epsilon/2$$

* El símbolo ϵ es la letra griega épsilon, y a menudo se utiliza para indicar una cantidad positiva pequeña.

EJERCICIO 2.7

En los problemas 1 al 20, resuelva la inecuación, exprese la solución utilizando la notación de un intervalo y grafique las soluciones.

1. $|3x| \geq 18$
2. $|-4x| < 5$
3. $|x-4| \leq 9$
4. $|2x-7| > 1$
5. $|3+x| > 7$
6. $|3-(1/x-2)| \leq 7$
7. $|x-\sqrt{2}| \geq 1$
8. $|2x+7| > 0$
9. $|17x-3| \leq -3$
10. $|-12-3x| < 6$
11. $\left|\sqrt{3}x-1\right| > 2$
12. $\left|\frac{5}{2}x-3\right| < 0$
13. $|6x-4| < 2$
14. $|5x-3| \leq 4$
15. $|7/10-2x| \geq 1/10$
16. $|3.5x+2.3| < 4.6$
17. $|1/3(5x-6)| \geq 2$
18. $|1/6(3-4x)| \geq 1$
19. $\left|\frac{x}{2}-3\right| < 1/10$
20. $|3x-(-4)| < 1/100$

En los problemas 21 y 22, utilice dos inecuaciones con valor absoluto para resolver la inecuación simultánea dada.

21. $2 < |x-3| < 3$
22. $1/3 < |4x+2/3| \leq 1/4$

En los problemas 23 al 30, halle una inecuación cuya solución sea el conjunto de números reales que satisfagan la condición dada. Exprese cada conjunto utilizando notación de intervalo.

23. Mayor o igual que 3 unidades de -2.
24. Menor que 12 unidades de 5.
25. Menor que 1/2 unidad de 3.5.
26. Mayor que 7 unidades de 5/3.
27. Menor o igual a 2/3 unidades de $\sqrt{3}$.
28. Mayor o igual a π unidades de $\sqrt{2}$.
29. A lo más 4 unidades de 7.
30. Mayor que δ unidades de d.

En los problemas 31 al 34, demuestre que las inecuaciones dadas son equivalentes.

31. $|(5x+3)-(5(4)+3)| < \epsilon; |x-4| < \epsilon/5$
32. $|(3x-1)-(3(1)-1)| < \epsilon; |x-1| < \epsilon/3$
33. $|(-4x+1)-(-4(2)+1)| < \epsilon; |x-2| < \epsilon/4$
34. $|(2-4/3x)-(2-4(3))| < \epsilon; |x-9| < 3/4\epsilon$

35. Sean a y b números reales tales que $a < b$, recuerde de la sección 1.2 que el punto medio m del segmento de recta que une a a y b se obtiene con $m = \frac{(a+b)}{2}$. Demuestre que las soluciones de $|x-m| < \frac{(b-a)}{2}$ son todos los números reales del intervalo abierto (a, b).

36. Utilice el resultado del problema 35 para escribir el intervalo $(-7, 2)$ de la forma $|X| < c$.

37. Utilice el resultado del problema 35 para escribir el intervalo $(-5, 3)$ de la forma $|X| < c$.

38. Se especifica que una parte exacta de un motor pequeño tiene un diámetro de 0.623 cm para que la parte encaje correctamente. Su diámetro debe estar a 0.005 cm del diámetro especificado. Escriba una inecuación con valor absoluto que tenga como soluciones todos los diámetros posibles de las partes que encajarán; resuelva la inecuación para determinar esos diámetros.

39. El peso p de tres cuartas partes de los tarros de café llenados por un procesador de alimentos satisface la desigualdad.

$$\left|\frac{p-16.00}{0.05}\right| \leq 1$$

donde p se mide en onzas. Determine el intervalo en el cual se halla p.

40. La necesidad diaria de agua calculada para cierta ciudad está dada por $|c-3{,}725| < 100{,}000$ donde c es el número de galones de agua utilizados por día. Halle la mayor y la menor necesidad diaria de agua.

41. Se diseña una balanza que sea precisa hasta 0.25 onzas. Si en la balanza se colocan juntas dos latas de sopa idénticas y se halla que tienen un peso combinado de 33.15 onzas, ¿cuál es el mayor y el menor peso posible de una de las latas?

2.8 Inecuaciones cuadráticas y racionales

Ahora consideramos inecuaciones que incluyen ciertos tipos de expresiones cuadráticas o racionales.

INECUACIONES CUADRATICAS

Cualquier inecuación que pueda escribirse de la forma

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad a \neq 0 \tag{18}$$

donde a, b y c son números reales, se llama **inecuación cuadrática** en x. Si el símbolo $<$ en (18) se remplaza por $\leq$, $>$ o $\geq$, la **inecuación** resultante también se denomina inecuación cuadrática.

Los siguientes son ejemplos de inecuaciones cuadráticas

$$2x^2 - 3x \leq 5 \quad \text{y} \quad (x+3)(x-1) \geq 0$$

puesto que pueden escribirse, respectivamente, como

$$2x^2 - 3x - 5 \leq 0 \quad \text{y} \quad x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

Para resolver una inecuación cuadrática, encontramos útiles las siguientes propiedades de los números reales.

Propiedades de signos de los productos

(i) Si el producto de dos números reales es positivo, entonces los dos números tienen los mismos signos.

(ii) Si el producto de dos números reales es negativo, entonces los dos números tienen signos opuestos.

Por tanto, para resolver una inecuación como $(x+3)(x-1) > 0$, debemos determinar cuándo los dos factores son ambos positivos o ambos negativos, porque entonces su producto será positivo. Una manera de ocuparse de los signos de estos dos factores es haciendo un **diagrama de signos** (véase figura 28), como sigue.

$x+3$	$- - - -$ 0 $+ + + + + + + + +$		
$x-1$	$- - - - - - - - - -$ 0 $+ + + +$		
$+$	$(x+3)(x-1)$	$+ + + +$ 0 $- - - - -$ 0 $+ + + + +$	$+$
	Números críticos	-3 1	

FIGURA 28

Primero señalamos sobre una recta numérica los puntos para los cuales los factores son cero (en este caso -3 y -1). Como lo muestra la figura 28, estos puntos, llamados **números críticos**, dividen la recta en intervalos. A continuación determinamos el signo de cada factor en cada uno de estos intervalos y utilizamos las propiedades de signos (i) y (ii). Ya que estos factores lineales no pueden cambiar de signo dentro de estos intervalos, basta con obtener el signo de cada factor solamente escogiendo un *valor de prueba* de cada intervalo.

Por ejemplo, en el intervalo $(-\infty, -3)$, si utilizamos $x = -10$ como valor de prueba, encontramos que tanto $(x+3)$ como $(x-1)$ son negativos. Se deduce que su producto es positivo y se satisface la inecuación. Para el intervalo $(-3, 1)$, seleccionamos $x = 0$ como valor de prueba y encontramos que $(x+3)$ es positivo y $(x-1)$ es negativo. Así, el producto es negativo y la inecuación no se satisface. Para el tercer intervalo $(1, \infty)$, encontramos por un valor de prueba de $x = 2$ que tanto $(x+3)$ como $(x-1)$ son positivos. En consecuencia, su producto es positivo. Finalmente, debemos decidir si los números críticos son soluciones. Ya que $(x+3)(x-1)$ *es igual a cero* en los números críticos, la inecuación $(x+3)(x-1) > 0$ "mayor que" no se satisface. Por tanto, las soluciones las da la unión de los dos intervalos $(-\infty, -3)$ y $(1, \infty)$, que pueden escribirse como $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$.

En la práctica, gran parte de la solución se puede realizar mentalmente y el resultado de cada cómputo registrarse en el diagrama de signos. Puesto que se puede escoger como valor de prueba cualquier número del intervalo, los valores de prueba no se escriben en el diagrama de signos.

En los siguientes ejemplos consideraremos las inecuaciones cuadráticas en las cuales la expresión cuadrática se descompone fácilmente. Para aplicar la propiedad de signo (i) o (ii), *debemos* tener todos los términos diferentes de cero al mismo lado del signo de la inecuación.

EJEMPLO 1

Resuelva $x^2 + 2x - 15 \geq 0$.

Solución. Ya que todos los términos diferentes de cero están a un lado de la inecuación, comenzamos por factorizar:

$$(x - 3)(x + 5) \geq 0$$

A continuación desarrollamos un diagrama de signos (figura 29) con los números críticos 3 y -5. Puesto que la inecuación incluye un signo "mayor o igual que", los números críticos -5 y 3, que hacen el producto $(x - 3)(x + 5)$ igual a cero, deben incluirse como soluciones. Así, las soluciones son los números de la unión de $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$.

$x - 3$	− − − − − − − − − − 0 + + + +
$x + 5$	− − − − 0 + + + + + + + + + +
$(x - 3)(x + 5)$	+ + + + 0 − − − − − 0 + + + +

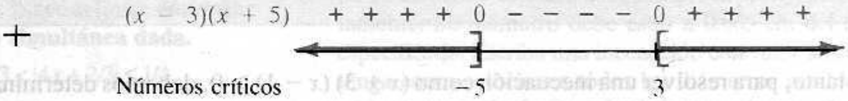


FIGURA 29

EJEMPLO 2

Resuelva $x < 10 - 3x^2$.

Solución. Comenzamos por reescribir la inecuación poniendo todos los términos diferentes de 0 al mismo lado:

$$3x^2 + x - 10 < 0$$

Factorizando nos da

$$(3x - 5)(x + 2) < 0$$

En el diagrama de signos de la figura 30 vemos que las soluciones son los números del intervalo abierto $(-2, \frac{5}{3})$. Los números críticos no se incluyen. (¿Por qué?).

$3x - 5$	− − − − − − − − − 0 + + + +
$x + 2$	− − − − 0 + + + + + + + + +
$(3x - 5)(x + 2)$	+ + + + 0 − − − − 0 + + + +

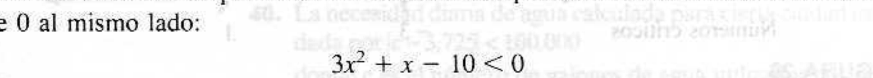


FIGURA 30

INECUACIONES RACIONALES

Una **inecuación racional** es una inecuación que está constituida por el cociente de dos polinomios, tales como

$$\frac{2x - 1}{x + 3} > 0 \quad \text{o} \quad \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} \leq 1$$

Para resolver una inecuación racional, encontramos muy útiles las siguientes propiedades adicionales de los números reales.

Propiedades de signos de los cocientes

(iii) Si el cociente de dos números reales es positivo, entonces los dos números tienen los mismos signos.

(iv) Si el cociente de dos números reales es negativo, entonces los dos números tienen signos opuestos.

Como lo ilustran los siguientes ejemplos, también podemos utilizar un diagrama de signos para resolver una inecuación racional.

EJEMPLO 3

Resuelva

$$\frac{x+1}{x+3} \leq -1$$

Solución. Para utilizar las propiedades de signos (iii) o (iv), debemos tener todos los términos diferentes de cero al mismo lado de la inecuación (exactamente de la misma forma como lo hicimos en las inecuaciones cuadráticas). Así, agregamos 1 en ambos lados de la inecuación y luego combinamos términos para obtener una inecuación racional equivalente:

$$\frac{x+1}{x+3} + 1 \leq 0$$

$$\frac{x+1}{x+3} + \frac{x+3}{x+3} \leq 0$$

$$\frac{2x+4}{x+3} \leq 0$$

Utilizando el hecho de que $2x + 4 = 0$ cuando $x = -2$ y $x + 3 = 0$ cuando $x = -3$, preparamos la gráfica de signos que se muestra en la figura 31.

$2x+4$	$- - - - - - - - - - -$	$- - - - -$ 0	$+ + + +$
$x+3$	$- - - - -$ 0	$+ + + + +$	$+ + + +$
$(2x+4)/(x+3)$	$+ + + + + +$	$- - - - -$ 0	$+ + + +$
Números críticos	-3	-2	

FIGURA 31

En esta gráfica podemos ver que

$$\frac{2x+4}{x+3} \leq 0$$

para x en $(-3, -2]$. El número crítico -3 no es una solución, puesto que $(2x+4)/(x+3)$ no está definido para $x = -3$, pero el número crítico -2 sí, ya que $(2x+4)/(x+3)$ es cero para $x = -2$

EJEMPLO 4

Resuelva

$$\frac{x(1-x)}{x+2} \geq 0$$

Solución. Ya que todos los términos diferentes de cero están a un lado de la inecuación, comenzamos por dibujar un diagrama de signos con los números críticos -2, 0 y 1 (véase figura 32).

El diagrama muestra que el factor $1 - x$ es positivo para $x < 1$ y negativo para $x > 1$. Notamos también que $x(1 - x)/(x + 2)$ es indefinido para $x = -2$. Entonces, como lo indica la figura 32, las soluciones están dadas por $(-\infty, -2) \cup [0, 1]$.

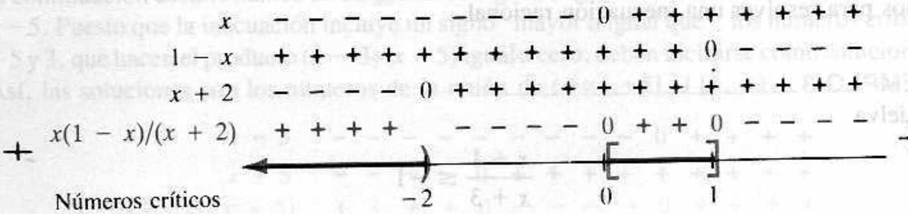


FIGURA 32

Como lo muestra el siguiente ejemplo, un diagrama de signos y las propiedades de signos (i)-(iv) se pueden utilizar para resolver otro tipo de inecuaciones, siempre que todos los términos diferentes de cero estén a un lado de la inecuación.

EJEMPLO 5

Resuelva $(x - 4)^2(x + 8)^3 > 0$.

Solución. Ya que todos los términos diferentes de cero están al mismo lado de la inecuación, comenzamos por situar los números críticos -8 y 4 en el diagrama de signos. Luego consideramos las potencias de cada factor lineal.

Vemos que, puesto que $(x - 4)^2$ está elevado al cuadrado (una potencia par), nunca es negativo. Ya que $(x + 8)^3$ es una potencia impar, tiene el mismo signo de $x + 8$. Por tanto, como lo vemos en la figura 33, las soluciones son todos los números reales incluidos en $(-8, 4) \cup (4, \infty)$.

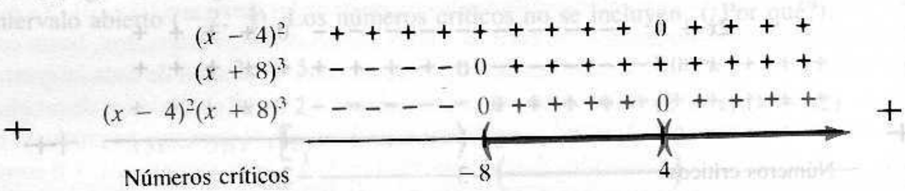


FIGURA 33

EJERCICIO 2.8

En los problemas 1 al 40, resuelva la inecuación, y exprese las soluciones utilizando notación de intervalo.

1. $x^2 - 2x - 15 > 0$
2. $3x^2 - x - 2 \leq 0$
3. $x^2 - 7x + 12 < 0$
4. $6x^2 - 14x + 4 \geq 0$
5. $x^2 - 5x \geq 0$
6. $x^2 - 6x + 9 \geq 0$
7. $3x^2 - 27 < 0$
8. $7x^2 + 4x \leq 0$
9. $9x^2 - 12x + 4 < 0$
10. $12x^2 > 27x + 27$

11. $x^2 - 25 < 0$

12. $x^2 - 5 > 0$

13. $x^2 - 12 \leq 0$

14. $-9x > 2x^2 - 18$

15. $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

16. $9x^2 + 30x > -25$

17. $\dfrac{3x-2}{x+3} > 0$

18. $\dfrac{x+5}{x} \geq 0$

19. $\dfrac{6x-2}{x+4} \leq 0$

20. $\dfrac{x/3 - 2/3}{3x+1} \leq 0$

21. $\dfrac{x+1}{x-1} + 2 > 0$

22. $\dfrac{2x+3}{x+3} \leq 0$

23. $\dfrac{3x-2}{2x+5} \geq -2$

24. $\dfrac{5x+1}{4x-1} \leq 1$

25. $\dfrac{5}{x+8} < 0$

26. $\dfrac{5}{5x+2} \geq 0$

27. $\dfrac{1}{x^2+25} < 0$

28. $\dfrac{4}{x^2-4} < 0$

29. $\dfrac{x(x+1)}{x-5} \geq 0$

30. $\dfrac{(1+x)(1-x)}{x} \leq 0$

31. $\dfrac{x^2-2x-7}{2x-1} \leq -1$

32. $\dfrac{x}{x^2-16} \geq 0$

33. $-(x+1)(x+2)(x+3) < 0$

34. $-2(x-1)(x+1/2)(x-3) \leq 0$

35. $(x^2-9)(x-2/3)^2 \geq 0$

36. $(x-1)^2(x+3)(x+5) > 0$

37. $(x-1/3)^2(x+5)^3 < 0$

38. $x^2(x-2)(x-3)^5 \geq 0$

39. $\dfrac{(x+3)^2(x-4)(x+5)^3}{x^2+x-20} > 0$

40. $\dfrac{9x^2-6x+1}{x^3-x^2} \leq 0$

En los problemas 41 al 44, resuelva la inecuación y exprese las soluciones utilizando notación de intervalo. Podría necesitar la fórmula cuadrática para factorizar la expresión cuadrática.

41. $9x > x^2 + 15$

42. $6x^2 < 3x + 5$

43. $\dfrac{5x-2}{x^2+1} \leq 1$

44. $\dfrac{x^2-x-1}{x+1} \geq 0$

45. ¿Para qué valores de x es $x^2 < x$?, ¿$x^2 > x$?

46. ¿Para qué valores de x es $1/x < x$?, ¿$x < 1/x$?

47. Si $x^2 \geq 4$, ¿es necesariamente verdadero que $x \geq 2$? Explique.

48. Si $x^2 \leq 1$, ¿es necesariamente verdadero que $x \leq 1$? Explique.

49. Un macizo rectangular va a ser dos veces más largo que ancho. Si el área circundada debe ser de más de 98 m², ¿qué puede concluir sobre el ancho del macizo?

50. Los lados de un cuadrado se extienden para formar un rectángulo. Como lo muestra la figura 34, un lado se extiende 2 cm y el otro 5 cm. Si el área del rectángulo resultante es menor de 130 cm², ¿cuáles son las posibles longitudes de un lado del cuadrado original?

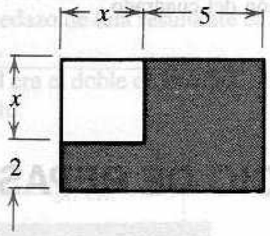


FIGURA 34

51. Una resistencia de 7 ohmios y una resistencia variable se instalan en paralelo. La resistencia resultante R_T está dada por

$$R_T = \frac{7R}{7+R}$$

determine los valores de la resistencia variable R para los cuales la resistencia resultante R_T será mayor de 3 ohmios.

52. La intensidad I en lumen de cierta fuente de luz en un punto a r centímetros de la fuente está dada por

$$I = \frac{625}{r^2}$$

¿A qué distancias de la fuente de luz la intensidad será menor de 25 lumens?

53. El número de diagonales d de un polígono de n lados, está dado por

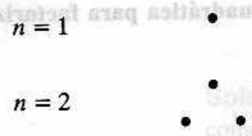
$$d = \frac{(n-1)n}{2} - n$$

¿Para qué polígonos pasará de 27 el número de diagonales?

54. El número total de puntos en una formación triangular con n filas está dado por

$$t = \frac{n(n+1)}{2}$$

¿Cuántas filas puede tener la formación si el número total de puntos debe ser menor de 5.050?



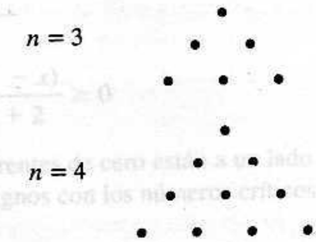


FIGURA 35

CONCEPTOS IMPORTANTES

Ecuaciones
- raíz
- identidad
- ecuación condicional
- ecuaciones equivalentes
- ecuación lineal
- ecuación cuadrática
- ecuación polinómica

Solución
- solución extraña
- verificación de una solución

Completación del cuadrado

Fórmula cuadrática
- discriminante

Teorema de Pitágoras

Números complejos
- parte real
- parte imaginaria
- conjugado complejo

Inecuaciones
- inecuaciones equivalentes
- inecuación simultánea
- inecuación con valor absoluto
- inecuación lineal
- inecuación cuadrática
- inecuación racional

Notación de intervalo
- intervalo abierto
- intervalo cerrado
- intervalo semiabierto
- intervalo infinito
- diagrama de signos
- números críticos

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 26, resuelva la ecuación dada.

1. $2/3x + 4/3 = x - 1/3$
2. $4(1-x) = x - 3(x+1)$
3. $1 - 4/t = 3 + 2/t$
4. $1 + 2/(x-1) = x - 1/x - 2$
5. $\sqrt{x} + 1/(3\sqrt{x}) = (\sqrt{x}/3) + \sqrt{x}$
6. $2/(x^2-1) + 3/(x-1) = 7/(x+1)$
7. $x(2x-1) = 3$
8. $y^2 - 4/(2y-1) = y - 2$
9. $3x^2 + x - 10 - 24 = 0$
10. $4x^2 + 10x - 24 = 0$
11. $9x^2 - 24x + 16 = 0$
12. $x^2 - 7 = 0$
13. $25x^2 + 20x + 4 = 0$
14. $4x^2 + 20x + 25 = 0$
15. $x(5x-4) = -2$
16. $8x^3 + 1 = 0$
17. $x^3 - 27 = 0$
18. $x^3 + 27 = 0$
19. $4x^4 + 8x^2 - 1 = 0$
20. $(x^2 - 6x)^2 - 2(x^2 - 6x) = 35$
21. $x^{1/4} - 2x^{1/2} + 1 = 0$
22. $2x^{1/2} - 3x^{1/4} - 2 = 0$
23. $2 - \sqrt[3]{x^2 + 2x} = 0$
24. $3 + \sqrt{3x+1} = x$
25. $\dfrac{4-x}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}} = \dfrac{3}{5}$
26. $3x^2 - 5\sqrt{3x-6} = 0$

En los problemas 27 al 34, resuelva la inecuación dada y grafique las soluciones.

27. $5 - 4x \geq 7x - 6$
28. $7 \leq 3 - 2x < 11$
29. $|4x - 3| < 5$
30. $|5 - 2x| \geq 7$
31. $2x^2 - 9x \leq 18$
32. $\dfrac{2x+6}{x+1} \geq 1$
33. $x^3 < x$
34. $(x^2 - x)(x^2 + x) \leq 0$

En los problemas 35 al 40, despeje la variable indicada en términos de las variables restantes (suponga que todas las variables representan números reales positivos).

35. Area de la superficie de un paralelepípedo rectangular

$$A = 2(ab + bc + ac), \text{ para } c$$

36. Conversión de temperatura

$$T_F = 9/5\,(T_C + 32), \text{ para } T.$$

37. Volumen de una esfera

$$V = 4/3\pi r^3, \text{ para } r$$

38. Ecuación de la lente

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \text{ para } p$$

39. Ecuación de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ para } x$$

40. Movimiento de un proyectil

$$y = x - \frac{9.8}{v_0^2}x^2, \text{ para } x$$

En los problemas 41 al 48, realice la operación indicada y escriba la respuesta de la forma $a + bi$.

41. $(6-5i)+(4+3i)$ **42.** $(5-i)-(8+2i)$

43. $(3+5i)^2$ **44.** $i(3-2i)(1-i)^2$

45. $\dfrac{1}{4-2i}$ **46.** $\dfrac{i^3}{5-i}$

47. $\dfrac{5-2i}{4+3i}$ **48.** $i^3\dfrac{(3-2i)^2}{1-i}$

En los problemas 49 al 52 despeje x y y.

49. $4(1+yi)=(3x-yi)i$

50. $(x-yi)i^3=(1-i)^2$

51. $(3-2i)+(x-yi)=1/i$

52. $i^2=-(y+xi)$

53. Si la suma de dos números es 35 y su cociente es 3/4, encuentre los dos números.

54. Dos aviones, en aire quieto, vuelan a una velocidad de 180 mph. Un avión parte de Los Angeles y viaja en dirección del viento hacia Phoenix. El segundo avión parte de Phoenix al mismo tiempo y viaja contra el viento hacia Los Angeles. Si la distancia entre las ciudades es de 400 millas y los aviones se cruzan a 250 millas de Los Angeles, halle la velocidad del viento.

55. En cuatro exámenes de igual valor, un estudiante tiene un puntaje promedio de 76. Si el examen final vale el doble de cualesquiera de los 4 exámenes, encuentre el puntaje que el estudiante debe sacar en el examen final para tener un promedio total de 80.

56. Ethan puede escribir en máquina 100 direcciones en 5 horas. Comienza y trabaja sólo por dos horas. Luego, Sean comienza a ayudarle con otra máquina de escribir y terminan la labor en otros 90 minutos. ¿Cuánto tiempo gastaría Sean escribiendo en máquina las 100 direcciones solo?

57. Dos autos viajan 40 millas. Uno viaja a 5 mph más rápidamente que el otro y hace el viaje en 16 minutos menos de tiempo. Halle las velocidades de los dos autos.

58. La distancia desde Minneápolis hasta Des Moines es de aproximadamente 250 millas: 100 millas en Minnesota y 150 millas en Iowa. Anteriormente (mayo de 1987), Iowa había elevado su límite de velocidad interestatal a 65 mph, mientras que el límite de velocidad de Minnesota era aún de 55 mph. En estas circunstancias, suponga que una mujer desea viajar de Minneápolis a Des Moines en 4 horas. Si planea conducir a 65 mph en Iowa, ¿a qué velocidad debe ir en Minnesota?

59. Halle un número de dos dígitos sabiendo que la suma de éste es 12 y que si se invierten, la razón del número original con respecto al número es igual a 4/7.

60. Se va a construir una acera alrededor de una faja circular. El diámetro de la faja es de 34 m. Si el área de la acera es de 40π m², determine el ancho de la acera.

61. Un avión vuela en la dirección del viento durante una faja y media y regresa recorriendo la misma distancia contra el viento en 2 horas; si la velocidad del avión en condiciones sin viento es de 350 millas por hora, encuentre la velocidad del viento.

62. Se corta un borde de ancho uniforme de un pedazo de tela rectangular. El pedazo de tela resultante es de 20 por 30 cm (véase figura 36).

Si el área original era el doble de la actual, halle el ancho del borde que se cortó.

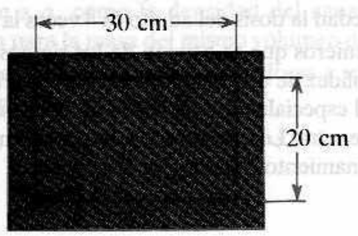


FIGURA 36

63. El piso de una casa es un rectángulo de 6 m, más largo que el doble de su ancho. Se planea una ampliación que incrementará el área total de la casa a 160 m². Si el ancho de la ampliación se aumenta en 5 m, halle las dimensiones originales de la casa.

64. Típicamente, el tamaño de la pantalla de un televisor rectangular se mide a lo largo de la diagonal. Si la pantalla tiene 3.4 pulgadas más de largo que de ancho, y el tamaño de la pantalla que se da es de 19 pulgadas, ¿cuáles son las dimensiones de la pantalla?

65. Una pelota es lanzada hacia arriba con una velocidad de 68 pies/seg desde la azotea de un edificio de 90 pies de altura; su altura S en pies sobre el nivel del suelo después de t segundos está dada por

$$s = 15t^2 + 60t + 90$$

(a) ¿Durante cuánto tiempo estará la pelota arriba de los 95 pies?

(b) ¿En qué tiempo tocará el suelo suponiendo que no toca el edificio al caer?

66. El señor Diamond compró dos bonos por un total de US$33,000. Un bono paga 8% de interés y el otro paga 10%. El interés anual del bono de 10% excede al interés anual del bono de 8% en US$1,140. Halle el costo de cada bono.

67. ¿Cuántos litros de agua se deben agregar a 7 litros de una solución de sal a 9% y agua para producir otra solución a 6% de sal?

68. La señora Applebee compró una serie de cajas musicales para su almacén por un total de US$400. Si cada caja de música hubiera costado US$4 más, habría adquirido 5 cajas de música menos por la mitad del dinero. ¿Cuántas compró?

69. Teri había trabajado en una firma aeroespacial por 21 años cuando María comenzó a laborar allí. Si Teri se jubila cuando tiene 5 veces la antigüedad de María, ¿cuánto tiempo ha trabajado cada una en la firma?

70. La fórmula recomendable para convertir la dosis adulta de una droga en dosis infantil supone una relación entre la edad y la dosificación, y se utiliza para niños menores de dos años.

$$\frac{\text{edad en meses}}{150} \times \text{dosis adulta} = \text{dosis infantil}$$

¿A qué edad es la dosis del adulto 10 veces la del niño?

71. La regla de Young para convertir la dosis para adultos de una droga en dosis para niños asume una relación entre edad y dosis, y se utiliza más frecuentemente para niños entre los 3 y los 12 años.

$$\frac{\text{edad del niño}}{\text{edad del niño} + 12} \times \text{dosis de adulto} = \text{dosis de niño}$$

¿A qué edad la dosis del adulto es 4 veces la del niño?

72. Los ingenieros que se ocupan de los riesgos de un alud miden la solidez de una banquisa de nieve martillando un tubo de metal especialmente diseñado en la nieve y viendo hasta dónde penetra. Le asignan a la banquisa de nieve un número de apisonamiento R, dado por la fórmula

$$R = H + T + nfH/p$$

donde H es la masa del martillo, T es la masa del tubo, n es el número de golpes de martillo, f es la distancia que el martillo baja por cada golpe y p es la penetración total después de n golpes (véase figura 37). Típicamente, T y H tienen 1 kg cada una y f tiene alrededor de 50 cm. Si el número de apisonamiento de la banquisa de nieve es 150, ¿hasta dónde penetra el tubo después de un golpe?

73. El tamaño de una máquina automotriz se mide por el volumen de aire presionado hacia arriba o desplazado por el movimiento de los pistones. Este volumen está dado por la fórmula

$$V = N\pi S(B/2)^2$$

donde N es el número de pistones, S es la distancia vertical o carrera que cada pistón mueve, y B es el diámetro o taladro de un pistón (véase figura 38).

(a) Halle el tamaño en pulgadas cúbicas de un V-8 (máquina de 8 cilindros) con un taladro de 4 pulgadas y una carrera de 3 pulgadas.

(b) En 1909 la máquina de 6 cilindros de Thomas Flyer tenía un taladro y una carrera de 5.5 pulgadas. Halle su tamaño. (*Nota*: las máquinas antiguas eran grandes debido a su baja eficacia).

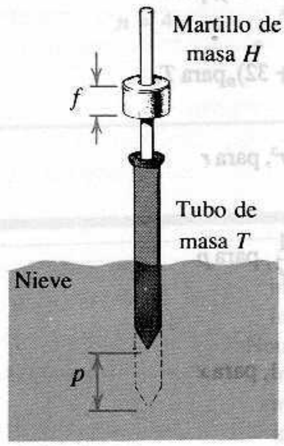


FIGURA 37

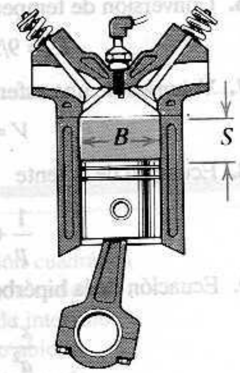


FIGURA 38

(c) El Oldsmobile Limited de 1911 desplazó 706.9 pulgadas^3 con un taladro de 5 pulgadas y una carrera de 6 pulgadas. ¿Cuántos cilindros tenía?

Oldsmobile de 1911

(d) Los automóviles veloces "aumentarán" la potencia de un carro aumentando el tamaño del taladro y la longitud de la carrera. Si la carrera se aumenta en 1/4 de pulgada y el taladro en 1/8 de pulgada en la máquina descrita en la parte (a), ¿cuánto desplazamiento se gana?

74. La fórmula de Vincent para la temperatura de la piel humana P_v en grados Celsius es

$$P_v = 30.1 + 0.2t - (4.12 - 0.13t)v$$

donde t es la temperatura del aire en grados Celsius y v es la velocidad del viento en metros por segundo.

(a) ¿A qué temperaturas t en aire quieto ($v = 0$) es menor la temperatura de la piel que la sangre (37°C)?

(b) ¿Hay una velocidad de viento a la cual tanto la temperatura t como la temperatura de la piel P sea igual a la temperatura de la sangre (37°C)? Explique su respuesta.

(c) Según esta fórmula, ¿a qué temperaturas t la velocidad del viento hace que se aumente la temperatura de la piel?

[*Sugerencia*: la velocidad del viento aumentará la temperatura del cuerpo cuando el coeficiente de v sea positivo].

75. Un arquitecto de estadios ha diseñado un parqueadero para 20,000 autos con 16 salidas a la calle. En condiciones ideales se asume que los autos saldrán suavemente a 10 mph, utilizando las 16 salidas, con un espacio de 10 pies entre cada auto.

(a) Si el auto común tiene 15 pies de largo, ¿en cuánto tiempo se desocupará el parqueadero?

[*Sugerencia*: convierta 10 mph a pies por minuto].

(b) Derive una fórmula general que exprese el tiempo T en minutos en el que C autos saldrán de un parqueadero, utilizando N salidas a la calle, con un espacio de s pies entre autos, todos moviéndose a v millas por hora, si el auto común tiene L pies de longitud. Incluya el factor que convierte millas por hora en pies por minuto.

(c) Resuelva la fórmula deducida en la parte (b) para N.

(d) Halle el número de salidas a la calle requeridas para 10,000 autos, cada uno de 15 pies de largo, de manera que salgan en no más de 30 minutos a 10 mph con 10 pies entre cada auto.

76. La gravedad específica de un material está definida como la razón de masa del material con respecto a la masa de un volumen igual de agua a 4°C. (Es necesario especificar la temperatura porque el agua se expande si se calienta por encima o se enfría por debajo de los 4°C.) A principios del siglo XX, Thiesen, Scheel y Dieselhorst encontraron la siguiente fórmula empírica para la gravedad específica G del agua como una función de la temperatura T en grados Celsius:

$$G = 1 - \frac{(T-4)^2}{118{,}931 + 1366.75T - 4.13T^2},\ 0 \le T \le 30$$

(a) Halle la gravedad específica del agua cuando $T = 30$°C.

(b) La gravedad específica del agua medida en su punto de ebullición (100°C) es 0.95838. ¿Qué daría como valor la fórmula?

(c) Según la fórmula, ¿a qué temperatura es la gravedad específica del agua igual a 0.999?

77. Puesto que el agua es más densa que el hielo, un banco de hielo flotante que se está congelando sobre una piedra grande puede sobrenadar la piedra grande si el banco de hielo crece lo suficiente como para sobrepasar el peso de la piedra. Esto ocurrirá cuando la masa del hielo más la masa de la piedra sean menores que la masa del mismo volumen de agua. Drake y McCann (1982) diseñaron este fenómeno, adoptando una piedra esférica y un banco de hielo en forma de disco (véase figura 39).

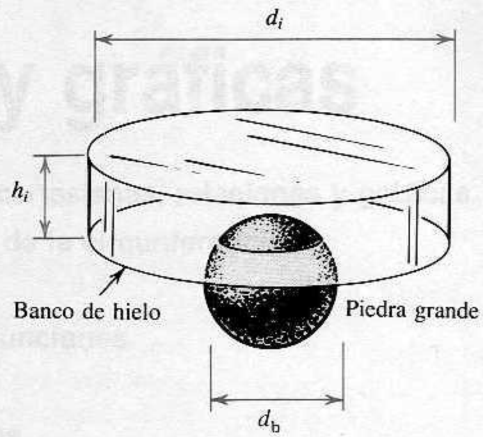


FIGURA 39

(a) Designe a d_b y d_i como representantes del diámetro de la piedra grande y el diámetro del banco de hielo, respectivamente. Designe h_i como la altura del banco de hielo y r_b y r_i como las densidades de la piedra grande y el banco de hielo respectivamente. Escriba una fórmula para la masa total del banco de hielo más la piedra grande.

(b) Designe a ρ_w como la densidad del agua. Escriba la fórmula para la masa del mismo volumen del agua.

(c) Demuestre que si el banco de hielo va a sobrenadar la piedra grande, entonces

$$d_i \ge \left[\frac{2}{3}\frac{d_b^{\,3}}{h_i}\left(\frac{\rho_b - \rho_w}{\rho_w - \rho_i}\right)\right]^{1/2}$$

[*Sugerencia:* para $0 \le a \le b$, $a^{1/2} \le b^{1/2}$].

(d) Utilice los valores $\rho_b = 2{,}600$ kg / m^3, $\rho_w = 1{,}030$ kg/m^3, $\rho_i = 0.9\,\rho_w$ y $h_i = 1$ m para hallar el diámetro de la piedra más grande a la cual un cubo de hielo de 30 m de diámetro puede sobrenadar.

3

Funciones y gráficas

Gottfried Wilhelm Leibniz

Si a un grupo de matemáticos, profesores y científicos se les preguntara cuál es el concepto matemático más importante, ciertamente el término *función* aparecería cerca o inclusive en la parte superior de la lista de sus respuestas. En los capítulos 3 y 4, nos centraremos principalmente en la definición e interpretación gráfica de una función.

La palabra "función" la introdujo probablemente el matemático alemán "coinventor del cálculo", Gottfried Wilhelm Leibniz, a finales del siglo XVII, y proviene de la palabra latina "functo", que significa acto de realizar. En los siglos XVII y XVIII, los matemáticos tenían solamente la noción más intuitiva de una función. Para muchos de ellos, una relación funcional entre dos variables estaba dada por cierta curva uniforme o por una ecuación que incluía las dos variables. A pesar de que las fórmulas y las ecuaciones juegan un papel importante en el estudio de las funciones, en la sección 3.4 veremos que la interpretación "moderna" de una función (que data de mediados del siglo XIX) es la de un tipo especial de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos.

3.1 Sistema de coordenadas cartesianas, relaciones y gráficas

Anteriormente vimos que cada número real puede asociarse exactamente con un punto en la recta numérica. Ahora examinemos una correspondencia entre puntos en el plano y pares ordenados de números reales.

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Un **sistema cartesiano o sistema rectangular o sistema de coordenadas*** se forma en un plano con dos rectas numéricas perpendiculares que se intersecan en el punto que le corresponde al número 0 en cada recta. Este punto de intersección se llama **origen** y se denota con O. A menudo, las rectas numéricas horizontales y verticales se llaman el **eje x** y el **eje y**, respectivamente. Los ejes dividen el plano en cuatro regiones, llamadas **cuadrantes**, que se numeran como lo muestra la figura 1(a). Como vemos en la figura 1(b) las escalas en el eje x y en el eje y no necesariamente son iguales. Un plano que contenga el sistema de coordenadas rectangular se llama **plano cartesiano, plano de coordenadas o plano *xy***.

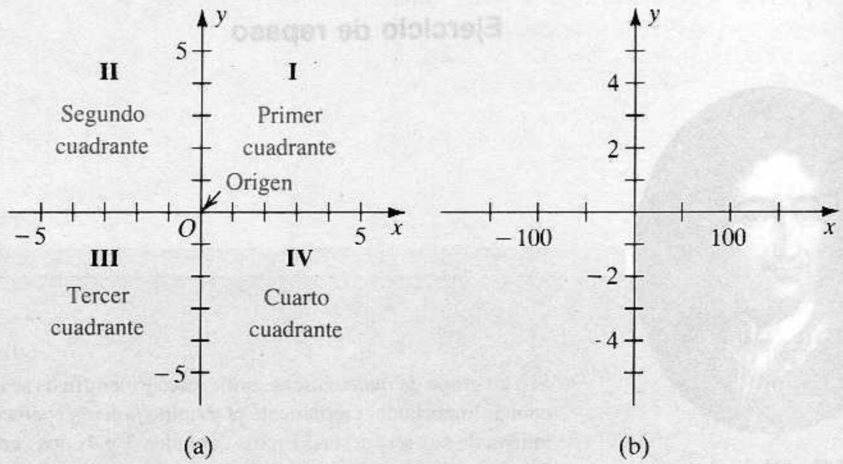


FIGURA 1

LA ABSCISA Y LA ORDENADA

Sea P un punto en el plano cartesiano. Asociamos un par ordenado de números reales con P, trazando una línea vertical desde P hasta el eje x, y una línea horizontal desde P hasta el eje y. Si la línea vertical interseca el eje x en a y la línea horizontal interseca el eje y en b, asociamos el par ordenado (a, b) con el punto P (véase figura 2). Y, viceversa, a cada par ordenado (a, b) de números reales le corresponde un punto P en el plano. Este punto se ubica en la intersección de la línea vertical y pasa a través de a en el eje x y la recta horizontal pasa

* Este sistema se llamó así en honor del filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650).

a través de b en el eje y. De aquí en adelante, nos referiremos a un par ordenado como un **punto** que denotaremos como $P(a, b)$ o, simplemente, (a, b)*. Llamamos a a la **abscisa**, o **coordenada x** de P, y a b la **ordenada**, o **coordenada y**, de P. (Véase figura 2).

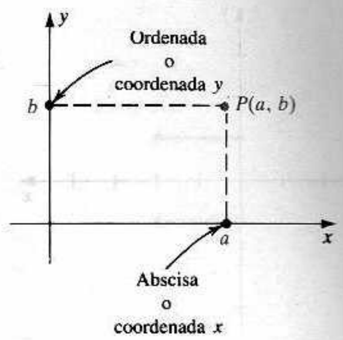


FIGURA 2

Los signos algebraicos de las coordenadas x y y de cualquier punto (x, y) en cada uno de los cuatro cuadrantes se indican en la figura 3. Se considera que los puntos que hay en cualquiera de los ejes no están en ninguno de los cuadrantes. Cuando localizamos un punto correspondiente a un par ordenado de números en un plano cartesiano y lo representamos utilizando un punto, decimos que **marcamos** el punto.

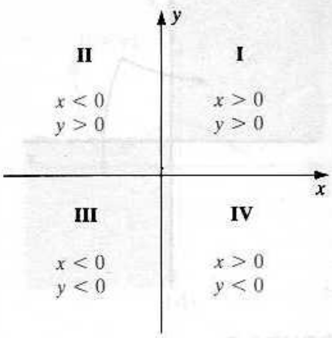


FIGURA 3

EJEMPLO 1

Marque los puntos $A\,(1, 2)$, $B(-4, 3)$, $C(-\frac{3}{2}, -2)$, $D(0, 4)$ y $E(3.5, 0)$. Especifique en qué cuadrante se localiza cada punto.

Solución. Los 4 puntos se marcan en el plano cartesiano en la figura 4. El punto A está en el cuadrante I, el B en el II, y el C en el III. Los puntos D y E, que se localizan en los ejes y y x respectivamente, no están en ningún cuadrante.

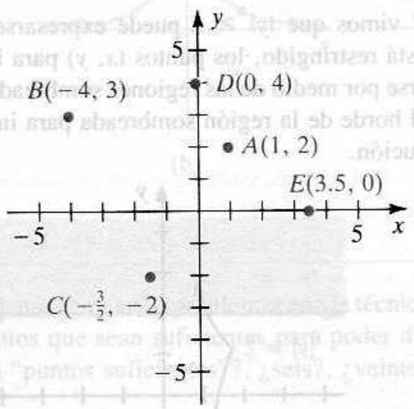


FIGURA 4

RELACIONES Y GRAFICAS

En general, a cualquier conjunto de pares ordenados de números reales se llama una **relación** y al correspondiente conjunto de puntos en el plano se llama **gráfica de la relación.**

EJEMPLO 2

Grafique la relación $S = \{(-1, 2), (0, 4), (3, -\frac{5}{2}), (-3, -1)\}$.

Solución. En la figura 5 hemos marcado los 4 puntos que corresponden a los pares ordenados de la relación S.

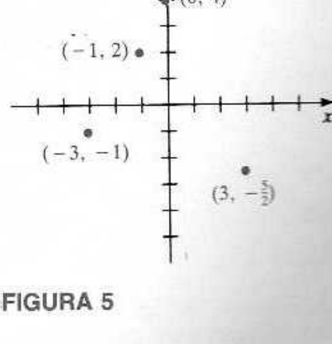


FIGURA 5

EJEMPLO 3

Grafique la relación $T = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ |y| = 1\}$.

* Esta es la misma notación utilizada para designar un intervalo abierto. Debe estar claro considerando el contexto de la discusión si estamos considerando un punto (a, b) o un intervalo abierto (a, b).

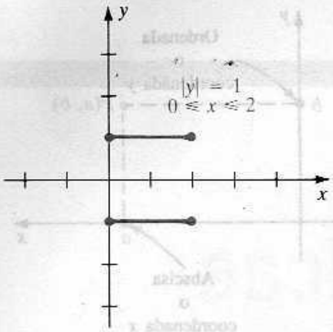


FIGURA 6

Solución: Primero, recuerde que $|y| = 1$ implica que $y = 1$ o $y = -1$. Así, para graficar la relación T, marcamos los puntos cuyas coordenadas x sean números del intervalo $[0, 2]$ y cuyas coordenadas y sean ó 1 ó -1. (Véase figura 6).

EJEMPLO 4

Trace el conjunto de puntos (x, y) en el plano que satisfaga cada una de las siguientes condiciones: **(a)** $xy < 0$ y **(b)** $|y| \geq 2$.

Solución

(a) El producto de dos números es negativo cuando uno de los números es positivo y el otro negativo. Así, $xy < 0$ cuando $x > 0$ y $y < 0$ o cuando $x < 0$ y $y > 0$. Vemos en la figura 3 que $xy < 0$ para todos los puntos (x, y) en los cuadrantes II y IV. Por tanto, podemos representar el conjunto de puntos (x, y) para los cuales $xy < 0$ por medio de las regiones sombreadas de la figura 7. Los ejes de coordenada se representan por medio de líneas interrumpidas para indicar que los puntos sobre estas líneas no se incluyen en la solución.

(b) En la sección 2.7 vimos que $|y| \geq 2$ puede expresarse como $y \leq -2$ o $y \geq 2$. Puesto que x no está restringido, los puntos (x, y) para los cuales $y \leq -2$ o $y \geq 2$ pueden representarse por medio de las regiones sombreadas de la figura 8. Utilizamos líneas continuas al borde de la región sombreada para indicar que estos puntos sí se incluyen en la solución.

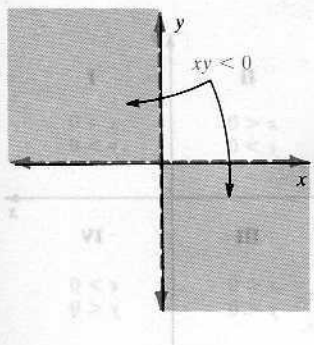


FIGURA 7

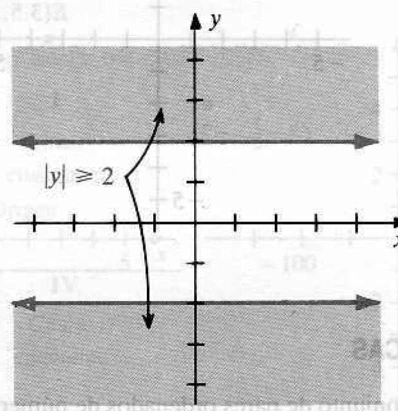


FIGURA 8

GRAFICA DE UNA ECUACION

En los dos ejemplos anteriores examinamos gráficas de relaciones definidas por desigualdades. Ahora consideramos relaciones definidas por una ecuación que relaciona dos variables x y y. Al conjunto de puntos en el plano que corresponde a los pares ordenados (x, y) en la relación se llama **gráfica de la ecuación.**

EJEMPLO 5

Grafique la ecuación $y = x^2$.

Solución. Ya que, en general, la gráfica de una ecuación consta de un número infinito de puntos, marcamos unos cuantos y los unimos por medio de una curva uniforme, como lo muestra la figura 9.

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

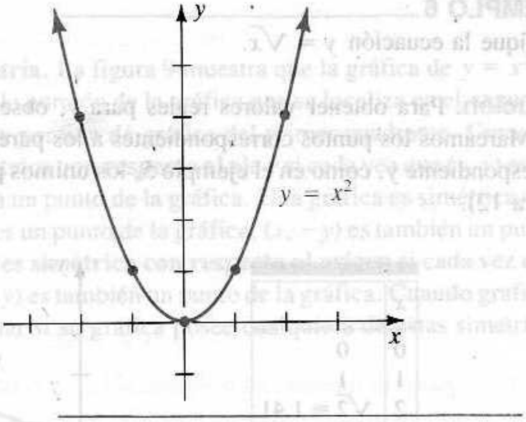


FIGURA 9

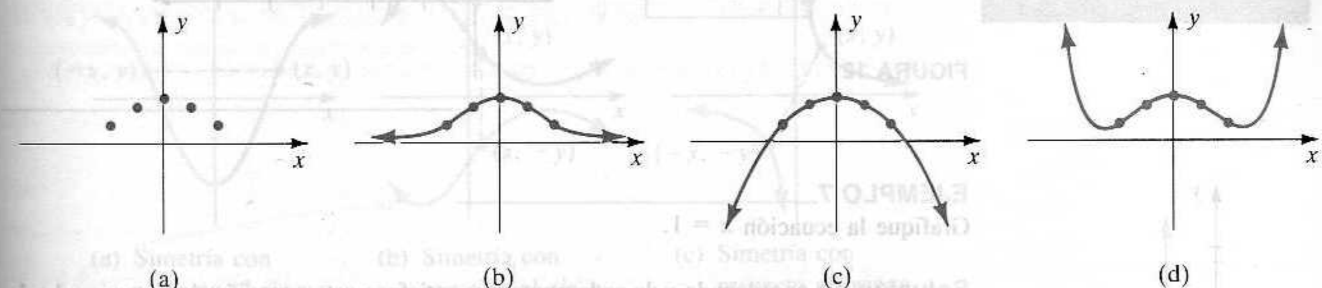


FIGURA 10

Cinco puntos unidos por medio de diferentes curvas uniformes.

Nota de advertencia: pueden surgir varios problemas con la técnica de la demarcación de puntos. Debe marcar los puntos que sean suficientes para poder discernir la forma de la gráfica. Pero, ¿qué significa "puntos suficientes"?, ¿seis?, ¿veinte? (Véase figura 10).

Por supuesto, la respuesta depende tanto de la ecuación que esté graficando como de su experiencia. A medida que adquiera experiencia en matemáticas, encontrará que a menudo hay formas de graficar una ecuación marcando el mínimo número de puntos. Además, no todas las gráficas son "curvas uniformes". (Véase figura 11).

Debido al puntiagudo pico del origen, la curva que une los puntos en la figura 11 (b) no se considera "suave". Por tanto, tenga cuidado cuando marque los puntos.

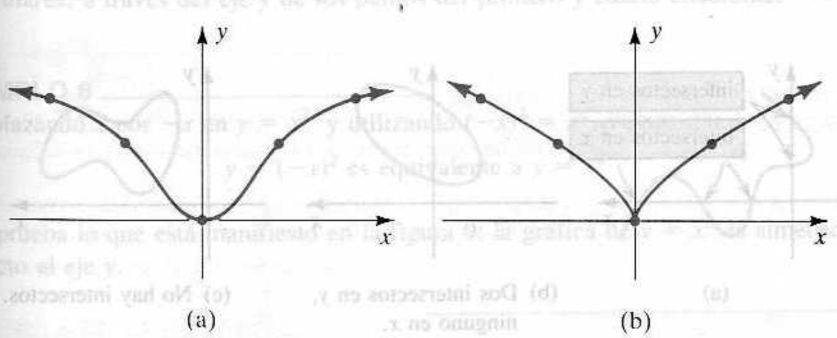


FIGURA 11

Cinco puntos unidos por medio de una curva (a) suave; (b) no suave.

EJEMPLO 6

Grafique la ecuación $y = \sqrt{x}$.

Solución. Para obtener valores reales para y, observamos que x no puede ser negativo. Marcamos los puntos correspondientes a los pares ordenados enumerados en la tabla correspondiente y, como en el ejemplo 5, los unimos por medio de una curva suave (véase figura 12).

x	
0	0
1	1
2	$\sqrt{2} \approx 1.41$
3	$\sqrt{3} \approx 1.73$
4	2

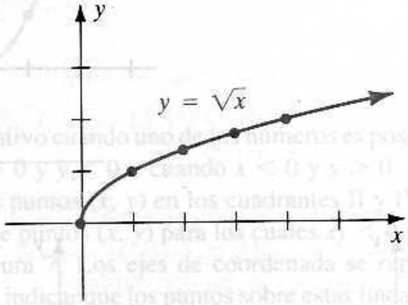


FIGURA 12

EJEMPLO 7

Grafique la ecuación $x = 1$.

Solución. La coordenada x de cada punto que satisfaga esta ecuación debe ser igual a 1. Puesto que y no aparece explícitamente en la ecuación, se entiende que la coordenada y de un punto que satisfaga la ecuación puede ser cualquier número real. Como lo vemos en la figura 13, la gráfica de $x = 1$ es una línea vertical a una unidad a la derecha del eje y.

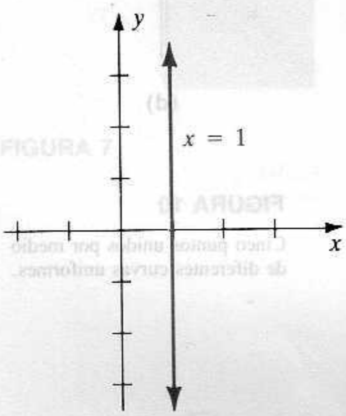
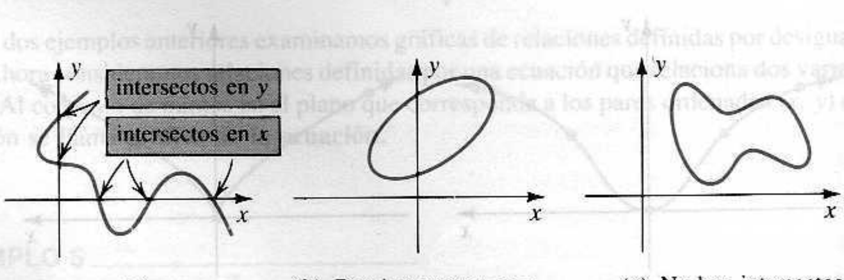


FIGURA 13

INTERSECTOS

Localizar los puntos en los cuales la gráfica de una ecuación atraviesa los ejes coordenados puede ser útil para trazar su gráfica. Los **intersectos en x** de la gráfica de una ecuación son las coordenadas x de los puntos en los cuales la gráfica atraviesa el eje x. Ya que cada punto del eje x tiene una coordenada $y = 0$, los intersectos en x (si hay) pueden determinarse en la ecuación dada asignando $y = 0$ y despejando x. A su vez, los **intersectos en y** de la gráfica de una ecuación son las coordenadas y de los puntos en los cuales la gráfica atraviesa el eje y. Estos valores pueden encontrarse asignando $x = 0$ en la ecuación y despejando y. (Véase figura 14).

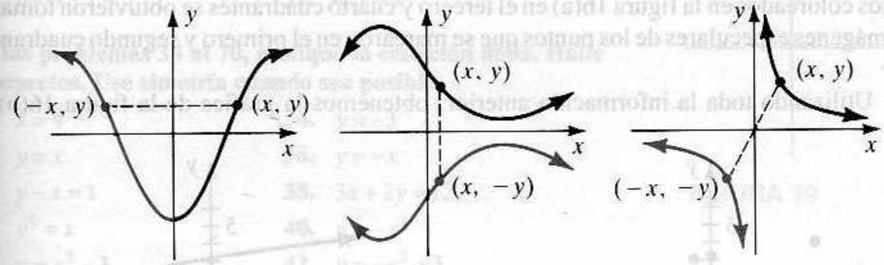


(a) (b) Dos intersectos en y, ninguno en x. (c) No hay intersectos.

FIGURA 14

SIMETRIA

Una gráfica puede también tener **simetría.** La figura 9 muestra que la gráfica de $y = x^2$ es simétrica con respecto al eje y, ya que la porción de la gráfica que se localiza en el segundo cuadrante es la imagen especular de la porción de gráfica del primer cuadrante. Como lo ilustra la figura 15, una gráfica es **simétrica con respecto al eje y** si cada vez que (x, y) es un punto de la gráfica, $(-x, y)$ es también un punto de la gráfica. Una gráfica es simétrica con respecto al eje x si cada vez que (x, y) es un punto de la gráfica, $(x, -y)$ es también un punto en la gráfica. Finalmente, una gráfica es **simétrica con respecto al origen** si cada vez que (x, y) es un punto de la gráfica, $(-x, -y)$ es también un punto de la gráfica. Cuando graficamos una ecuación, podemos determinar si su gráfica posee cualquiera de estas simetrías, *antes* de marcar puntos.



(a) Simetría con respecto al eje y (b) Simetría con respecto al eje x (c) Simetría con respecto al origen

FIGURA 15

Pruebas de la simetría

La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto:

(i) al **eje y** si al remplazar x por $-x$ produce una ecuación equivalente;
(ii) al **eje x** si al remplazar y por $-y$ resulta una ecuación equivalente;
(iii) al **origen** si al remplazar x por $-x$ y y por $-y$ resulta una ecuación equivalente.

La ventaja de utilizar la simetría al graficar debe ser manifiesta: si la gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y, entonces necesitamos marcar solamente puntos para $x \geq 0$, ya que los puntos de la gráfica para $x < 0$ se obtienen tomando las imágenes especulares, a través del eje y de los puntos del primero y cuarto cuadrantes.

EJEMPLO 8

Remplazando x por $-x$ en $y = x^2$ y utilizando $(-x)^2 = x^2$, vemos que

$$y = (-x)^2 \text{ es equivalente a } y = x^2$$

Esto prueba lo que está manifiesto en la figura 9: la gráfica de $y = x^2$ es simétrica con respecto al eje y.

El siguiente ejemplo ilustra cómo utilizar estos nuevos instrumentos como ayudas para la graficación.

EJEMPLO 9

Grafique la ecuación $x + y^2 = 10$.

Solución.

Intersectos: asignando $y = 0$ en la ecuación inmediatamente da $x = 10$. Así, el intersecto en x es 10. Cuando $x = 0$, obtenemos $y^2 = 10$, lo cual implica que $y = -\sqrt{10}$ o $y = \sqrt{10}$. Los intersectos en y son entonces, $-\sqrt{10}$ y $\sqrt{10}$.

Simetría: la gráfica es simétrica con respecto al eje x ya que, remplazando y por $-y$, encontramos que

$$x + (-y)^2 = 10 \text{ es equivalente a } x + y^2 = 10$$

Marcación de puntos: los registros de la tabla adjunta se obtuvieron asignándole valores a y. Notamos que, debido a la simetría, solamente necesitamos considerar $y \geq 0$. Los puntos coloreados en la figura 16(a) en el tercero y cuarto cuadrantes se obtuvieron tomando las imágenes especulares de los puntos que se marcaron en el primero y segundo cuadrantes.

Utilizando toda la información anterior, obtenemos la gráfica de la figura 16(b).

x	y
9	1
6	2
1	3
-6	4

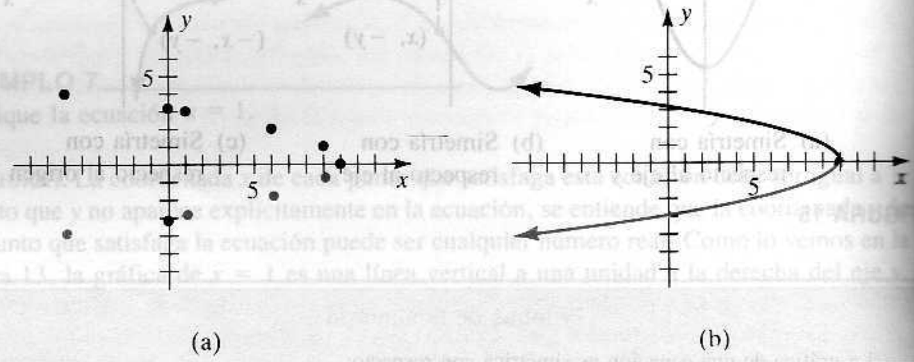


FIGURA 16

EJERCICIO 3.1

En los problemas 1 al 4, marque los puntos dados.

1. (2, 3), (4, 5) (0, 2), (–1, 3)
2. (2, 5), (–2, 1) (–6, 0), (–3, –3)
3. (–5/2, –1) (–1, –1), (–4, 4), (0, 2)
4. (2, –2), (3.1, –3.1), (0, 0.5), (–1, 0)

En los problemas 5 al 16, determine el cuadrante en el cual se localizan los puntos dados, si (a, b) está en el cuadrante 1.

5. $(a, -b)$
6. $(-a, b)$
7. (b, a)
8. $(-a, -b)$
9. $(-b, -a)$
10. $(-b, a)$
11. (a, a)
12. $(b, -a)$
13. $(-a, -a)$
14. $(b, -b)$
15. $(-a, a)$
16. $(-b, b)$

17. Marque los puntos dados en los problemas 5 al 16 si (a, b) es el punto mostrado en la figura 17.

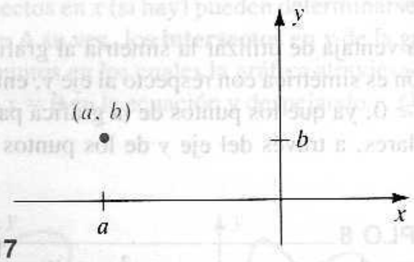


FIGURA 17

18. Dé las coordenadas de los puntos mostrados en la figura 18.

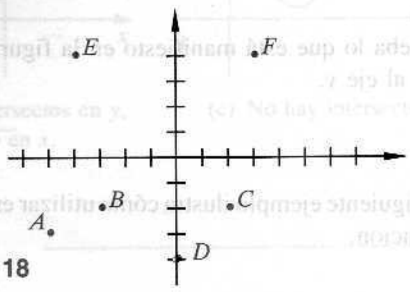


FIGURA 18

En los problemas 19 al 24, grafique la relación dada.

19. $\{(x,y)|xy=0\}$ **20.** $\{(x,y)|xy\le 0\}$

21. $\{(x,y)|xy>0\}$ **22.** $\{(x,y)|\,|x|\le 2, y=1\}$

23. $|x|\ge 2/3$ **24.** $|y|<1$

En los problemas 25 al 32, pruebe la simetría con respecto a los ejes *x* y *y* y el origen. No grafique.

25. $y=x^5+x^3-2x$ **26.** $y=8x^3-7x-2$

27. $y=x\sqrt{x^2+1}$ **28.** $y=(x^2-1)^{2/3}$

29. $x^{5/3}-5x^{2/3}-y^2=0$ **30.** $3xy^2+y^2=x$

31. $1/2xy-1=0$ **32.** $x^2y=1$

En los problemas 33 al 70, grafique la ecuación dada. Halle intersectos. Use simetría cuando sea posible.

33. $x=4$ **34.** $y=-3$

35. $y=x$ **36.** $y=-x$

37. $y-x=1$ **38.** $3x+2y=12$

39. $y^2=x$ **40.** $y=-x^2$

41. $y=x^2-3$ **42.** $y=-x^2+3$

43. $y=(x+1)^2$ **44.** $y=(x-1)^2$

45. $x-y^2=4$ **46.** $y^2=9(x+4)$

47. $y=x^3$ **48.** $y=-x^3$

49. $y^3=x^3$ **50.** $y=x^4$

51. $y^2=1-x^2$ **52.** $y^2=x^3$

53. $|y|=x$ **54.** $y=|x|$

55. $|x+y|=0$ **56.** $|x-y|=0$

57. $|x-y|=3$ **58.** $y=|x|-3$

59. $x=|y|-2$ **60.** $x^2-9=0$

61. $(x^2-4)(y-1)=0$ **62.** $(2y-9)(5-x)=0$

63. $x^3-x=0$ **64.** $y^2+9y-10=0$

65. $x^2+y^2=0$ **66.** $x^2+y^2=4$

67. $9x^2/2+2y^2=18$ **68.** $4x^2+9y^2=36$

69. $x^2-y^2=4$ **70.** $4y^2-9x^2=36$

En los problemas 71 al 74, utilice la simetría para completar la gráfica.

71. La gráfica es simétrica con respecto al origen.

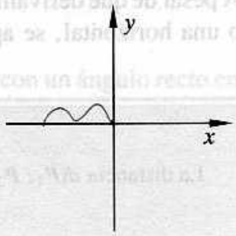


FIGURA 19

72. La gráfica es simétrica con respecto al eje *x*.

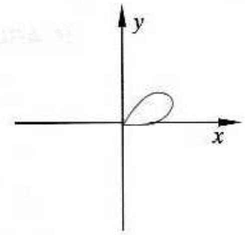


FIGURA 20

73. La gráfica es simétrica con respecto al eje *y*.

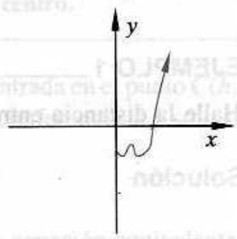


FIGURA 21

74. La gráfica es simétrica con respecto al eje *x*.

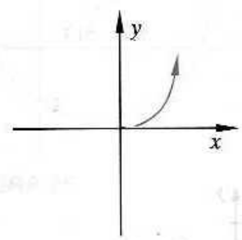


FIGURA 22

3.2 Fórmula de la distancia y de la circunferencia

En esta sección desarrollamos una fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos en el plano cuyas coordenadas se conocen. Luego aplicamos esta fórmula al problema de encontrar la ecuación de la circunferencia.

FORMULA DE LA DISTANCIA

Suponga que $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos distintos que no están en una línea vertical ni en una horizontal. Luego, como lo muestra la figura 23, P_1, P_2, y $P_3(x_1, y_2)$

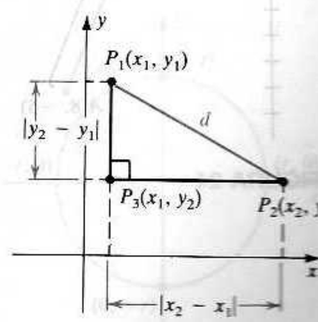


FIGURA 23

son vértices de un triángulo rectángulo. La longitud del lado $P_3\,P_2$ es $|x_2 - x_1|$, y la longitud del lado $P_1\,P_3$ es $|y_2 - y_1|$. Si denotamos la longitud de $P_1\,P_2$ con d, tenemos

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \tag{1}$$

del teorema de Pitágoras. Puesto que el cuadrado de cualquier número real es igual al cuadrado de su valor absoluto, podemos quitar los signos de valor absoluto en (1). Se deduce, entonces, de (1) que

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

A pesar de que derivamos esta ecuación para dos puntos que no están sobre una recta vertical o una horizontal, se aplica también en estos casos.

La fórmula de la distancia

La distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos cualesquiera $P_1\,(x_1, y_1)$ y $P_2\,(x_2, y_2)$ está dada por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2}$$

Puesto que $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$, no importa qué punto se utilice primero en la fórmula de la distancia: esto es

$$d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$$

EJEMPLO 1

Halle la distancia entre $A(8, -5)$ y $B(3, 7)$.

Solución

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(3 - 8)^2 + (7 - (-5))^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

La distancia se ilustra en la figura 24.

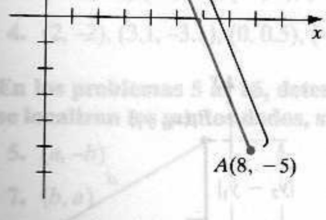


FIGURA 24

EJEMPLO 2

Determine si los puntos $P_1\,(7, 1)$, $P_2\,(-4, -1)$ y $P_3\,(4, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución. Por la geometría plana sabemos que un triángulo es un triángulo rectángulo si y sólo si la suma de los cuadrados de las longitudes de dos de sus lados es igual al cuadrado de la longitud del lado restante. Ahora, por la fórmula de la distancia, encontramos

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(-4 - 7)^2 + (-1 - 1)^2} \\ &= \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125} \end{aligned}$$

$$d(P_2, P_3) = \sqrt{(4-(-4))^2 + (5-(-1))^2}$$
$$= \sqrt{64+36}$$
$$= \sqrt{100} = 10$$

y

$$d(P_3, P_1) = \sqrt{(7-4)^2 + (1-5)^2}$$
$$= \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

Ya que $\quad [d(P_3, P_1)]^2 + [d(P_2, P_3)]^2 = 25 + 100$
$$= 125$$
$$= [d(P_1, P_2)]^2$$

se deduce que P_1, P_2 y P_3 son los vértices de un triángulo rectángulo con un ángulo recto en P_3 (véase figura 25).

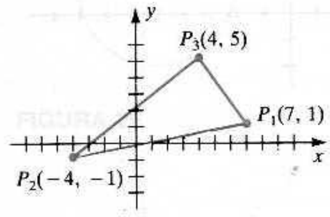


FIGURA 25

CIRCUNFERENCIAS

La fórmula de la distancia puede utilizarse para hallar una ecuación del conjunto de todos los puntos equidistantes del pundo dado.

DEFINICION 1

Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos P en el plano que están a una distancia fija r dada, llamada **radio,** de un punto fijo C dado, llamado **centro.**

En la figura 26 hemos graficado una circunferencia de radio r centrada en el punto $C(h, k)$. Por la definición 1, sabemos que un punto $P(x, y)$ está en esta circunferencia si y sólo si

$$d(P, C) = r, \quad \text{o} \quad \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

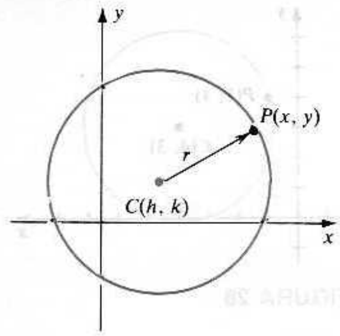


FIGURA 26

Ya que $(x-h)^2 + (y-k)^2$ es siempre no negativo, obtenemos una ecuación equivalente cuando ambos lados se elevan al cuadrado.

Ecuación de una circunferencia

Una circunferencia de radio r con centro $C(h, k)$ tiene la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{3}$$

La ecuación (3) se llama **forma estándar** de la ecuación de una circunferencia. Cuando $h = 0$ y $k = 0$, vemos por la ecuación (3) que la ecuación de una circunferencia de radio r con centro en el origen está dada por

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(Véase figura 27).

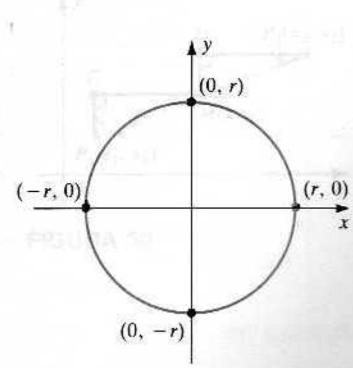


FIGURA 27

EJEMPLO 3

Halle el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 49$.

Solución. Si escribimos esta ecuación de la forma estándar (3),

$$(x-3)^2+(y-(-2))^2=7^2$$

vemos que $h=3$, $k=-2$ y $r=7$. Por tanto, la circunferencia está centrada en $(3,-2)$ y tiene radio 7.

EJEMPLO 4

Halle la ecuación de la circunferencia centrada en $C(-5, 4)$ con radio $\sqrt{2}$.

Solución. Utilizando la forma estándar (3) con $h=-5$, $k=4$ y $r=\sqrt{2}$, obtenemos

$$(x-(-5))^2+(y-4)^2=(\sqrt{2})^2$$

o $$(x+5)^2+(y-4)^2=2$$

EJEMPLO 5

Halle la ecuación de la circunferencia con centro en $C(4, 3)$ que pasa por $P(1, 4)$.

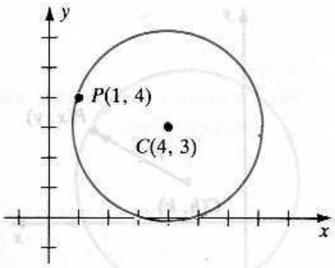


FIGURA 28

Solución. Identificando $h=4$ y $k=3$, tenemos por (3)

$$(x-4)^2+(y-3)^2=r^2 \tag{4}$$

Ya que $P(1, 4)$ se localiza en la circunferencia (véase figura 28), sus coordenadas deben satisfacer (4). Así,

$$(1-4)^2+(4-3)^2=r^2, \quad \text{o} \quad 10=r^2$$

y así, la ecuación en la forma estándar es

$$(x-4)^2+(y-3)^2=10$$

En el siguiente ejemplo utilizamos la técnica de *completar el cuadrado* para hallar el centro y el radio de una circunferencia. Recuerde de la sección 2.3 que añadiendo $(B/2)^2$ a la expresión x^2+Bx da como resultado $x^2+Bx+(B/2)^2$, el cual es el cuadrado perfecto de $(x+B/2)^2$.

EJEMPLO 6

Halle el centro y el radio de la circunferencia con ecuación

$$x^2+y^2+10x-2y+17=0$$

Solución. Podemos hallar el centro y el radio de la circunferencia reescribiendo la ecuación dada de la forma estándar $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. Reorganizando términos, tenemos

$$(x^2+10x\qquad)+(y^2-2y\qquad)=-17$$

Ahora completamos el cuadrado de cada expresión en paréntesis, añadiendo $(10/2)^2$ en la primera y $(-2/2)^2$ en la segunda. Note que debemos tener cuidado al añadir estos números en ambos lados de la ecuación.

$$[x^2 + 10x + (\tfrac{10}{2})^2] + [y^2 - 2y + (\tfrac{-2}{2})^2] = -17 + (\tfrac{10}{2})^2 + (\tfrac{-2}{2})^2$$
$$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 2y + 1) = 9$$
$$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

De esta ecuación se deduce que la circunferencia está centrada en $(-5, 1)$ y tiene radio 3 (véase figura 29).

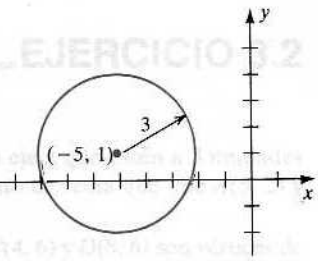


FIGURA 29

EJEMPLO 7

Halle el centro y el radio de una circunferencia con ecuación

$$3x^2 + 3y^2 - 18x + 6y + 2 = 0$$

Solución. Primero reorganizamos la ecuación como

$$(3x^2 - 18x \qquad) + (3y^2 + 6y \qquad) = -2$$

Luego, dividimos ambos lados de la ecuación por 3 para que el coeficiente de x^2 y y^2 sea 1 para cada uno:

$$(x^2 - 6x \qquad) + (y^2 + 2y \qquad) = -\tfrac{2}{3}$$

Completando el cuadrado nos da

$$[x^2 - 6x + (\tfrac{-6}{2})^2] + [y^2 + 2y + (\tfrac{2}{2})^2] = -\tfrac{2}{3} + (\tfrac{-6}{2})^2 + (\tfrac{2}{2})^2$$
$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = -\tfrac{2}{3} + 9 + 1$$

o

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = \tfrac{28}{3}$$

Esta es la ecuación de una circunferencia con centro $(3, -1)$ y radio $\sqrt{\frac{28}{3}}$.

Podemos ver que no todas las ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$$

necesariamente representan una circunferencia. (Véanse problemas 39 y 40).

FORMULA DEL PUNTO MEDIO

En la sección 1.2 vimos que el punto medio de un segmento de recta entre dos números a y b de la recta numérica es el *promedio* $(a + b)/2$. En el plano xy, cada coordenada del punto medio M de un segmento de recta que une dos puntos P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) es el promedio de las coordenadas correspondientes de los extremos.

Para probar esto, podemos ver en la figura 30 que los triángulos P_1CM y MDP_2 son congruentes, puesto que los ángulos correspondientes son iguales y $d(P_1, M) = d(M, P_2)$. Por tanto,

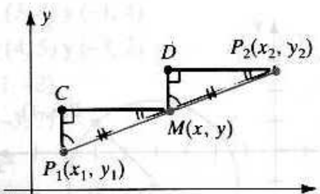


FIGURA 30

$$d(P_1, C) = d(M, D)$$

o

$$y - y_1 = y_2 - y$$

Despejando y en la última ecuación, da

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

De la misma manera $\quad d(C, M) = d(D, P_2)$

de modo que $\quad x - x_1 = x_2 - x$

y, por tanto $\quad x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

Resumimos los resultados.

Fórmula del punto medio

Las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \tag{5}$$

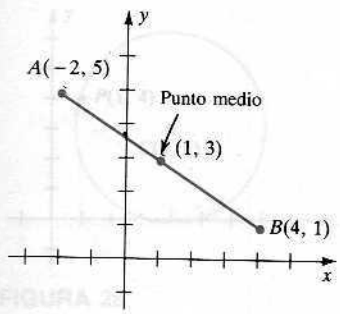


FIGURA 31

EJEMPLO 8

Halle las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une $A(-2, 5)$ y $B(4, 1)$.

Solución. Según la fórmula del punto medio (5), las coordenadas del punto medio están dadas por

$$\left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{5 + 1}{2}\right)$$

ó (1, 3). Este punto se señala en la figura 31.

EJEMPLO 9

Halle una ecuación de la circunferencia con los puntos $A(2, -3)$ y $B(6, 1)$ en los extremos de un diámetro.

Solución. El centro del círculo es el punto medio del diámetro que une A y B. Así, según la fórmula del punto medio (5), las coordenadas del centro son

$$\left(\frac{2 + 6}{2}, \frac{-3 + 1}{2}\right) = (4, -1)$$

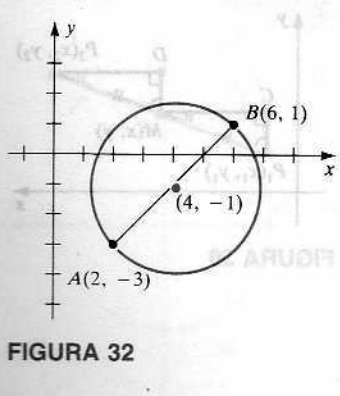


FIGURA 32

El radio es la distancia desde el centro $(4, -1)$ hasta el punto $(2, -3)$ en la circunferencia:

$$r = \sqrt{(4 - 2)^2 + [-1 - (-3)]^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

Por tanto, una ecuación de la circunferencia es

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 8$$

(Véase figura 32).

EJERCICIO 3.2

En los problemas 1 al 6, halle la distancia entre dos puntos.

1. $A(1, 3), B(5, 0)$
2. $A(1, 2), B(-3, 4)$
3. $A(1, -3/2), B(-2, 5/2)$
4. $A(-12, -3), B(-5, -7)$
5. $A(3/2, -3/2), B(-2, -1/2)$
6. $A(4, 3/2), B(2/3, -1)$

En los problemas 7 al 11, determine si los puntos *A*, *B* y *C* son vértices de un triángulo rectángulo.

7. $A(1, -11), B(8, 2), C(-2, -1)$
8. $A(10, 5), B(-3, -1), C(8, 1)$
9. $A(8, 2), B(-3, 0), C(5, 6)$
10. $A(4, 0), B(2, 3), C(1, 1)$
11. $A(-3, -2), B(2, 2), C(6, -3)$
12. Encuentre todos los puntos en el eje y que estén a 10 unidades del punto $(6, 6)$.
13. Considere el segmento de recta que une $A(-1, 2)$ y $B(3, 4)$.
    (a) Halle una ecuación que exprese el hecho de que un punto $P(x, y)$ es equidistante de A y B.
    (b) Describa geométricamente el conjunto de puntos descritos por la ecuación de la parte (a).
14. Utilice la fórmula de la distancia para determinar si los puntos $A(-5, 2)$, $B(-1, -1)$ y $(3, -4)$, se localizan en una línea recta.

En los problemas 15 al 20, halle el punto medio del segmento de recta que une *A* y *B*.

15. $A(-2, 4), A(4, 1)$
16. $A(7/3, 1), B(2/3, -3)$
17. $A(-8, 5), B(-1, 0)$
18. $A(5/2, -3/2), B(-1, 3/4)$
19. $A(4a, 3b), B(2a, 6b)$
20. $A(x+1, -x), B(x-1, x-1)$

En los problemas 21 al 24, halle *B* si *M* es el punto medio del segmento de recta que une *A* y *B*.

21. $A(3/2, 1), M(-2, 0)$
22. $A(-3, -1/2), M(4, 3)$
23. $A(5, 8), M(-1, -1)$
24. $A(5, 2), M(-10, 1)$
25. Halle la distancia desde el punto medio del segmento de recta que une $A(5, 7)$ y $B(-3, 6)$ hasta el punto medio del segmento de recta que une $C(3, -5)$ y $D(0, 8)$.
26. Halle todos los puntos en el eje x que estén a 3 unidades del punto medio del segmento de recta que une $A(5, 2)$ y $B(-5, -6)$.
27. Los puntos $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(4, 6)$ y $D(8, 6)$ son vértices de un paralelogramo. Demuestre que las diagonales del paralelogramo se bisecan entre sí.
28. Halle los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ en el segmento de recta que une $A(3, 6)$ y $B(5, 8)$ que divide el segmento de recta en cuatro partes iguales.

En los problemas 29 al 38, halle el centro y el radio de la circunferencia dada.

29. $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 25$
30. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 49$
31. $(x-3/2)^2 + (y-1/2)^2 = 5$
32. $(x+8/3)^2 + (y+5/3)^2 = 4$
33. $x^2 + y^2 + 8y = 0$
34. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$
35. $x^2 + y^2 - 16x + 3y + 63 = 0$
36. $x^2 + y^2 - 16y + 3x + 63 = 0$
37. $6x^2 + 6y^2 + 12x + 36y - 12 = 0$
38. $5x^2 + 5y^2 + 25x + 100y + 50 = 0$

En los problemas 39 y 40, demuestre que la ecuación dada no representa una circunferencia.

39. $x^2 + y^2 + 2x + 8 = 0$
40. $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y + 12 = 0$

En los problemas 41 al 50, halle una ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas.

41. Centro $(0, 0)$, radio 1
42. Centro $(-3, 2)$, radio 6
43. Centro $(0, 3)$, radio $\sqrt{3}$
44. Centro $(-9, -4)$, radio $3/2$
45. Extremos de un diámetro en $(3, 8)$ y $(-1, 4)$
46. Extremos de un diámetro en $(4, 5)$ y $(-3, 2)$
47. Centro $(0, 0)$ pasando por $(-1, -2)$
48. Centro $(-5, 4)$ pasando por $(-3, 7)$
49. Centro $(5, 6)$, tangente al eje x
50. Centro $(-3, -4)$, tangente al eje y

En los problemas 51 al 56, grafique la relación dada.

51. $x^2 + y^2 \geq 16$
52. $(x-5)^2 + (y-1)^2 \leq 25$
53. $x^2 + y^2 \geq 2y$
54. $1 < x^2 + y^2 < 4$
55. $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 0$
56. $x^2 = y^2$

57. Las ciudades de Kansas y Chicago no están conectadas por medio de una autopista interestatal, pera cada ciudad está conectada con St. Louis y Des Moines (véase figura 33). Des Moines está aproximadamente a 40 millas al oriente y a 180 millas al norte de la ciudad de Kansas; St. Louis está aproximadamente a 230 millas al oriente y 40 millas al sur de la ciudad de Kansas, y Chicago está aproximadamente a 360 millas al oriente y 200 millas al norte de la ciudad de Kansas. Suponga que esta parte del occidente medio es un plano liso y que las autopistas que conectan las ciudades son líneas rectas. ¿Cuál ruta de la ciudad de Kansas a Chicago, que atraviese a St. Louis o Des Moines, es más corta?

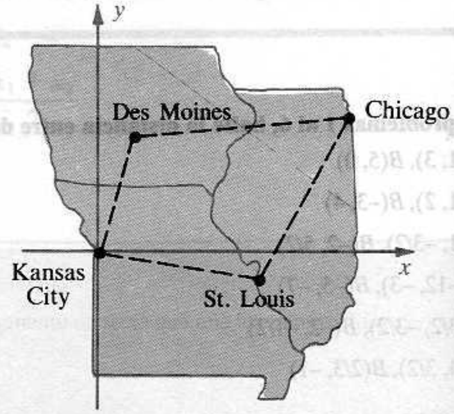


FIGURA 33

3.3 Ecuaciones de la recta

PENDIENTE

Cualquier par de puntos distintos en el plano determina una recta única. Si P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) son dos puntos tales que $x_1 \neq x_2$, entonces al número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{6}$$

se llama **pendiente** de la recta determinada por estos dos puntos. Es común llamar a $y_2 - y_1$ **incremento** en **y** a $x_2 - x_1$ **incremento** en **x**. La pendiente de una recta es, entonces,

$$m = \frac{\text{Incremento en } y}{\text{Incremento en } x} \tag{7}$$

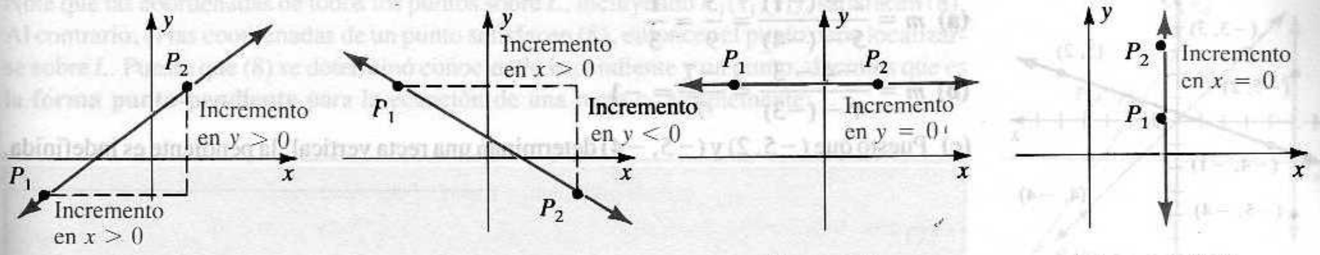
En la figura 34 comparamos las gráficas de las rectas con pendientes positivas, negativas, cero e indefinidas. En la figura 34(a) vemos que una recta con pendiente positiva ($m > 0$) *crece* a medida que x aumenta. En la figura 34(b) vemos que una recta con pendiente negativa ($m < 0$) *decrece* a medida que x aumenta. Una recta con pendiente cero ($m = 0$) es horizontal (véase figura 34(c)).

Si P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) son dos puntos en una recta vertical, entonces, $x_1 = x_2$ y entonces $x_2 - x_1 = 0$. Por tanto, la pendiente de esta recta es indefinida (véase figura 34(d)).

En general, puesto que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

no importa a cuál de los dos puntos se llame P_1 (x_1, y_1) y a cuál se llame P_2 (x_2, y_2) en (6).



(a) $m > 0$ (b) $m < 0$ (c) $m = 0$ (d) m indefinida

FIGURA 34

Cualquier par de puntos distintos en una recta determinará la misma pendiente. Para probar esto, considere los triángulos semejantes $P_1Q_1P_2$ y $P_3Q_2P_4$ mostrados en la figura 35. Puesto que sabemos que razones de los lados correspondientes son iguales, tenemos

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

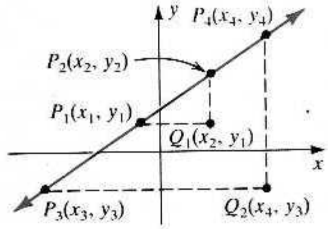


FIGURA 35

Por tanto, la pendiente de la recta es independiente de la escogencia de puntos en la recta. A pesar de que este argumento se basó en la colocación de P_1, P_2 P_3 y P_4 sobre la recta, la discusión sigue siendo válida para cualquier colocación de estos 4 puntos.

EJEMPLO 1

Halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, 6)$ y $(3, -4)$. Grafique la recta.

Solución. Sean $(-2, 6)$ el punto P_1 (x_1, y_1) y $(-3, 4)$ el punto P_2 (x_2, y_2). La pendiente de la recta a través de estos puntos es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 6}{3 - (-2)}$$
$$= \frac{-10}{5} = -2$$

Por tanto, la pendiente es -2 y la recta que pasa por P_1 y P_2 se muestra en la figura 36.

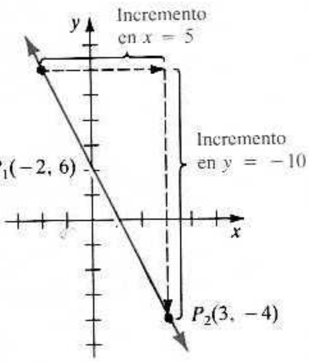


FIGURA 36

Note en el ejemplo 1 que si hubiéramos asignado a P_1 (x_1, y_1) el punto $(3, -4)$ y a P_2 (x_2, y_2) el punto $(-2, 6)$, entonces la ecuación (6) habría dado la misma pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - (-4)}{-2 - 3} = \frac{10}{-5} = -2$$

EJEMPLO 2

Grafique la recta que pasa por el par de puntos dado y determine su pendiente.

(a) $(-4, -1)$ y $(5, 2)$
(b) $(-3, 3)$ y $(4, -4)$
(c) $(-5, 2)$ y $(-5, -4)$

Solución. En la figura 37 se marcan los puntos y se grafican las rectas. Las pendientes se calculan utilizando (6).

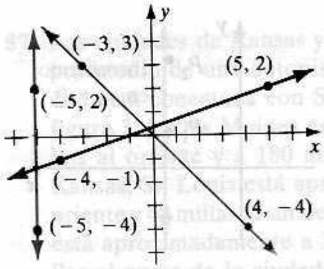


FIGURA 37

(a) $m = \dfrac{2-(-1)}{5-(-4)} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

(b) $m = \dfrac{-4-3}{4-(-3)} = \dfrac{-7}{7} = -1$

(c) Puesto que $(-5, 2)$ y $(-5, -4)$ determinan una recta vertical, la pendiente es indefinida.

EJEMPLO 3

Grafique la recta con pendiente $-\frac{5}{3}$ que pasa a través del punto $P(-2, 3)$.

Solución. Primero escribimos la pendiente como $-5/3$. Luego, utilizando el punto $P(-2, 3)$ como vértice, construimos un triángulo rectángulo moviendo 3 unidades a la *derecha* (ya que el incremento en x es $+3$) hasta el punto $Q(1, 3)$. De Q nos trasladamos 5 unidades hacia *abajo* (ya que el incremento en y es -5) hasta el punto $R(1, -2)$, el cual es otro punto de la recta trazado en la figura 38(a).

Alternativamente, podríamos haber considerado la pendiente como $5/(-3)$ y haber construido el triángulo moviendo 3 unidades a la *izquierda* (ya que el incremento en x es -3) hasta el punto $S(-5, 3)$. De S movemos 5 unidades hacia *arriba* (ya que el incremento en y es $+5$) hasta el punto $T(-5, 8)$. La recta se grafica ahora pasando por P y T, como se muestra en la figura 38(b).

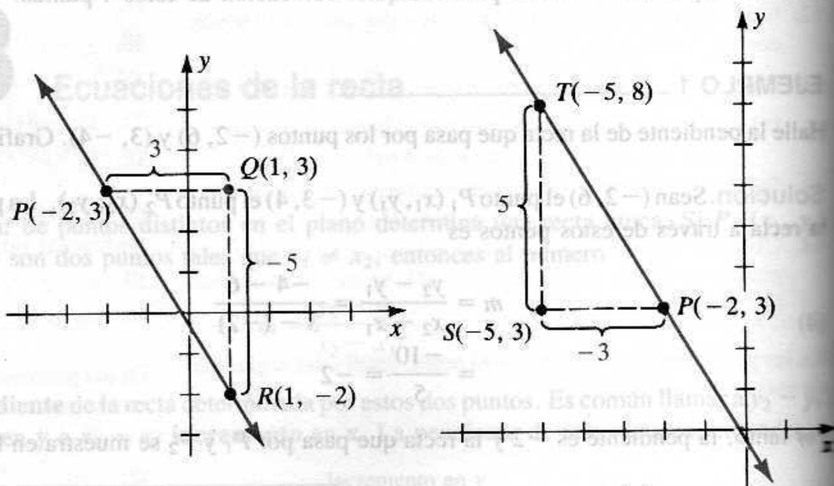


FIGURA 38 (a) (b)

ECUACIONES DE RECTAS

Ahora estamos en condiciones de encontrar una ecuación de una recta L. Para comenzar, suponga que la recta L mostrada en la figura 39 tiene pendiente m y pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$. Si $P(x, y)$ denota cualquier punto sobre L con $x \neq x_1$, entonces podemos escribir según (6).

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación puede reescribirse de la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{8}$$

Note que las coordenadas de todos los puntos sobre L, incluyendo $P_1(x_1, y_1)$, satisfacen (8). Al contrario, si las coordenadas de un punto satisfacen (8), entonces el punto debe localizarse sobre L. Puesto que (8) se determinó conociendo la pendiente y un punto, decimos que es la **forma punto-pendiente** para la ecuación de una recta o, simplemente:

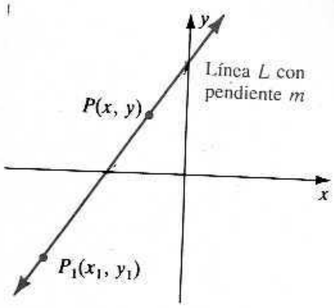


FIGURA 39

Ecuación de la recta punto-pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{9}$$

EJEMPLO 4

Halle una ecuación de la recta con pendiente 4 que pasa por $(-\frac{1}{2}, 2)$.

Solución. Siendo $m = 4$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, y $y_1 = 2$, obtenemos de la ecuación (9) la ecuación de punto-pendiente

$$y - 2 = 4[x - (-\tfrac{1}{2})]$$

Simplificando, nos da

$$y - 2 = 4(x + \tfrac{1}{2}), \quad \text{o} \quad y = 4x + 4$$

EJEMPLO 5

Halle una ecuación de la recta que pasa por los puntos (4, 3) y (−2, 5).

Solución. Primero, calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

$$m = \frac{5 - 3}{-2 - 4} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Luego, según (9) con $x_1 = 4$ y $y_1 = 3$, tenemos

$$y - 3 = -\tfrac{1}{3}(x - 4)$$
$$3y - 9 = -x + 4$$
$$x + 3y - 13 = 0$$

o despejando y,

$$y = -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{13}{3}$$

Debemos verificar que se obtendrá la misma ecuación si las coordenadas x y y del punto $(-2, 5)$ se utilizan para x_1 y y_1 en (9).

Cualquier recta no vertical debe cortar el eje y. Si este punto de intersección es $(0, b)$, entonces b es el intersecto en y de la recta. Se puede obtener una ecuación de la recta con pendiente m e intersecto y en b según (9). Sustituyendo $x_1 = 0$ y $y_1 = b$ da

$$y - b = m(x - 0)$$

Esta ecuación se simplifica en lo siguiente.

Forma pendiente-intersecto de la ecuación de una recta

$$y = mx + b \qquad (10)$$

EJEMPLO 6

Halle una ecuación de la recta con pendiente $\frac{2}{5}$ e intersecto y en -3.

Solución. Utilizando $m = \frac{2}{5}$ y $b = -3$ en la ecuación (10), tenemos

$$y = \tfrac{2}{5}x + (-3), \quad \text{o} \quad y = \tfrac{2}{5}x - 3$$

Puede demostrarse también que la gráfica de cualquier ecuación de la forma $y = mx + b$ es una recta con pendiente m e intersecto b en el eje y.

RECTAS HORIZONTALES Y VERTICALES

Vimos en la figura 34(c) que una recta horizontal tiene pendiente $m = 0$. Por lo tanto, se puede obtener, según (9), la ecuación de una recta horizontal que pasa por un punto (a, b):

$$y - b = 0(x - a), \quad \text{o} \quad y = b$$

Ecuación de una recta horizontal

$$y = b \qquad (11)$$

Una recta vertical que pasa por (a, b) tiene pendiente indefinida, pero todos los puntos de la recta tienen la misma coordenada x. Esta observación lleva al siguiente resultado.

Ecuación de una recta vertical

$$x = a \qquad (12)$$

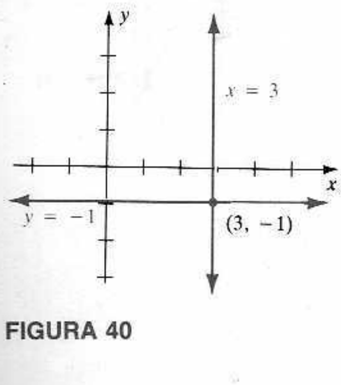


FIGURA 40

EJEMPLO 7

Halle ecuaciones para las rectas horizontales y verticales que pasan por $(3, -1)$. Grafique las rectas.

Solución. Cualquier punto de la recta vertical que pasa por $(3, -1)$ tiene a 3 como coordenada x. De la misma manera, cualquier punto de la recta horizontal que pasa por $(3, -1)$ tiene coordenada -1 en y. La ecuación de esta recta es $y = -1$. Ambas rectas se grafican en la figura 40.

ECUACION LINEAL

Las ecuaciones (9), (10), (11) y (12) son casos especiales de la **ecuación lineal general**

$$ax + by + c = 0 \qquad (13)$$

donde a y b no son ambos cero. Y, viceversa, cuando a y b no son ambos cero, la gráfica de (13) es una recta. Por ejemplo, si $b \neq 0$, entonces despejando y en (13) da la ecuación pendiente-intersecto $y = (-a/b)x + (-c/b)$. Sin embargo, si $b = 0$ y $a \neq 0$, la ecuación resultante $x = -c/a$ representa una recta vertical.

EJEMPLO 8

Halle la pendiente y el intersecto en y de la recta $3x - 7y + 5 = 0$.

Solución. Despejamos y en la ecuación lineal:

$$3x - 7y + 5 = 0$$
$$7y = 3x + 5$$
$$y = \tfrac{3}{7}x + \tfrac{5}{7}$$

Según (10), vemos que la pendiente de la recta es $m = \frac{3}{7}$ y el intersecto en y es $b = \frac{5}{7}$.

Si los intersectos en x y en y son diferentes, la gráfica de la recta puede dibujarse pasando por los puntos correspondientes sobre los ejes x y y.

EJEMPLO 9

Grafique la recta $3x - 2y + 8 = 0$.

Solución. Primero establecemos que $x = 0$ para hallar el intersecto en y:

$$3(0) - 2y + 8 = 0$$
$$-2y + 8 = 0$$
$$2y = 8$$
$$y = 4$$

Luego establecemos que $y = 0$ para hallar el intersecto en x:

$$3x - 2(0) + 8 = 0$$
$$3x + 8 = 0$$
$$3x = -8$$
$$x = -\tfrac{8}{3}$$

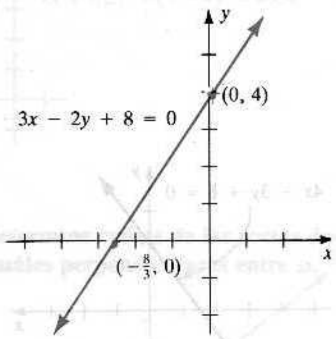


FIGURA 41

La gráfica, que se muestra en la figura 41, se dibuja pasando por $(0, 4)$ y $(-\frac{8}{3}, 0)$.

RECTAS PARALELAS

Dejamos como ejercicio probar el siguiente resultado sobre **rectas paralelas** (véase problema 57).

Pendiente para rectas paralelas

Dos rectas no verticales con pendientes m_1 y m_2 son **paralelas** si y sólo si $m_1 = m_2$.

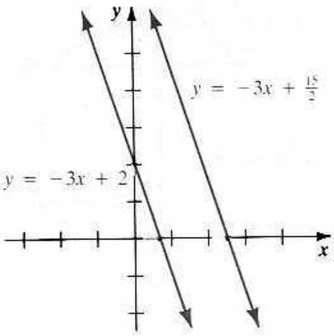


FIGURA 42

EJEMPLO 10

Las ecuaciones

$$3x + y = 2 \quad \text{y} \quad 6x + 2y = 15$$

pueden escribirse de las formas pendiente-intersecto

$$y = -3x + 2 \quad \text{y} \quad y = -3x + \tfrac{15}{2}$$

respectivamente. Vemos que la pendiente de cada recta es -3. Por tanto, las rectas son paralelas (véase figura 42).

RECTAS PERPENDICULARES

Puede demostrarse que cuando dos rectas con pendientes definidas son *perpendiculares*, entonces sus pendientes son recíprocas y de signo contrario. (Véase problema 58).

Pendientes de rectas perpendiculares

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son **perpendiculares** si y sólo si $m_1 m_2 = -1$, esto es

$$m_1 = \frac{-1}{m_2} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

EJEMPLO 11

Halle la ecuación de la recta que pasa por $(0, -3)$ que es perpendicular a la recta $4x - 3y + 6 = 0$. Grafique las rectas.

Solución. Expresamos la ecuación dada de la forma pendiente-intersecto de:

$$4x - 3y + 6 = 0$$
$$3y = 4x + 6$$
$$y = \tfrac{4}{3}x + 2$$

Según (10), sabemos que esta recta tiene pendiente $\frac{4}{3}$. La pendiente de una recta perpendicular a ella será el recíproco negativo de $\frac{4}{3}$, ó $-\frac{3}{4}$. Por tanto, la recta que estamos buscando tiene pendiente $-\frac{3}{4}$ e intersecto y en -3. Su ecuación es

$$y = -\tfrac{3}{4}x - 3$$

y su gráfica es la recta de color de la figura 43.

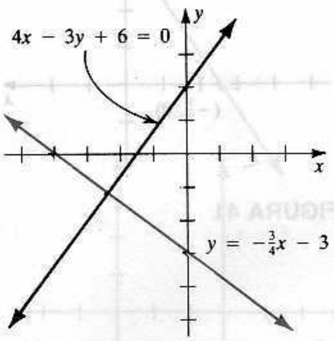


FIGURA 43

EJERCICIO 3.3

En los problemas 1 al 6, halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

1. (3, –7), (1, 0) **2.** (–4, –1), (1, –1)

3. (–6, –8), (5, 3) **4.** (1, –2), (6, 4)

5. (3, 2), (–1, –2) **6.** (2, –1/2), (8, 5/2)

En los problemas 7 al 12, grafique la recta que pasa por (1, 2) con la pendiente dada.

7. 1/10 **8.** 2/3

9. –3 **10.** –1/2

11. –1 **12.** –5/3

En los problemas 13 al 30, halle una ecuación de la recta indicada.

13. Pasa por el punto (3, 5) con pendiente 3
14. Pasa por el punto (2, –2) con pendiente –1
15. Pasa por el punto (4, 0) con pendiente 4
16. Pasa por los puntos (5, –6) y (4, 0)
17. Pasa el punto (–3, 1) con pendiente 1/4
18. Pasa por los puntos (2, 3) y (6, –5)
19. Pasa por los puntos (8, 1) y (–3, 1)
20. Pasa por los puntos (0, 7) y (7, –2)
21. Pasa por los puntos (3, –6) y (–6, 3)
22. Pasa por el punto (4, –3) con pendiente 0
23. Pasa por el punto (–3, 1) con pendiente –2/3
24. Pasa por los puntos (–1, –3) y (0, 4)
25. Pasa por los puntos (–2, 0) y (2, 6)
26. Pasa el punto (0, 5) con pendiente 1/2
27. Pasa el punto (0, 0) con pendiente m
28. Pasa por los puntos (0, 0) y (a, b)
29. Con intersecto x en –2 e intersecto y en 7
30. Con intersecto x en 4 e intersecto y en –2

En los problemas 31 al 36, halle la pendiente y el intersecto en y de la recta dada.

31. $4y - 12x + 15 = 0$ **32.** $x + y + 1 = 0$
33. $-3x + y = 0$ **34.** $-2x - 4y = 0$
35. $3x - \frac{y}{2} + 2 = 0$ **36.** $ax + by + c = 0$

En los problemas 37 al 42, haga la gráfica de la recta dada.

37. $2x + 5y - 8 = 0$
38. $3x/4 - y/3 = 2$
39. $3x - 2y = 9$
40. $-2x - 4y + 6$
41. $3x - 4y + 12 = 0$
42. $y = 2x/3 + 1$
43. Halle la ecuación de la recta que pasa por (–2, 4) y es paralela a $x + 3y - 2 = 0$.
44. Halle la ecuación de la recta que pasa por (–1, –2) y es paralela a la recta $3x - 2y - 2 = 0$.
45. Halle la ecuación de la recta que pasa por (–2, 5) y es perpendicular a $2x + 3y - 4 = 0$.
46. Halle la ecuación de la recta que pasa por (–2, 0) y es perpendicular a $4x + 3y + 5 = 0$.
47. Halle la ecuación de la recta que pasa por (–5, 4) y es perpendicular a la recta que pasa por (1, 1) y (3, 7).
48. Halle la ecuación de la bisectriz perpendicular del segmento de recta que une (1/2, 10) y (3/2, 4).
49. Halle la ecuación de la recta L mostrada en la figura 44.

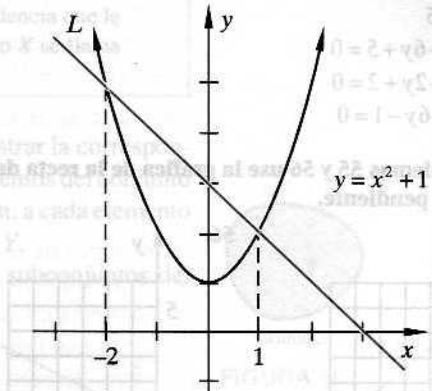


FIGURA 44

50. Una recta tangente a una circunferencia en un punto P de la circunferencia es perpendicular a la recta que pasa por P y por el centro de la circunferencia. Halle la ecuación de la tangente L mostrada en la figura 45.

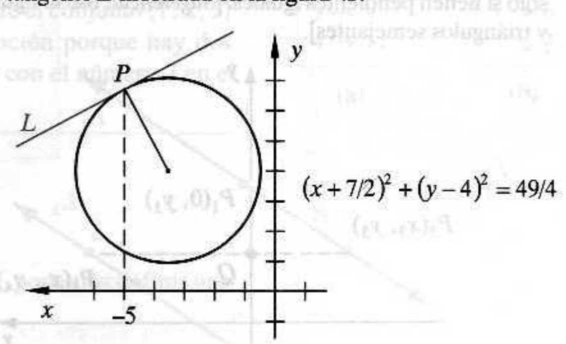


FIGURA 45

En los problemas 51 al 54, determine cuáles de las rectas dadas son paralelas entre sí y cuáles perpendiculares entre sí.

51. **(a)** $2x + 4y + 3 = 0$
(b) $x + 9 = 0$
(c) $x = 4$
(d) $y - 6 = 0$
(e) $-x - 2y + 6 = 0$
(f) $2x - y = 2$

52. **(a)** $5x = -3y$
(b) $3x - 5y + 9 = 0$
(c) $3x + 5y = -4$
(d) $-3x + 5y = 2$
(e) $5x - 3y - 2 = 0$
(f) $-5x - 3y + 8 = 0$

53. **(a)** $y = 4x + 1$
(b) $y = x/4 - 3$
(c) $y = -4x$
(d) $y = -x/4 - 1/4$
(e) $y = 6 + 9/2$
(f) $y = -x/6 - 12$

54. **(a)** $2y - 3 = 0$
(b) $3x + 4y = 2$

(c) $x = 5$
(d) $8x - 6y + 5 = 0$
(e) $3x - 2y + 2 = 0$
(f) $4x + 6y - 1 = 0$

En los problemas 55 y 56 use la gráfica de la recta dada para calcular su pendiente.

55.

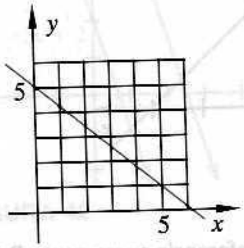


FIGURA 46

56.

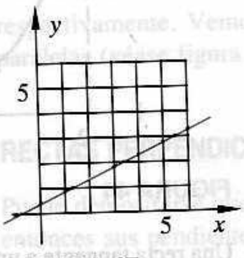


FIGURA 47

57. Pruebe que las rectas no verticales L_1 y L_2 son paralelas si y sólo si tienen pendientes iguales. [*Sugerencia*: use la figura 48 y triángulos semejantes].

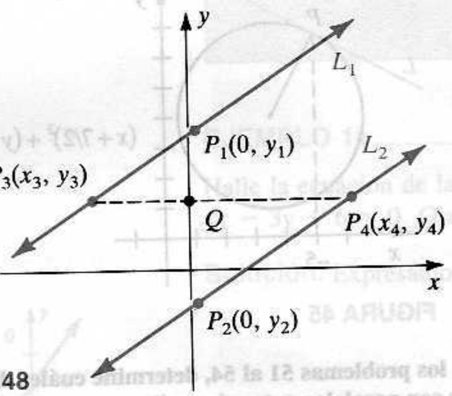


FIGURA 48

58. Pruebe que dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario. [*Sugerencia:* utilice la figura 49 y el teorema de Pitágoras].

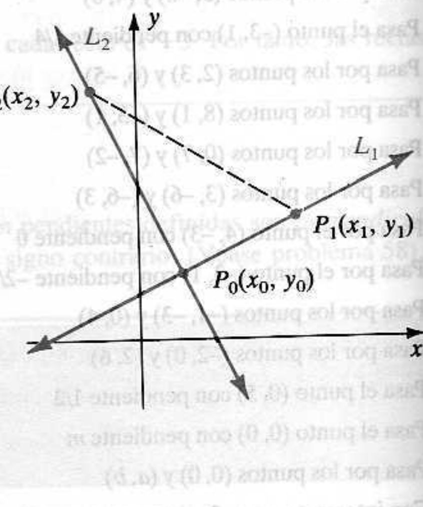


FIGURA 49

59. En 1897 el profesor de física A. E. Dolbear propuso que la temperatura T, en grados Fahrenheit, en un termómetro de "cricket" (o de grillo) está dada por

$$T = x/4 + 40$$

donde x es el número de chillidos del grillo por minuto. Si el número de chillidos del grillo por minuto se aumenta en 10, halle el correspondiente aumento de temperatura.

3.4 Funciones y notación de funciones

DEFINICION DE FUNCION

Al usar personas y objetos del mundo que nos rodea, es fácil establecer una *regla de correspondencia* que asocie o haga parejas de los miembros de un grupo con los miembros de otro. Por ejemplo, para cada nombre que aparece en el directorio de Los Angeles hay un número, a cada bebé le corresponde una madre, a cada auto registrado en el estado de California le corresponde un número de placa, a cada libro le corresponde un autor, a cada lanzador de los Dodgers le corresponde un registro de partidos ganados y perdidos, etc. En matemáticas estamos interesados en una clase de correspondencia muy especial, llamada función.

DEFINICION 2

> Una **función** de un conjunto X en un conjunto Y es una regla de correspondencia que le asigna a cada elemento x en X uno y sólo un elemento y en Y. El conjunto X se llama **dominio** de la función.

A menudo utilizamos un diagrama, como el de la figura 50 para ilustrar la correspondencia de todos los elementos del conjunto X con algunos o todos los elementos del conjunto Y. La figura 50 indica también la característica fundamental de una función: a cada elemento x en el conjunto X le corresponde un *único* elemento y en el conjunto Y.

En el resto de este capítulo asumiremos que tanto X como Y son subconjuntos del conjunto R de números reales.

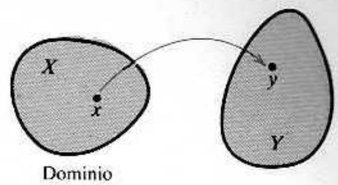


FIGURA 50

EJEMPLO 1

(a) La tabla (a), que se muestra aquí, define una regla de correspondencia entre los números del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ y los números del conjunto $\{5, 7, 9, 11, 13\}$. Esta correspondencia es una función, ya que uno y sólo un número y se asocia con un número x. El conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ es el dominio de la función. Observe que apareamos todos los elementos de X con sólo algunos de los elementos del conjunto $Y = \{5, 7, 9, 11, 13\}$.

(b) La tabla (b) de la derecha define una regla de correspondencia entre el conjunto $\{1, 2, 3\}$ y el conjunto $\{4, 5, 6, 7\}$. Esta correspondencia no es una función porque hay dos números $-$a saber, 6 y 7$-$ en el conjunto $\{4, 5, 6, 7\}$ asociados con el número 3 en el conjunto $\{1, 2, 3\}$.

x		y
1	$\rightarrow$	5
2	$\rightarrow$	7
3	$\rightarrow$	9
4	$\rightarrow$	11

(a)

x		y
1	$\rightarrow$	4
2	$\rightarrow$	5
3	$\rightarrow$	6
	$\searrow$	7

(b)

dominio

no función

DEFINICION ALTERNATIVA

Puesto que una regla de correspondencia generará pares de elementos, podemos definir una función de una manera alternativa:

Una **función** es un conjunto de pares ordenados (x, y) tales que no hay dos pares ordenados diferentes del conjunto que tienen el mismo primer elemento.

EJEMPLO 2

El conjunto de pares ordenados $\{(1, 3), (3, 5), (6, 7), (8, 7)\}$ es equivalente a la correspondencia mostrada en la tabla adjunta. Puesto que a cada valor de x le corresponde uno y sólo un valor de y, el conjunto de pares ordenados representa una función. Observe que es perfectamente aceptable hacer corresponder el mismo valor de y a más de un valor de x.

x		y
1	$\rightarrow$	3
3	$\rightarrow$	5
6	$\rightarrow$	7
8	$\nearrow$	

Una función usualmente se denota con una letra como f o g. Luego, podemos representar una función f de un conjunto X a uno Y por medio de la notación $f: X \rightarrow Y$ o por medio de un diagrama (véase figura 51). El número y del conjunto Y mostrado en la figura 51 que está asociado con x por medio de la función f se escribe

$$y = f(x)$$

lo cual se lee "y es igual a f de x". También se dice que el número $f(x)$ es el **valor** de la función f en x o la **imagen** de x sobre f.

FIGURA 51

A menudo una función se define por medio de una fórmula explícita, por ejemplo $f(x) = x^2$. Si el dominio de f es el conjunto R de números reales, entonces $f: R \rightarrow R$, ya que el cuadrado de un número real es un número real. Para hallar valores de f, sustituimos números reales para x en la fórmula $f(x) = x^2$. Por ejemplo, el valor de la función que corresponde a $x = 3$ es

$$f(3) = (3)^2 = 9$$

y el valor de la función en $x = -4$ es

$$f(-4) = (-4)^2 = 16$$

En términos de notación de intervalo, el dominio de $f(x) = x^2$ se escribe como $(-\infty, \infty)$.

En términos exactos, la función f es la regla dada por $y = f(x)$, mientras que $f(x)$ es simplemente un número asociado con x. Sin embargo, frecuentemente ignoremos esta distinción y nos referiremos a la "función $f(x)$."

Una función también puede compararse con una computadora. Un número x es la *entrada* a la "máquina" y el **valor funcional** $f(x)$ correspondiente es el *resultado* obtenido después de que la máquina ha obrado sobre x, como lo ilustra la figura 52.

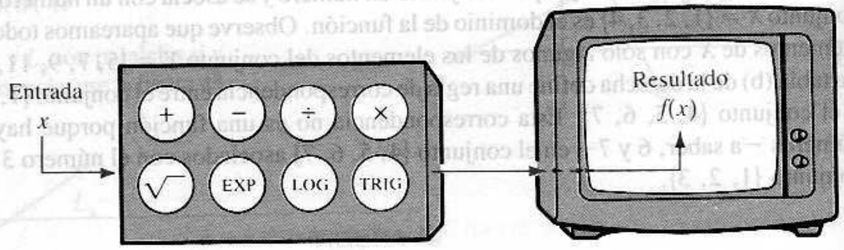


FIGURA 52

EJEMPLO 3

Halle los valores de $f(x) = \sqrt{x + 4}$ correspondientes a $x = 0, 5, 8$, y 12.

Solución. Esta "máquina" de funciones toma un valor de x tal como $x = 0$, le suma un número 4, y luego saca la raíz cuadrada de esta suma. Este proceso se ilustra en la figura 53. Por tanto,

$$f(0) = \sqrt{0 + 4} = \sqrt{4} = 2$$
$$f(5) = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3$$
$$f(8) = \sqrt{8 + 4} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \quad \text{y}$$
$$f(12) = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

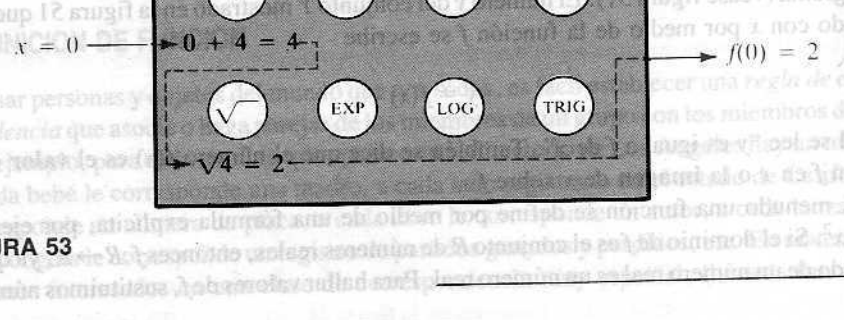


FIGURA 53

VARIABLES DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

Puesto que el valor de la variable y en $y = f(x)$ siempre depende de la elección de x, decimos que y es la **variable dependiente.** Por el contrario, la elección de x es independiente de y, por tanto, x se llama **variable independiente.**

EJEMPLO 4

Si $f(x) = x^2 - x + 1$, halle $f(-1)$, $f(x+h)$, y $f(x^2+1)$.

Solución. Remplazamos la variable independiente x por -1, $x + h$ y $x^2 + 1$ a su vez. Para enfatizar este remplazo, escribimos la función original como

$$f(\quad) = (\quad)^2 - (\quad) + 1$$

Por tanto, para las entradas dadas, tenemos

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 - (-1) + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h)^2 - (x+h) + 1 \\ &= x^2 + 2xh + h^2 - x - h + 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f(x^2+1) &= (x^2+1)^2 - (x^2+1) + 1 \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 - 1 + 1 \\ &= x^4 + x^2 + 1 \end{aligned}$$

El **cociente diferencia**

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

donde h es un número real diferente de cero, juega un papel muy importante en el estudio del cálculo.

EJEMPLO 5

Si $f(x) = x^2 - x + 1$ y $h \neq 0$, halle

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y simplifique.

Solución. Según el ejemplo 4, tenemos

$$f(x+h) = x^2 + 2xh + h^2 - x - h + 1$$

y entonces

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x^2 + 2xh + h^2 - x - h + 1) - (x^2 - x + 1) \\ &= 2xh + h^2 - h \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2xh+h^2-h}{h}$$

$$= \frac{h(2x+h-1)}{h}$$

$$= 2x+h-1$$

RANGO

En nuestra analogía con la máquina, el dominio de una función es el conjunto de todas las entradas reales que dan resultados reales. El conjunto de resultados se llama *rango* de la función. Formalmente, definimos el **rango** de una función f con dominio X como el resultado $\{f(x) \mid x \in X\}$. Por ejemplo, el rango de la función $f(x) = x^2$ es el conjunto de números reales no negativos.

Cuando una función se define por medio de una fórmula,

se considera que el dominio es el conjunto de números reales para los cuales la fórmula tiene sentido en el sistema de los números reales.

A menudo a este conjunto se denomina *dominio implícito o natural* de la función. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es el conjunto de todos los números reales no negativos.

EJEMPLO 6

Halle el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x+4}$.

Solución. Puesto que el radicando $x + 4$ debe ser no negativo, el dominio se determina por medio de la inecuación $x + 4 \geq 0$; esto es, el dominio es el conjunto de $\{x \mid x \geq -4\}$. Utilizando notación de intervalo, escribimos el dominio como $[-4, \infty)$.

EJEMPLO 7

Halle el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

Solución. Un cociente de dos números reales es un número real a menos que el denominador sea cero. Por tanto, el dominio de la función f consiste en todos los números reales x *excepto* los que satisfacen

$$x^2 - 4 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $x = 2$ y $x = -2$. Por tanto, el dominio de la función es el conjunto $\{x \mid x \neq \pm 2\}$.

EJEMPLO 8

El dominio de la función

$$g(x) = \frac{x}{x^2+4}$$

es el conjunto R de números reales, puesto que no hay número real x para el cual $x^2 + 4 = 0$.

EJEMPLO 9

Halle el dominio y el rango de $g(x) = 5 + \sqrt{x-3}$.

Solución. El dominio, determinado por el requerimiento $x - 3 \geq 0$, es $\{x \mid x \geq 3\}$. Puesto que $\sqrt{x-3} \geq 0$ para $x \geq 3$, tenemos $5 + \sqrt{x-3} \geq 5$ para estos mismos valores de x. Por tanto, el rango de g es $\{y \mid y \geq 5\}$.

Como lo ilustra el siguiente ejemplo, el problema de determinar si un número simple r está en el rango de la función $y = f(x)$, es equivalente a resolver la ecuación $f(x) = r$.

EJEMPLO 10

Determine si 7 está en el rango de $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Solución. El dominio de f es el intervalo $[1, \infty)$. Ahora, resolviendo $f(x) = 7$ da

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &= 7 \\ x - 1 &= 49 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Por tanto, el número 7 está en el rango de f, ya que 50 está en su dominio y

$$\begin{aligned} f(50) &= \sqrt{50-1} \\ &= \sqrt{49} = 7 \end{aligned}$$

FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Una regla que defina una función puede incluir más de una fórmula. Una función definida de esta manera se llama **función definida a trozos.** Por ejemplo,

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

no son dos funciones sino una función en la cual la regla se da en dos partes o trozos. En este caso, una parte se utiliza en los números reales negativos y la otra en los números reales no negativos. Por ejemplo, puesto que -4 es negativo, la regla indica que elevando al cuadrado el número:

$$g(-4) = (-4)^2 = 16$$

y puesto que 6 es positivo, le sumamos 1:

$$g(6) = 6 + 1 = 7$$

FUNCIONES CONSTANTES

Si c representa un elemento de cualquier conjunto, entonces a la función f definida por $f(x) = c$ para todos los x del dominio de f se llama **función constante.** Por ejemplo, suponga que el dominio de f es el conjunto R de números reales y $f(x) = 5$. Entonces,

$$f(0) = 5, \quad f(-1) = 5, \quad f(\sqrt{2}) = 5, \quad f(\pi) = 5, \quad f(2.57) = 5, \quad \text{etc.}$$

APLICACIONES

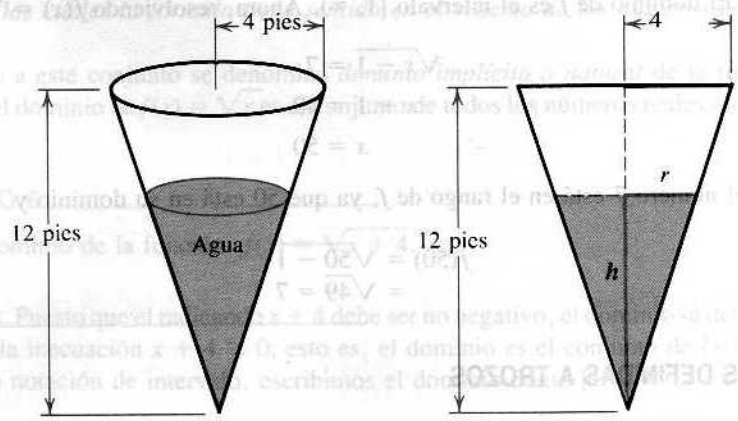
Muchas fórmulas de la geometría y la ciencia definen funciones. Por ejemplo, el área A de un cuadrado es una función de la longitud de un lado. Si x denota la longitud de un lado de un cuadrado, entonces $A = x^2$. El área A y la longitud de la circunferencia C de un círculo son funciones de su radio r: $A = \pi r^2$ y $C = 2\pi r$. La distancia s con la que un cuerpo cae bajo la influencia de la gravedad es una función de tiempo: t: $s = 16t^2$.

En el estudio de aplicaciones en cursos de matemáticas subsecuentes (por ejemplo, cálculo), a menudo es necesario establecer una relación funcional entre dos variables, interpretando datos escritos. Considere el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 11

Se bombea agua en un tanque cónico cuya altura es de 12 pies y cuyo radio es de 4 pies. Exprese el volumen del agua en cualquier momento, como una función de su profundidad.

Solución. El tanque cónico se ilustra en la figura 54(a), y un corte transversal del tanque se muestra en la figura 54(b).



(a) (b)

FIGURA 54
(a) Tanque cónico; (b) corte transversal.

Hemos introducido las variables r y h para denotar el radio y la profundidad del agua, respectivamente. Ahora vemos que el volumen del agua es el volumen de un cono circular recto. De la geometría sabemos que el volumen de tal cono está dado por

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \tag{14}$$

Puesto que los triángulos rectángulos mostrados en la figura 54(b) son semejantes, las longitudes de sus lados son proporcionales: $r/h = 4/12$. Sustituyendo $r = \frac{1}{3}h$ en (14) nos da entonces el volumen del agua en cualquier momento como una función de profundidad h:

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{3}h\right)^2 h, \quad \text{o} \quad V = \frac{\pi}{27}h^3$$

EJEMPLO 12

Exprese el área A de un círculo como una función de la longitud de su circunferencia C.

Solución. El área A y la longitud de la circunferencia C de un círculo son funciones del radio del círculo:

$$A = \pi r^2 \quad \text{y} \quad C = 2\pi r$$

Ahora, de la segunda de estas ecuaciones obtenemos $r = C/2\pi$. Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación de A como una función de C:

$$A = \pi(C/2\pi)^2, \quad \text{o} \quad A = \frac{1}{4\pi}C^2$$

EJERCICIO 3.4

En los problemas 1 al 6, determine si la correspondencia dada por el conjunto de pares ordenados (x, y) es una función.

1. $\{(1,2),(2,-3),(3,4),(-4,1),(1,5)\}$

2. $\{(1,1),(2,8),(-1,1),(-2,8)\}$

3. $\{(0,1),(1,1),(2,1)\}$

4. $\{(0,0),(1,1),(2,2)\}$

5. $\{(4,2),(-4,3),(8,6),(5,4)\}$

6. $\{(-3,2),(6,2),(-3,9),(-6,9)\}$

7. Si $f(x)=x^2-2$, halle $f(0), f(-1), f(\sqrt{2})$ y $f(2)$.

8. Si $f(x)=x^2-2x$, halle $f(0), f(1), f(\sqrt{2})$ y $f(-2)$.

9. Si $f(x)=\sqrt{x+1}$, halle $f(0), f(-8), f(1/2)$ y $f(-1/2)$.

10. Si $f(x)=\sqrt{4+2x}$, halle $f(0), f(4), f(-2)$ y $f(-3/2)$.

11. Si $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-1}$, halle $f(0), f(\sqrt{2}), f(-\sqrt{2})$ y $f(1/2)$.

12. Si $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3-8}$, halle $f(0), f(-2), f(\sqrt{2})$ y $f(-1/2)$.

13. Si $f(x)=x^2-3x^3$, halle $f(a^2), f(a-1), f(a+1)$ y $f(1/b)$.

14. Si $f(x)=2x^2-x^4$, halle $f(a), f(a+1), f(a^2)$ y $f(1/b)$.

15. Si $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & x\neq 3\\ 6, & x=3\end{cases}$ halle $f(3), f(-3)$.

16. Si $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-16}{x^2-4}, & x\neq \pm 2\\ 3, & x=-2\\ 4, & x=2\end{cases}$ halle $f(-1), f(-2)$ y $f(2)$.

17. Si $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\geq 1\\ -x^3, & x<1\end{cases}$ halle $f(0), f(1), f(\sqrt{2})$ y $f(-2)$.

18. $f(x)=\begin{cases}4x+3, & \text{si } -2\leq x<0\\ 1+x^2, & \text{si } 0\leq x\leq 2\\ 7, & \text{si } x>2\end{cases}$ halle $f(0), f(1), f(-1)$ y $f(2)$.

En los problemas 19 al 22, halle

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

donde $h \neq 0$ es una constante.

19. $f(x)=x^2+2$ **20.** $f(x)=-3x+x^2+5$

21. $f(x)=x^3$ **22.** $f(x)=1/\sqrt{x}$

En los problemas 23 y 24, halle

$$\frac{f(x)-f(a)}{h}$$

donde $h \neq a$ es una constante.

23. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ **24.** $f(x)=x^3+x-1$

En los problemas 25 al 34, halle el dominio de la función.

25. $f(x)=\sqrt{3x+2}$ **26.** $f(x)=\sqrt{15-15x}$

27. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2}$ **28.** $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3x^2+5x-2}}$

29. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4-16}}$ **30.** $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x-3}}$

31. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2}$ **32.** $f(x)=\dfrac{5}{x\sqrt{x+4}}$

33. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+1}}$ **34.** $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+6}$

En los problemas 35 al 42, halle el dominio y el rango de la función.

35. $f(x)=3x-15$ **36.** $f(x)=2x^2-4$

37. $f(x)=x^3$ **38.** $f(x)=\sqrt{x-4}$

39. $f(x)=-1+\sqrt{6x-2}$ **40.** $f(x)=2+\sqrt{3x-1}$

41. $f(x)=\sqrt{16-3x}$ **42.** $f(x)=10-|x|$

43. ¿Para qué valores de x es $f(x)=\sqrt{x-3}$ igual a 3?

44. ¿Para qué valores de x es $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ igual a 0?

45. ¿Para qué valores de x es $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & 0\le x\le 1\\ 1+x/2, & 1<x\le 2\end{cases}$ igual a 0?, ¿a 2?

46. Determine si los números $5y-5$ están en el rango de la función $g(x)=x(x-4)$.

47. Exprese el área de un triángulo equilátero como una función de la longitud s de un lado.

48. Exprese el perímetro P de un cuadrado como una función de su área A.

49. Exprese el área A de un círculo como función de su diámetro d.

50. Exprese el área A de un triángulo equilátero como una función de la altura h de un triángulo.

51. Exprese el volumen de un cubo como una función del área A de su base.

52. Exprese el área de la superficie de un cilindro circular recto de volumen 1 m³ como una función de su radio r.

53. Con un pedazo de cartulina rectangular se hace una caja abierta, recortando un cuadrado de longitud x de cada esquina y doblando luego los lados hacia arriba. Si la cartulina mide 3 pies por 4 pies (figura 55), exprese el volumen V de la caja como una función de x.

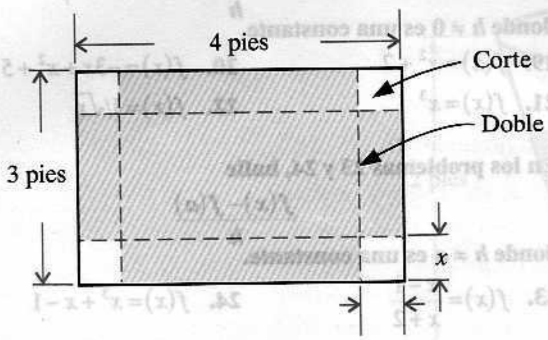


FIGURA 55

54. Con un pedazo de metal de 1 por 20 pies se hace un canal con un corte transversal rectangular, doblando hacia arriba cantidades x iguales del lado de 1 pie (véase figura 56). Exprese el volumen V de la canal como una función de x.

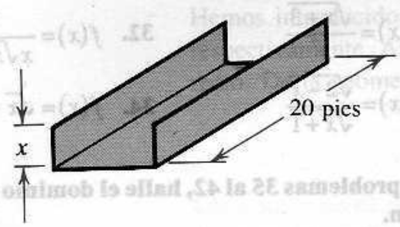


FIGURA 56

55. Se va a construir una caja rectangular abierta con una base cuadrada de longitud r y un volumen de 20,000 cm³. Exprese el área de la superficie S de la caja como una función de x.

56. Se construye una cisterna de modo que su capacidad sea de 300 pies cúbicos de agua. La cisterna tiene como base un cuadrado y cuatro caras verticales, todas hechas de concreto, y una tapa cuadrada de acero. Si el concreto tiene un costo de US\$1.50 por pie cuadrado y el acero cuesta US\$4 por pie cuadrado, determine el costo total C como una función de la longitud del lado de la base cuadrada.

57. Se va a cercar un pedazo rectangular de tierra de forraje y se va a dividir en dos porciones iguales por medio de un cercado adicional paralelo a dos lados. La porción de tierra tiene 4,000 m². Exprese la cantidad de cercado F en términos de la longitud x mostrada en la figura 57.

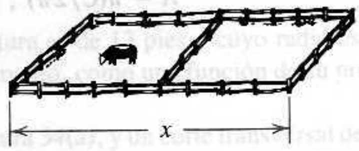


FIGURA 57

58. Una persona de 6 pies de altura camina hacia un farol de 20 pies, como se muestra en la figura 58. Exprese la longitud L de su sombra como una función de su distancia x desde el farol.

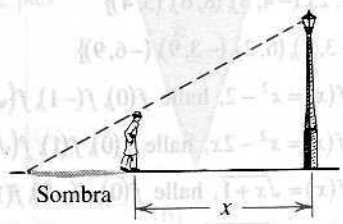


FIGURA 58

59. La ventana que se muestra en la figura 59 consta de un rectángulo con un semicírculo en la parte superior. Exprese el área A de la ventana como una función del ancho x indicado, si se sabe que el perímetro de la ventana es de 30 m.

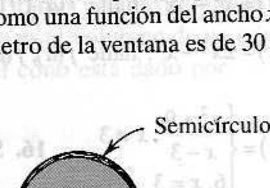


FIGURA 59

60. Un alambre de longitud L se corta en x unidades de un extremo. Un pedazo de alambre se dobla en forma de círculo y el otro se dobla en forma de cuadrado. Exprese la suma S de las áreas como una función de x.

61. Dos calles se interceptan como se muestra en la figura 60. A las 12:00 p.m. el auto A atraviesa el intersecto recto y se dirige hacia el sur con una velocidad constante de 50 mph. Al mismo tiempo, el auto B está a 4 millas este del intercepto y viaja hacia el occidente con una velocidad constante de 30 mph; siendo $t = 0$ la representación de las 12:00 p.m., exprese la distancia d entre los dos autos como una función de tiempo $t > 0$.

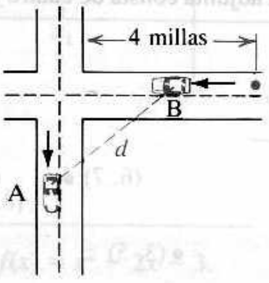


FIGURA 60

62. Los extremos de un abrevadero de 12 pies de largo forman triángulos isósceles. Los lados iguales de los triángulos tienen 4 pies de largo, y el lado resultante tiene x pies de largo (véase figura 61). Exprese el volumen V del abrevadero como una función de x.

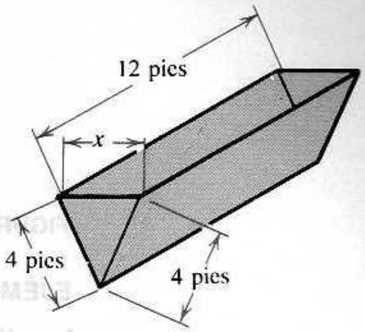


FIGURA 61

63. Se debe construir una pista de atletismo con dos segmentos rectos y dos semicirculares, como lo muestra la figura 62. El radio de cada segmento semicircular es r. La longitud de la pista debe ser 1 km. Exprese el área A cubierta por la pista como una función de r.

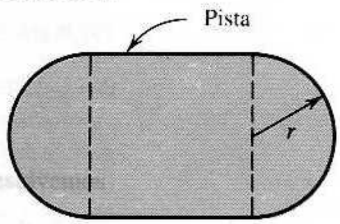


FIGURA 62

3.5 Gráficas de funciones

A menudo se utiliza una función para describir problemas o fenómenos en campos tales como el de la ciencia, la ingeniería y el comercio. Para interpretar y utilizar datos obtenidos de tal función, encontramos que es útil presentar los datos en forma de gráfica (véase figura 63).

En un plano xy, se define la **gráfica de una función** $y = f(x)$ como la gráfica de la relación

$$\{(x, y) | y = f(x),\ x \text{ en el dominio de } f\}.$$

En otras palabras, la gráfica de una función f es el conjunto de puntos (x, y) en el plano cuyas coordenadas satisfacen $y = f(x)$.

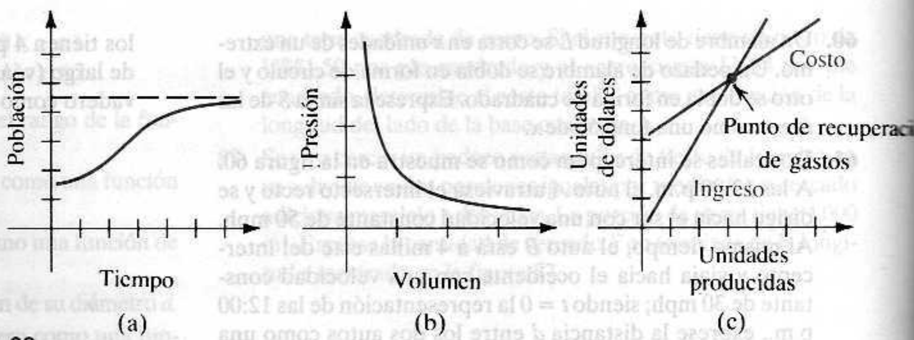


FIGURA 63

EJEMPLO 1

La gráfica de la función f definida por la tabla adjunta consta de cuatro puntos mostrados en la figura 64.

x	y
1	→ 3
3	→ 5
6	→ 7
8	↗

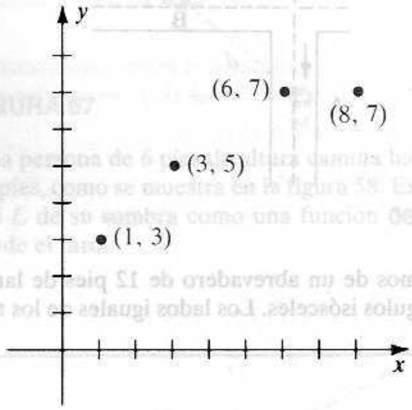


FIGURA 64

INTERSECTOS

Para graficar una función definida por la ecuación $y = f(x)$, usualmente es buena idea determinar primero si la gráfica de f tiene algunos intersectos. Recuerde que el eje y es la recta $x = 0$. Por tanto, si 0 está en el dominio de f, el **intersecto en y** de su gráfica es el número $f(0)$. (Véase figura 65(a)). De la misma manera, el eje x es la recta $y = 0$. Por tanto, para hallar los **intersectos en x** de la gráfica de $y = f(x)$, debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$. Los números que satisfacen esta ecuación se llaman también *ceros* de f. Los ceros *reales* de f son los intersectos en x de su gráfica. En la figura 65(b), vemos que $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0)$, $f(x_3) = 0$. Por tanto, x_1, x_2, y x_3 son los intersectos en x de la gráfica de la función f.

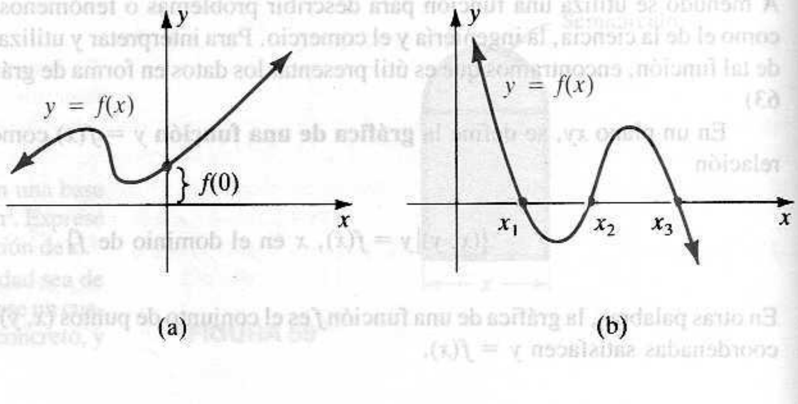


FIGURA 65

Para obtener otros puntos de la gráfica de una función $y = f(x)$, podemos escoger los números $x_1, y_2, \ldots, x_n$ en su dominio, calcular $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, y luego marcar los puntos correspondientes $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Tenga presente que un valor funcional $f(x)$ es una distancia dirigida desde el eje x (véase figura 66).

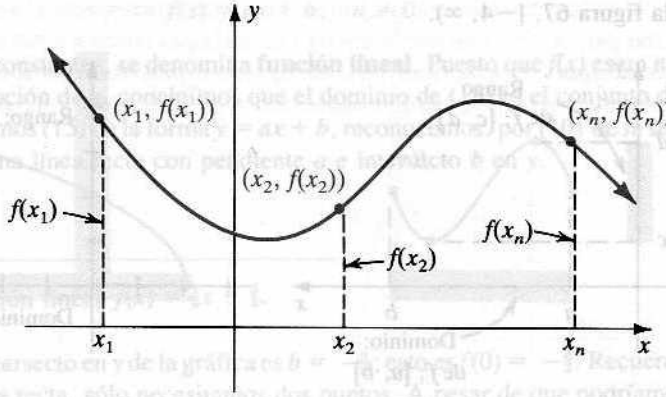


FIGURA 66

EJEMPLO 2

Grafique la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Solución. El intersecto en y es $f(0) = -3$. Para hallar los intersectos en x, resolvemos

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

o

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

Por tanto, puesto que $f(x) = 0$ cuando $x = -1$ o $x = 3$, los intersectos en x son -1 y 3. Marcando los puntos de la tabla adjunta, obtenemos la gráfica en la figura 67.

x	$f(x)$
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5

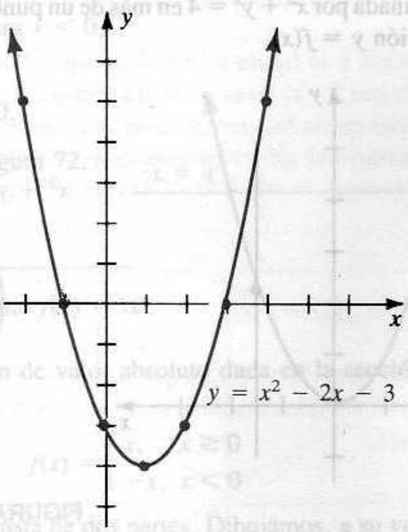
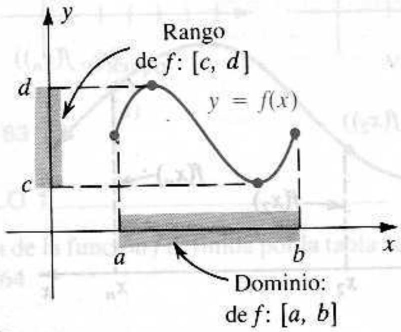


FIGURA 67

Si la gráfica de una función $y = f(x)$ se dibuja con precisión, usualmente es posible ver el dominio y el rango de f (figura 68). El dominio de f es cualquier intervalo u otro conjunto de números reales en el eje x; y el rango de f es cualquier intervalo u otro conjunto de números reales, en el eje y. En el ejemplo 2, el dominio de la función dada es el conjunto R de números reales; esto es, el intervalo $(-\infty, \infty)$. El rango de la función parece ser, según la gráfica de la figura 67, $[-4, \infty)$.



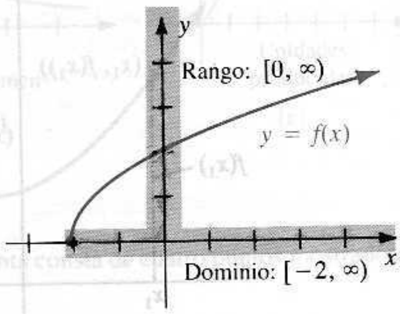


FIGURA 68 (a) (b)

PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL

Por la definición de una función sabemos que por cada x en el dominio de f corresponde un valor *único* $f(x)$ en el rango. Esto significa que cualquier recta vertical que interseque la gráfica de f puede hacerlo máximo en un punto. Y, viceversa, si cada recta vertical interseca la gráfica de una relación en a lo sumo un punto, entonces la relación es una función. Esta última afirmación se llama **prueba de la recta vertical** para una función.

EJEMPLO 3

(a) En la figura 69 vemos que cualquier recta vertical interseca la gráfica de la relación definida por $y = x^2$, en máximo un punto. Por tanto, por medio de la prueba de la recta vertical, la relación determina una función $y = f(x) = x^2$.

(b) Como lo muestra la figura 70, una recta vertical puede intersecar la gráfica de la relación determinada por $x^2 + y^2 = 4$ en más de un punto. Por tanto, la relación no determina una función $y = f(x)$.

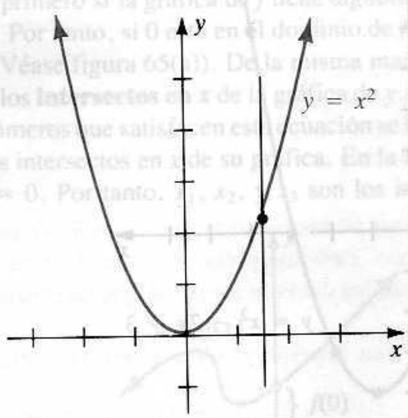


FIGURA 69

Gráfica de una función

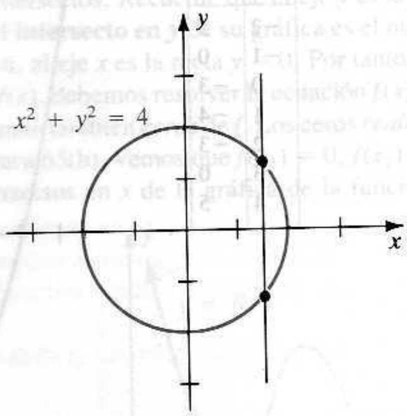


FIGURA 70

No es la gráfica de una función

FUNCIONES LINEALES

Uno de los más simples pero más importantes tipos de funciones es la función lineal. Cualquier función de la forma

$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0 \tag{15}$$

donde a y b son constantes, se denomina **función lineal**. Puesto que $f(x)$ es un número real para cualquier opción de x, concluimos que el dominio de (15) es el conjunto de números reales. Si escribimos (15) de la forma $y = ax + b$, reconocemos, por (10) de la sección 3.3, la ecuación de una línea recta con pendiente a e intersecto b en y.

EJEMPLO 4

Grafique la función lineal $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Solución. El intersecto en y de la gráfica es $b = -\frac{3}{2}$; esto es $f(0) = -\frac{3}{2}$. Recuerde que para graficar una línea recta, sólo necesitamos dos puntos. A pesar de que podríamos sustituir cualquier valor de x en $f(x)$ para obtener otro punto, determinaremos el intersecto en x de la gráfica. Estableciendo que $f(x) = 0$, tenemos

$$\tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2} = 0$$

lo cual da $x = 3$. Por tanto, el intersecto en x es 3. La gráfica de la recta en la figura 71 se traza pasando por los puntos $(0, -\frac{3}{2})$ y $(3, 0)$.

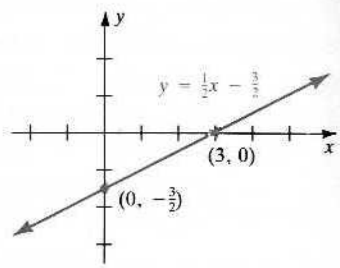


FIGURA 71

EJEMPLO 5

Grafique la función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Solución. Esta función se determina en tres partes. Dibujamos, a su vez,

la recta horizontal $y = -1$ para $x < 0$,

el punto $(0, 0)$ y,

la recta $y = x + 1$ para $x > 0$.

La gráfica de f se muestra en la figura 72.

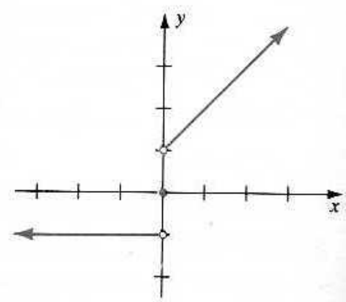


FIGURA 72

EJEMPLO 6

Grafique la función de valor absoluto $f(x) = |x|$.

Solución. Utilizando la definición de valor absoluto dada en la sección 1.2, podemos reescribir f como

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Por consiguiente, la gráfica de f consta de dos partes. Dibujamos, a su vez, la recta $y = x$ para $x \geq 0$ y la recta $y = -x$ para $x < 0$. La gráfica se muestra en la figura 73.

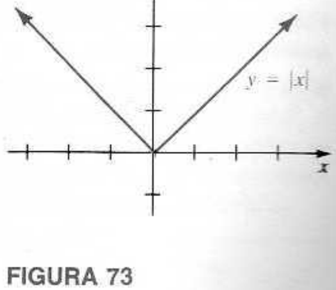
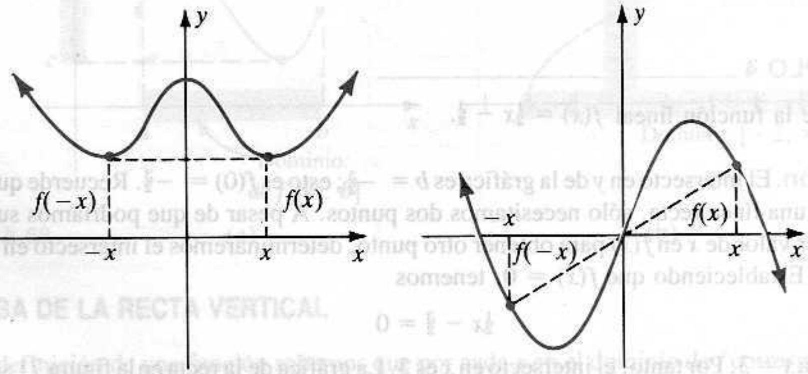


FIGURA 73

SIMETRIA

En la sección 3.1 tratamos la simetría de una gráfica con respecto al eje y, al eje x y al origen. La gráfica de una función puede ser simétrica con respecto al eje y o al origen, pero la gráfica de una función diferente de la función cero *no puede* ser simétrica con respecto al eje x. (¿Por qué no?). Si la gráfica de una función f es simétrica con respecto al eje y, decimos que f es una **función par.** Se dice que una función cuya gráfica es simétrica con respecto al origen es una **función impar.** Para las funciones, las siguientes pruebas de simetría son equivalentes a las pruebas (i) y (iii), respectivamente, de la p. 125 (véase figura 74).



(a) Función par $f(-x) = f(x)$ (b) Función impar $f(-x) = -f(x)$

FIGURA 74

Pruebas de simetría
La gráfica de una función f con dominio X es simétrica con respecto:
(i) al **eje y** si $f(-x) = f(x)$ para todos los x en X, y
(ii) al **origen** si $f(-x) = -f(x)$ para todos los x en X.

Una inspección a la figura 67 en el ejemplo 2 muestra que f no es ni par ni impar. Notamos también que $f(-x)$ no es igual ni a $f(x)$ ni a $f(-x)$. Por otra parte, en la figura 73 en el ejemplo 6, vemos que la función de valor absoluto es una función par, ya que su gráfica es simétrica con respecto al eje y. En este caso, $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.

EJEMPLO 7

Grafique la función $f(x) = x^3$.

Solución. Puesto que $f(0) = 0$ y ya que $f(x) = x^3 = 0$ implica que $x = 0$, vemos que los intersectos en x y en y son los mismos, es decir, 0. Esto significa que la gráfica de f pasa por el origen. Además,

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 \\ &= -x^3 \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

muestra que la gráfica de f es simétrica con respecto al origen. Por tanto, f es una función impar. Utilizando estos resultados sobre los intersectos y la simetría y marcando los puntos de la tabla adjunta nos da la gráfica en la figura 75

x	$f(x)$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8

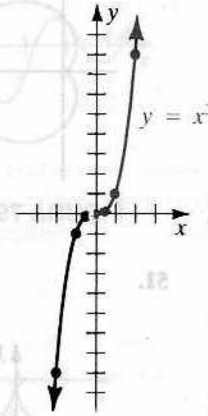


FIGURA 75

EJEMPLO 8

Grafique la función $f(x) = x^{2/3}$.

Solución. Podemos ver que la función puede escribirse también de la forma

$$f(x) = (x^{1/3})^2 = (\sqrt[3]{x})^2$$

Puesto que es posible hallar la raíz cúbica de cualquier número real, el dominio de f es el conjunto R de números reales. Como en el ejemplo 7, los intersectos en x y en y son 0. Ahora, en

$$\begin{aligned} f(-x) &= (\sqrt[3]{-x})^2 \\ &= (-\sqrt[3]{x})^2 \\ &= (\sqrt[3]{x})^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

vemos que f es una función par. Marcando los puntos de la tabla y utilizando los intersectos y la simetría con respecto al eje y, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 76.

x	$f(x)$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	1
4	$4^{2/3} \approx 2.52$
8	4

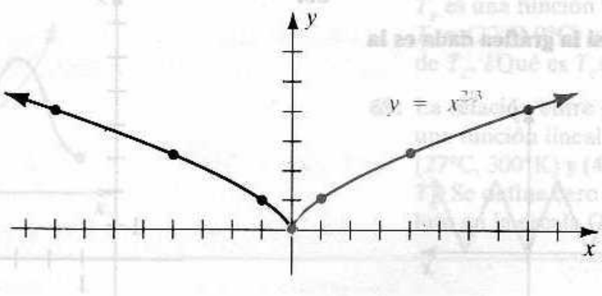


FIGURA 76

EJERCICIO 3.5

En los problemas 1 al 40, grafique la función dada y halle los intersectos. Utilice la simetría cuando sea posible.

1. $f(x)=2$
2. $f(x)=-2$
3. $f(x)=x$
4. $f(x)=x-5$
5. $f(x)=3x-1$
6. $f(x)=-2x+6$
7. $f(x)=\sqrt{x}$
8. $f(x)=-3+\sqrt{x}$
9. $f(x)=\sqrt{x-4}$
10. $f(x)=\sqrt{8-4x}$
11. $f(x)=x^{1/3}$
12. $f(x)=\sqrt[3]{x-27}$
13. $f(x)=-x^2$
14. $f(x)=10x^2$
15. $f(x)=x^2+1$
16. $f(x)=9-x^2$
17. $f(x)=2x^2-4x$
18. $f(x)=x^2+x$
19. $f(x)=x^2-8x+16$
20. $f(x)=x^2-4x+5$
21. $f(x)=-x^3$
22. $f(x)=-1+x^3$
23. $f(x)=x^3+1$
24. $f(x)=x^3-x$
25. $f(x)=\begin{cases}4, x\geq 3\\ -1\ x<3\end{cases}$
26. $f(x)=\begin{cases}x, -3\leq x\leq 3\\ -3, x<-3\end{cases}$
27. $f(x)=\begin{cases}x+1, x\leq 0\\ x-1, x>0\end{cases}$
28. $f(x)=\begin{cases}x, x<0\\ x^2, 0\leq x<1\\ x^3, x>1\end{cases}$
29. $f(x)=|x|-2$
30. $f(x)=|x-5|$
31. $f(x)=|x+2|$
32. $f(x)=|x|+2$
33. $f(x)=-2/|x|$
34. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$
35. $f(x)=1/x$
36. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$
37. $f(x)=x^4$
38. $f(x)=(x-2)^4$
39. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$
40. $f(x)=\sqrt{16-x^2}$

En los problemas 41 al 46, halle los intersectos de la gráfica de la función dada.

41. $f(x)=(x-1)^2-36$
42. $f(x)=x^4-9$
43. $f(x)=\sqrt{(2-x^2)/(1-x)}$
44. $f(x)=\dfrac{3x^2-8x+6}{5x-10}$
45. $f(x)=\dfrac{4x-6}{x}$
46. $f(x)=\dfrac{25}{x^2+6}$

En los problemas 47 al 54, determine si la gráfica dada es la gráfica de una función.

47.

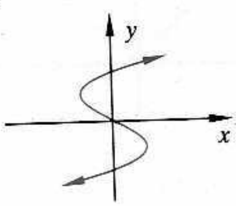


FIGURA 77

48.

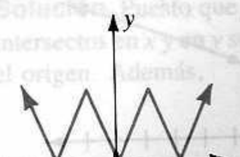


FIGURA 78

49.

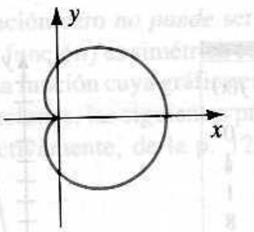


FIGURA 79

50.

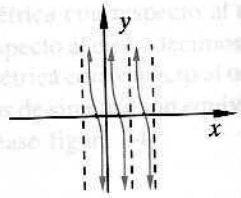


FIGURA 80

51.

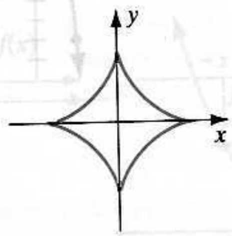


FIGURA 81

52.

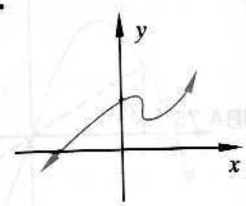


FIGURA 82

53.

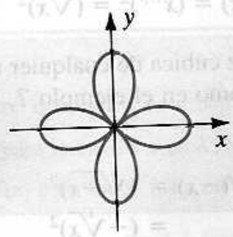


FIGURA 83

54.

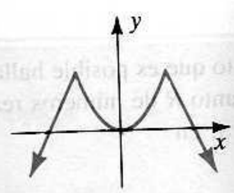


FIGURA 84

En los problemas 55 al 58, la gráfica dada es la gráfica de una función *f*. Según la figura, determine el dominio y el rango de *f*.

55.

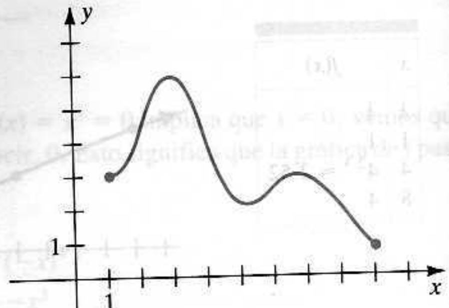


FIGURA 85

56.

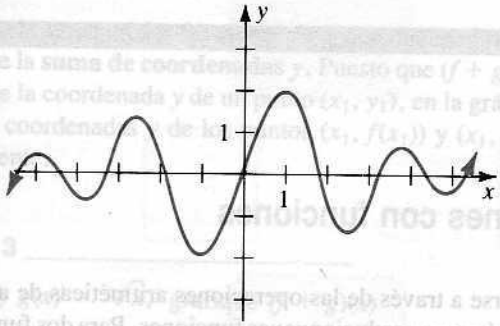


FIGURA 86

57.

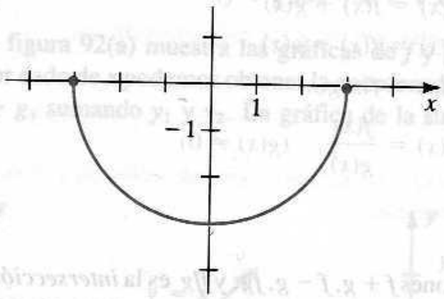


FIGURA 87

58.

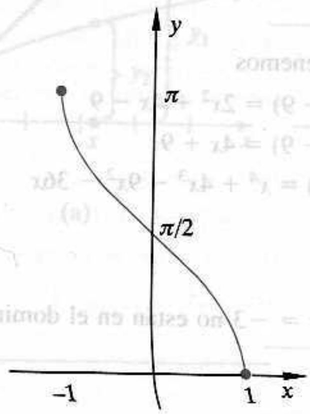


FIGURA 88

En los problemas 59 y 60, complete la gráfica (a) si f es una función par; (b) si f es una función impar.

59.

FIGURA 89

60.

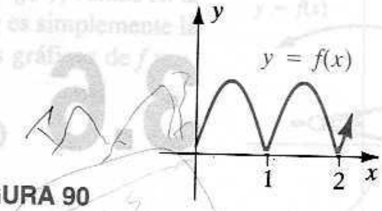


FIGURA 90

61. El resultado de la función **parte entera** $f(x) = [\,x\,]$ se define como el mayor entero n, para el cual $n \le x$. Halle $f(-2.5), f(-2), f(-1.3), f(0), f(3.30), f(2.1)$ y $f(1.8)$.

62. Trace la gráfica de la función parte entera del problema 61.

63. Sea $f(x) = [\,x\,]$ la función parte entera definida en el problema 61; trace la gráfica de $y = [x + 2]$.

64. Un metro tiene aproximadamente 3.28 pies. Determine funciones para convertir metros a pies y pies a metros.

65. La *depreciación directa, o lineal*, supone que un artículo pierde todo su valor inicial de A dólares durante un periodo de n años en una cantidad A/n cada año. Si un artículo que cuesta US\$25,000 cuando está nuevo es depreciado linealmente por un periodo de 20 años, determine una función lineal dando su valor V en dólares después de x años ($0 \le x \le 20$). ¿Cuál es el valor después de 10 años?

66. En cálculos de *interés simple*, la cantidad devengada S es una función lineal de tiempo medido en años: $S = P + Prt$. Calcule S pasados 12 años, si el capital es $P = 150$ y la tasa anual de interés es $r = 6\%$. ¿En qué momento es $S = 180$?

67. El valor en dólares de un computador está dado por la función lineal

$$V(x) = 500{,}000\,(1 - x/40),\ 0 \le x 40$$

en donde x se mide en años. ¿Cuál es el valor inicial del computador? ¿En qué momento el valor del computador es la mitad de su valor inicial? ¿En qué momento el computador ha perdido tres cuartas parte de su valor inicial? ¿Cuándo no vale nada?

68. La relación entre grados Celsius T_C y grados Fahrenheit T_F es una función lineal. Exprese T_C como una función de T_F si (32°F, 0°C) y (212°F, 100°C) son puntos de la gráfica de T_C. ¿Qué es $T_C(160)$?

69. La relación entre grados Kelvin T_K y grados Celsius T_C es una función lineal. Exprese T_K como una función de T_C si (27°C, 300°K) y (40°C, 313°K) son puntos de la gráfica de T_K. Se define cero absoluto como 0°K. ¿Qué es cero absoluto en la escala Celsius? ¿En la escala Fahrenheit?

3.6 Operaciones con funciones

Las funciones pueden combinarse a través de las operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división para producir nuevas funciones. Para dos funciones f y g, la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg y el **cociente** f/g se define como sigue.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (g(x) \neq 0)$$

DOMINIOS

El dominio de cada una de las funciones $f + g$, $f - g$, fg, y f/g es la *intersección* del dominio de f con el dominio de g. En el caso del cociente f/g, debemos excluir, además, los valores de x para los cuales el denominador $g(x)$ es 0.

EJEMPLO 1

Para $f(x) = x^2 + 4x$ y $g(x) = x^2 - 9$, tenemos

$$(f + g)(x) = (x^2 + 4x) + (x^2 - 9) = 2x^2 + 4x - 9$$
$$(f - g)(x) = (x^2 + 4x) - (x^2 - 9) = 4x + 9$$
$$(fg)(x) = (x^2 + 4x)(x^2 - 9) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 36x$$

y $$(f/g)(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 9}$$

En el ejemplo 1 notamos que $x = 3$ y $x = -3$ no están en el dominio de $(f/g)(x)$.

EJEMPLO 2

Si sumamos

$$f(x) = \sqrt{1 - x}, \quad x \leq 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{x + 2}, \quad x \geq -2$$

obtenemos

$$(f + g)(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x + 2}$$

El dominio de esta nueva función es el intervalo $[-2, 1]$, el cual es el conjunto de números comunes a ambos dominios.

SUMA DE COORDENADAS *y*

La gráfica de la suma de dos funciones f y g que tienen el mismo dominio puede obtenerse por medio de la **suma de coordenadas *y*.** Puesto que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, vemos en la figura 91 que la coordenada y de un punto (x_1, y_1), en la gráfica de $f + g$ es simplemente la suma de las coordenadas y de los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_1, g(x_1))$ en las gráficas de f y g, respectivamente.

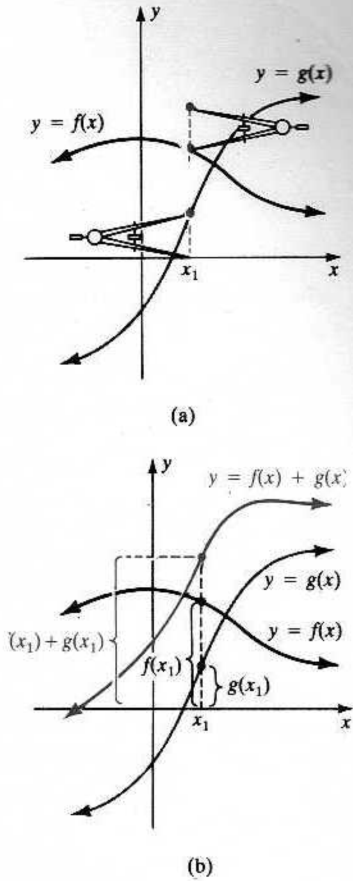


FIGURA 91

EJEMPLO 3

Si $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x}$, grafique $(f + g)(x)$

Solución. Primero, notamos que el dominio de

$$(f + g)(x) = x + \sqrt{x}$$

es $[0, \infty)$. La figura 92(a) muestra las gráficas de f y g para $x \geq 0$. Como se indicó, en cualquier valor dado de x podemos obtener la coordenada y del punto correspondiente en la gráfica de $f + g$, sumando y_1 y y_2. La gráfica de la suma se muestra en la figura 92(b).

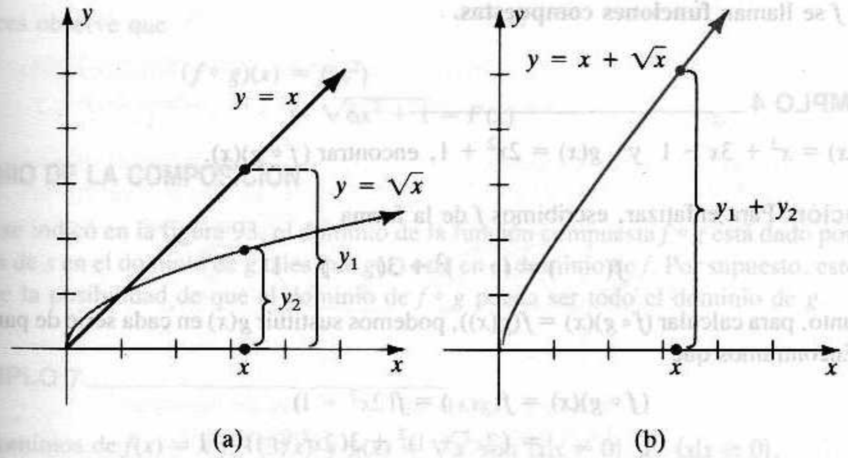


FIGURA 92

COMPOSICION DE FUNCIONES

Otro método de combinar dos funciones f y g se llama **composición de funciones.** Definimos la composición de f y g denotada por $f \circ g$ como la función

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

donde se entiende que los valores funcionales $g(x)$ esto es, elementos en el rango de g están en el dominio de f. Simbólicamente, utilizando nuestra analogía de la máquina de funciones, podemos representar la composición de f y g, como se muestra en la figura 93.

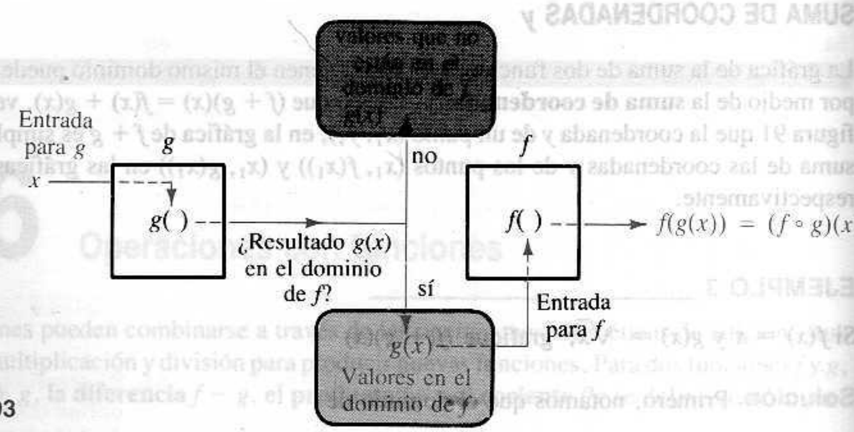


FIGURA 93

De la misma manera, la composición de g y f está definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Por supuesto, los valores funcionales $f(x)$ deben estar en el dominio de g. Las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ se llaman **funciones compuestas.**

EJEMPLO 4

Si $f(x) = x^2 + 3x - 1$ y $g(x) = 2x^2 + 1$, encontrar $(f \circ g)(x)$.

Solución. Para enfatizar, escribimos f de la forma

$$f(\quad) = (\quad)^2 + 3(\quad) - 1$$

Por tanto, para calcular $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, podemos sustituir $g(x)$ en cada serie de paréntesis. Encontramos que

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x^2 + 1)\\ &= (2x^2 + 1)^2 + 3(2x^2 + 1) - 1\\ &= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 6x^2 + 3 - 1\\ &= 4x^4 + 10x^2 + 3\end{aligned}$$

EJEMPLO 5

Halle $(g \circ f)(x)$ para las funciones dadas en el ejemplo 4.

Solución. En este caso,

$$g(\quad) = 2(\quad)^2 + 1$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2 + 3x - 1)\\ &= 2(x^2 + 3x - 1)^2 + 1\\ &= 2(x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1) + 1\\ &= 2x^4 + 12x^3 + 14x^2 - 12x + 3\end{aligned}$$

Nota de advertencia: los ejemplos 4 y 5 ilustran que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$.

EJEMPLO 6

Exprese la función $F(x) = \sqrt{6x^2 + 1}$ como la composición $f \circ g$ de dos funciones f y g.

Solución. Si definimos las funciones f y g por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 6x^2 + 1$$

entonces

$$\begin{aligned} F(x) &= (f \circ g)(x) \\ &= f(g(x)) \\ &= f(6x^2 + 1) \\ &= \sqrt{6x^2 + 1} \end{aligned}$$

Hay otras soluciones para el ejemplo 6: si las funciones f y g están determinadas por

$$f(x) = \sqrt{6x + 1} \quad \text{y} \quad g(x) = x^2$$

entonces observe que

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(x^2) \\ &= \sqrt{6x^2 + 1} = F(x) \end{aligned}$$

DOMINIO DE LA COMPOSICION

Como se indicó en la figura 93, el dominio de la función compuesta $f \circ g$ está dado por los valores de x en el dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f. Por supuesto, esto no excluye la posibilidad de que el dominio de $f \circ g$ pueda ser todo el dominio de g.

EJEMPLO 7

Los dominios de $f(x) = x^2 - (3/x)$ y $g(x) = \sqrt{x}$ son $\{x|x \neq 0\}$ y $\{x|x \geq 0\}$, respectivamente. El dominio de

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x})^2 - \frac{3}{\sqrt{x}} \\ &= x - \frac{3}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

es $\{x|x > 0\}$, o $(0, \infty)$.

EJEMPLO 8

Los dominios de $f(x) = \sqrt{x - 3}$ y $g(x) = x^2 + 2$ son $\{x|x \geq 3\}$ y el conjunto R de números reales, respectivamente. Vemos que $g(x) \geq 2$ para todos los x. Para garantizar que los números representados por $g(x)$ estén en el dominio de f (a saber, aquellos números mayores o iguales a 3), debemos restringir el dominio de g de modo que $x \leq -1$ o $x \geq 1$ (véase figura 94.) Por tanto,

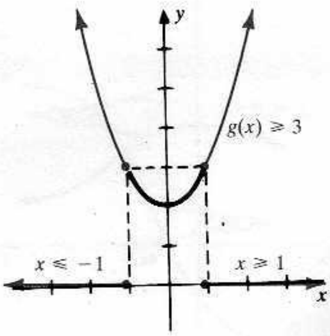


FIGURA 94

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 + 2)\\ &= \sqrt{(x^2 + 2) - 3}\\ &= \sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

se define solamente en $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

GRAFICAS TRASLADADAS

Si f es una función y k es una constante positiva, entonces las gráficas de la suma $f(x) + k$, la diferencia $f(x) - k$, y las composiciones $f(x + k)$ y $f(x - k)$ pueden obtenerse de la gráfica de f, por medio de un **cambio o traslación** vertical u horizontal, por medio de una cantidad k. La figura 95 ilustra los 4 casos que se sintetizan en la tabla contigua.

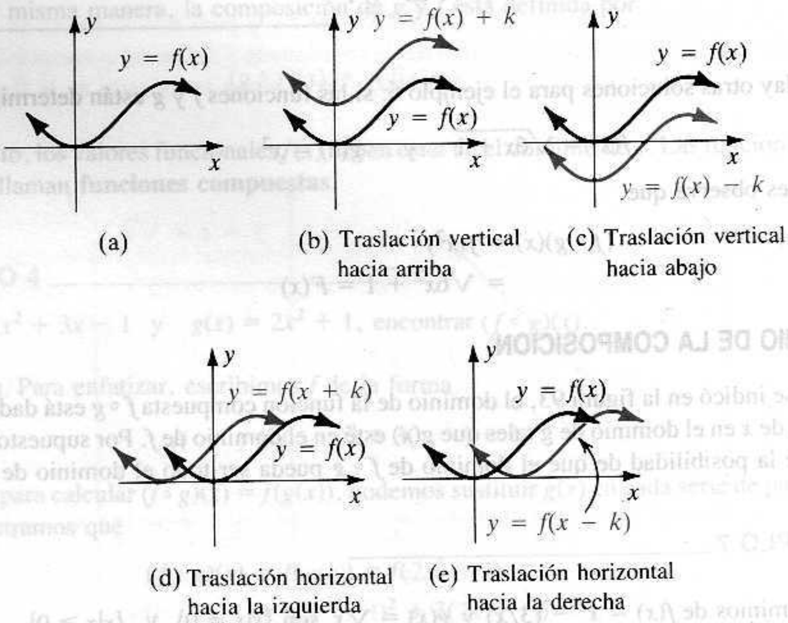


FIGURA 95

FUNCION $k > 0$	GRAFICA DE $y = f(x)$
$y = f(x) + k$	Trasladada hacia *arriba* k unidades
$y = f(x) - k$	Trasladada hacia *abajo* k unidades
$y = f(x + k)$	Trasladada hacia la *izquierda* k unidades
$y = f(x - k)$	Trasladada hacia la *derecha* k unidades

EJEMPLO 9

La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$, que se muestra en la figura 96(a), se dio primero en el ejemplo 6 de la sección 3.1. Las gráficas de $y = \sqrt{x} + 1$, $y = \sqrt{x} - 1$, $y = \sqrt{x + 1}$, y $y = \sqrt{x - 1}$, que se muestran en las figuras 96(b), (c), (d) y (e), se obtuvieron de trasladar la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, a su vez, una unidad arriba, una unidad abajo, una unidad a la izquierda y una a la derecha.

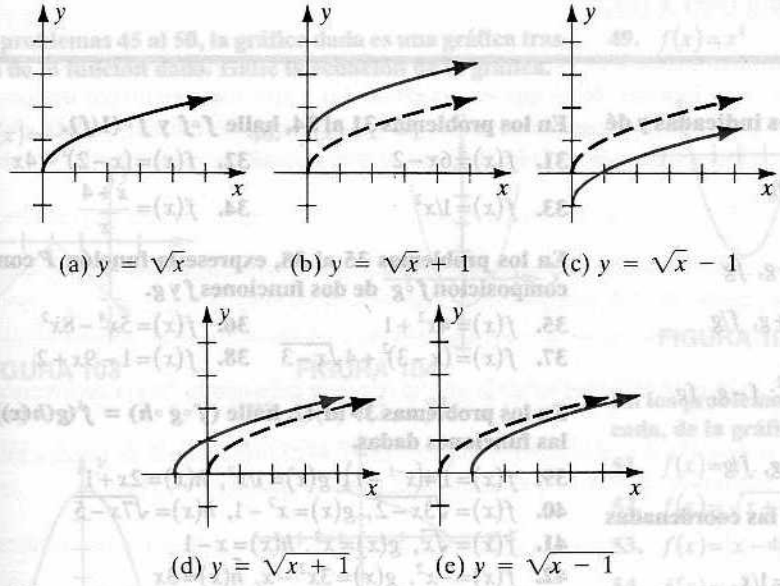


FIGURA 96

En general, la gráfica de

$$y = f(x \pm k_1) \pm k_2, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0$$

puede hallarse en la gráfica de la función $y = f(x)$ combinando una traslación horizontal y una vertical. Por ejemplo, la gráfica de $y = f(x + k_1) - k_2$ es la gráfica de $y = f(x)$ trasladada horizontalmente k_1 unidades a la izquierda y luego trasladada verticalmente k_2 unidades hacia abajo.

EJEMPLO 10

Grafique $y = \sqrt{x - 3} + 4$.

Solución. La gráfica de $y = \sqrt{x - 3} + 4$ es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ trasladada 3 unidades a la derecha y 4 unidades hacia arriba. La gráfica se da en la figura 97.

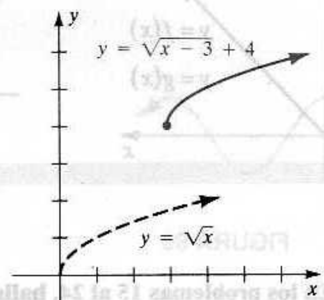


FIGURA 97

REFLEXIONES

La gráfica de $y = -f(x)$ es una **reflexión** de la gráfica de $y = f(x)$ a través del eje x. En otras palabras, para graficar $y = -f(x)$, simplemente volteamos la gráfica de $y = f(x)$.

EJEMPLO 11

Grafique $y = -\sqrt{x}$.

Solución. La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, representada como una curva con líneas interrumpidas en la figura 98, se refleja en el eje x lo que da como resultado la curva.

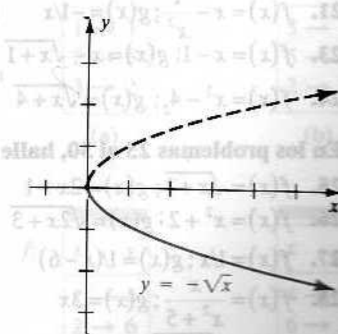


FIGURA 98

EJERCICIO 3.6

En los problemas 1 al 8, halle las funciones indicadas y dé sus dominios.

1. $f(x)=3x^2-2x+4,\ g(x)=x^2-1;\ f+g,\ fg$
2. $f(x)=x,\ g(x)=\sqrt{x-1};\ fg,\ f/g$
3. $f(x)=3x+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}},\ g(x)=3x-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}};\ f+g,\ fg$
4. $f(x)=3x^3-4x^2+5x-6,\ g(x)=(1-x)^5;\ f+g,\ f/g$
5. $f(x)=x^2-9,\ g(x)=x-3;\ fg,\ f/g$
6. $f(x)=(3x+2)^{1/2},\ g(x)=(3x+2)+(3x+2)^{1/2};\ f-g,\ fg$
7. $f(x)=\sqrt{1-x},\ g(x)=\sqrt{x+2};\ f+g,\ fg$
8. $f(x)=2\sqrt{1-x}+1,\ g(x)=\sqrt{1-9x^2}-2;\ f-g,\ f/g$

En los problemas 9 al 12, utilice la suma de las coordenadas *y* para graficar la función *f+g*.

9. $f(x)=x,\ g(x)=|x|$
10. $f(x)=|x|,\ g(x)=1/x$
11. $f(x)=x^2,\ g(x)=2x$
12. $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & \text{si } 0\le x\le 2\\ x+3 & \text{si } -2\le x\le 0\end{cases}$

En los problemas 13 y 14, utilice las gráficas de $y=f(x)$ y $y=g(x)$ dadas para graficar $y=f(x)+g(x)$.

13.

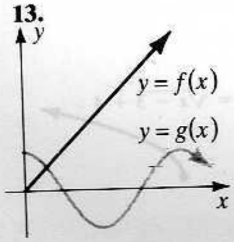


FIGURA 99

14.

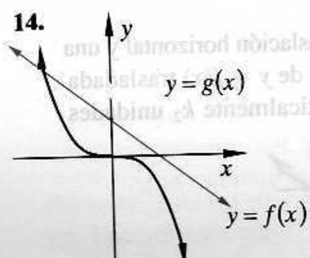


FIGURA 100

En los problemas 15 al 24, halle $f\circ g$ y $g\circ f$.

15. $f(x)=1+x^2;\ g(x)=\sqrt{x-1}$
16. $f(x)=x^2+x-5;\ g(x)=x-4$
17. $f(x)=\dfrac{2}{x-1};\ g(x)=x^2-1$
18. $f(x)=\dfrac{x+1}{x};\ g(x)=1/x$
19. $f(x)=3x-1;\ g(x)=\dfrac{x+1}{3}$
20. $f(x)=x-1;\ g(x)=x^3$
21. $f(x)=x-\dfrac{1}{x^2};\ g(x)=-1/x$
22. $f(x)=x-1;\ g(x)=x^2$
23. $f(x)=x-1;\ g(x)=x-\sqrt{x+1}$
24. $f(x)=x^3-4_2;\ g(x)=\sqrt{x+4}$

En los problemas 25 al 30, halle el dominio de $f\circ g$.

25. $f(x)=\sqrt{x+1};\ g(x)=2x+1$
26. $f(x)=x^2+2;\ g(x)=\sqrt{2x+3}$
27. $f(x)=1/x;\ g(x)=1/(x-6)$
28. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+5};\ g(x)=3x$
29. $f(x)=\sqrt{x^2-1};\ g(x)=x+1$
30. $f(x)=\dfrac{x+1}{x};\ g(x)=\sqrt{x+3}$

En los problemas 31 al 34, halle $f\circ f$ y $f\circ(1/f)$.

31. $f(x)=6x-2$
32. $f(x)=(x-2)^2-4x$
33. $f(x)=1/x^2$
34. $f(x)=\dfrac{x+4}{x}$

En los problemas 35 al 38, exprese la función *F* como una composición $f\circ g$ de dos funciones *f* y *g*.

35. $f(x)=4x^2+1$
36. $f(x)=5x^4-8x^2$
37. $f(x)=(x-3)^2+4\sqrt{x-3}$
38. $f(x)=1-|9x+2|$

En los problemas 39 al 42, halle $(f\circ g\circ h)=f(g(h(x)))$ para las funciones dadas.

39. $f(x)=1/4(x^{-1}-1),\ g(x)=1/x^2,\ h(x)=2x+1$
40. $f(x)=\sqrt{3x-2},\ g(x)=x^2-1,\ h(x)=\sqrt{7x-5}$
41. $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=x^2,\ h(x)=x-1$
42. $f(x)=-x^2,\ g(x)=3x^2-x,\ h(x)=3x$

En los problemas 43 y 44, halle las gráficas de las funciones indicadas, trasladando la gráfica de la función dada.

43.

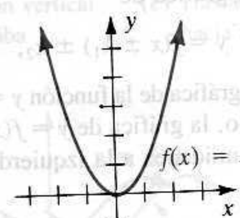


FIGURA 101

(a) $y=f(x)+1$
(b) $y=f(x)-1$
(c) $y=f(x+1)$
(d) $y=f(x-1)$

44.

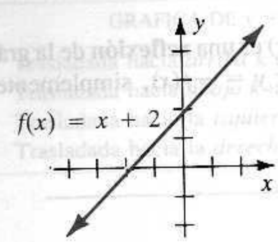


FIGURA 102

(a) $y=f(x)+2$
(b) $y=f(x)-3$
(c) $y=f(x+3)$
(d) $y=f(x)-4$

En los problemas 45 al 50, la gráfica dada es una gráfica trasladada de la función dada. Halle la ecuación de la gráfica.

45. $f(x) = -|x|$

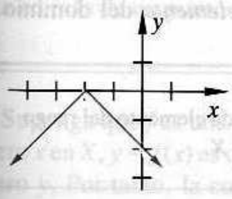


FIGURA 103

46. $f(x) = x^2 - 1$

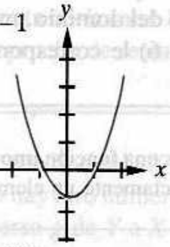


FIGURA 104

47. $f(x) = -x^2$

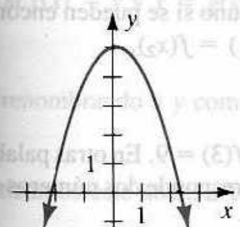


FIGURA 105

48. $f(x) = (2 - x)^{1/2}$

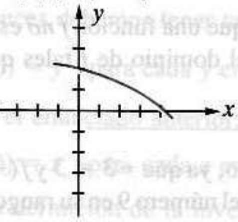


FIGURA 106

49. $f(x) = x^2$

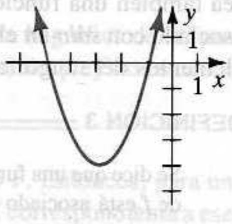


FIGURA 107

50. $f(x) = -|x|$

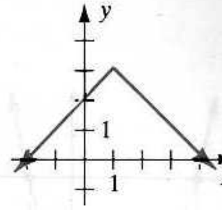


FIGURA 108

En los problemas 51 al 56, halle la gráfica de la función indicada, de la gráfica de *f*.

51. $f(x) = x^2,\ y = (x-2)^2 + 3$

52. $f(x) = \sqrt{x+1} - 4,\ y = \sqrt{x}$

53. $f(x) = |x-4| + 1,\ y = |x|$

54. $f(x) = x^3,\ y = (x-2)^3 - 2$

55. $f(x) = x^2 - 4,\ y = -(x^2 - 4)$

56. $f(x) = \sqrt{x-4},\ y = \sqrt{x}$

3.7 Funciones inversas

En esta sección trataremos la **inversa de una función.** Esta será una regla de correspondencia que "invierte" la función original. Por ejemplo, considere la función f determinada por la tabla (a). Invirtiendo las columnas, obtenemos la nueva regla de correspondencia dada en la tabla (b). Esta última regla, que es también una función, se denota como f^{-1}.

El símbolo f^{-1} se lee *"inversa de f"*. Es importante señalar que "-1" en f^{-1} *no* es un exponente; esto es,

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

sino que denota la *inversa de f*.

Ahora considere otra función f determinada por la tabla (c). Si invertimos los papeles de x y y en esta tabla, obtenemos la correspondencia dada en la tabla (d). Vemos que esta correspondencia no es una función, puesto que hay dos valores de y − a saber, los números 2 y 3− asociados con $x = 6$.

f:

x	y
1 →	3
2 →	5
3 →	2

(a)

f^{-1}:

x	y
3 →	1
5 →	2
2 →	3

(b)

f:

x	y
1 →	4
2 →	6
3 ↗	

(c)

x	y
4 →	1
6 →	2
↘	3

(d)

FUNCIONES UNO A UNO

Deseamos determinar qué propiedad debe tener una función para que la "regla de inversión" sea también una función. Note que en las tablas (a) y (b), cada elemento del rango está asociado con *sólo un* elemento del dominio, mientras que en las tablas (c) y (d), uno de los elementos del rango (a saber, 6) le correspondía a *más de un elemento* del dominio.

DEFINICION 3

> Se dice que una función f es una función **uno a uno** si y sólo si cada elemento del rango de f está asociado con exactamente un elemento de su dominio X.

Es precisamente esta propiedad la que se requiere para que la "regla de inversión" sea una función.

De la definición 3 se deduce que una función f *no* es uno a uno si se pueden encontrar diferentes elementos $x_1 \neq x_2$ en el dominio de f tales que $f(x_1) = f(x_2)$.

EJEMPLO 1

La función $f(x) = x^2$ no es uno a uno, ya que $-3 \neq 3$ y $f(-3) = f(3) = 9$. En otras palabras, la función f no es uno a uno porque el número 9 en su rango le corresponde dos números -3 y 3 en su dominio.

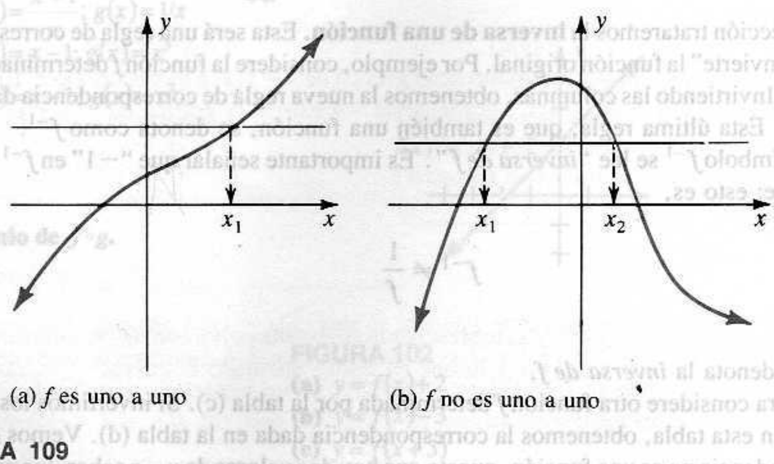
Antes de tratar de hallar la inversa de una función, debe determinar si la función dada es uno a uno. A pesar de que hay una serie de técnicas para hacerlo, trataremos a continuación sólo uno de tales métodos.

PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL

Sea $y = f(x)$ una función uno a uno, y considere su gráfica

$$\{(x, y) | y = f(x), \; x \text{ en el dominio } X \text{ de } f\}$$

Puesto que a cada valor de y le corresponde a lo más un valor de x, cualquier recta horizontal interseca la gráfica de $y = f(x)$ en a lo sumo un punto. Y, al contrario, si cada recta horizontal interseca la gráfica de una función en máximo un punto, entonces la función es uno a uno. La **prueba de la recta horizontal** se ilustra en la figura 109.



(a) f es uno a uno (b) f no es uno a uno

FIGURA 109

EJEMPLO 2

Determine si la función $f(x) = x^2 - 2x$ es uno a uno.

Solución. En la figura 110 vemos que una recta horizontal interseca la gráfica de la función x en más de un punto. Se deduce, por la prueba de recta horizontal, que f no es uno a uno.

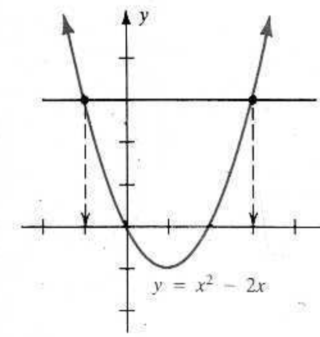


FIGURA 110

Suponga que f es una función uno a uno con dominio X y rango Y. Entonces, para un número x en X, $y = f(x)$ es un número en Y. No hay otro número x en X correspondiente a ese número y. Por tanto, la correspondencia inversa g de Y a X es una función que debe dar

$$g(f(x)) = x \quad \text{para cada } x \text{ en } X$$

Pero si $f(x) = y$ y $x = g(y)$, entonces debemos tener también

$$f(g(y)) = y \quad \text{para cada } y \text{ en } Y$$

Pero renombrando a y como x en el enunciado anterior, tenemos

$$f(g(x)) = x \quad \text{para cada } x \text{ en } Y$$

Sintetizamos este análisis con una definición de la inversa de una función f.

DEFINICION 4

Sea f una función uno a uno, con dominio X y rango Y. La **inversa de f** es una función g con dominio Y y rango X para la cual

$$f(g(x)) = x \quad \text{para cada } x \text{ en } Y$$

y

$$g(f(x)) = x \quad \text{para cada } x \text{ en } X \qquad \textbf{(16)}$$

También decimos que las funciones f y g son funciones inversas entre sí.

Como en el análisis que abrió esta sección, denotaremos la inversa de una función f uno a uno como f^{-1}. Por tanto, (16) es equivalente a

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x \qquad \textbf{(17)}$$

Estas dos ecuaciones se interpretan en la figura 111. Observe que en la figura 111(a) x es un elemento en el rango Y, mientras que en la figura 111(b) x representa un elemento en el dominio X.

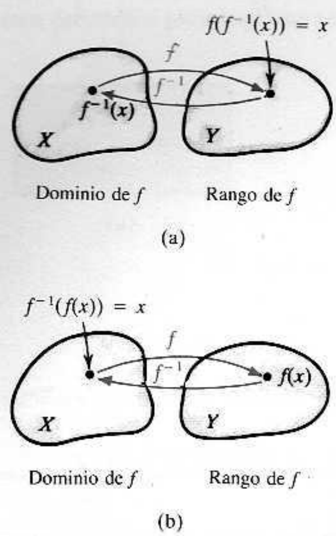


FIGURA 111

HALLAR f^{-1}

La primera de las ecuaciones en (17) es particularmente útil, ya que puede utilizarse para hallar f^{-1}. El método se sintetiza como sigue.

Hallar f^{-1}

Para hallar f^{-1} para una función uno a uno:

1. Desarrolle la composición de f y f^{-1}, esto es, $f(f^{-1}(x))$
2. Desarrolle la ecuación $f(f^{-1}(x)) = x$ y,
3. Resuelva la ecuación $f(f^{-1}(x)) = x$ para el símbolo $f^{-1}(x)$

EJEMPLO 3

Halle la inversa de la función $f(x) = 5x - 7$.

Solución. Puesto que la gráfica de $y = 5x - 7$ es una línea recta no horizontal, se deduce por la prueba de la recta horizontal que f es una función uno a uno. Para hallar f^{-1} primero reescribimos la función f como

$$f(\quad) = 5(\quad) - 7$$

de modo que

$$f(f^{-1}(x)) = 5f^{-1}(x) - 7$$

Ahora resolvemos la ecuación

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{o} \quad 5f^{-1}(x) - 7 = x$$

para $f^{-1}(x)$. El resultado es

$$f^{-1}(x) = \tfrac{1}{5}x + \tfrac{7}{5}$$

EJEMPLO 4

Halle la inversa de la función

$$f(x) = \frac{2}{x^3 + 1}$$

Solución. Dejamos que usted verifique que f es una relación uno a uno.

Ya que

$$f(\quad) = \frac{2}{(\quad)^3 + 1}$$

se deduce que

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2}{(f^{-1}(x))^3 + 1}$$

La ecuación $f(f^{-1}(x)) = x$ es equivalente a

$$\frac{2}{(f^{-1}(x))^3 + 1} = x$$

o

$$\begin{aligned} 2 &= x[(f^{-1}(x))^3 + 1] \\ 2 &= x(f^{-1}(x))^3 + x \\ 2 - x &= x(f^{-1}(x))^3 \\ (f^{-1}(x))^3 &= \frac{2 - x}{x} \end{aligned}$$

Entonces, obtenemos

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{2 - x}{x}}$$

METODO ALTERNATIVO DE HALLAR f^{-1}

La inversa de una función puede hallarse de una manera diferente de la que se mostró en los ejemplos 3 y 4. Si intercambiamos, o renombramos, las variables x y y en una función uno a uno $y = f(x)$, obtenemos entonces la ecuación $x = f(y)$. Esta ecuación determina la "regla de inversión" o función inversa. Para hallar f^{-1}, simplemente despejamos y en términos de x. Esto da la forma deseada $y = f^{-1}(x)$. El procedimiento se sintetiza como sigue.

Método alternativo de hallar f^{-1}

Para hallar f^{-1} para una función uno a uno f:

1. Intercambie las variables x y y en la ecuación $y = f(x)$, y,

2. Resuelva la ecuación resultante $x = f(y)$ para y.

EJEMPLO 5

Halle la inversa de la función f en el ejemplo 3.

Solución. En el ejemplo 3 escribimos la función dada como

$$y = 5x - 7$$

Intercambiando las variables x y y, da

$$x = 5y - 7$$

Despejando y, da como resultado

$$y = \tfrac{1}{5}x + \tfrac{7}{5}, \quad \text{o} \quad f^{-1}(x) = \tfrac{1}{5}x + \tfrac{7}{5}$$

GRAFICA DE f^{-1}

Suponga que f es una función uno a uno y que (a, b) denota cualquier punto de la gráfica de f. Entonces, $f(a) = b$, y, según (17),

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

Esto significa que el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}. Pero puesto que los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos con respecto a la recta $y = x$, concluimos que la gráfica de f^{-1} es una reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en la recta $y = x$ (véase figura 112).

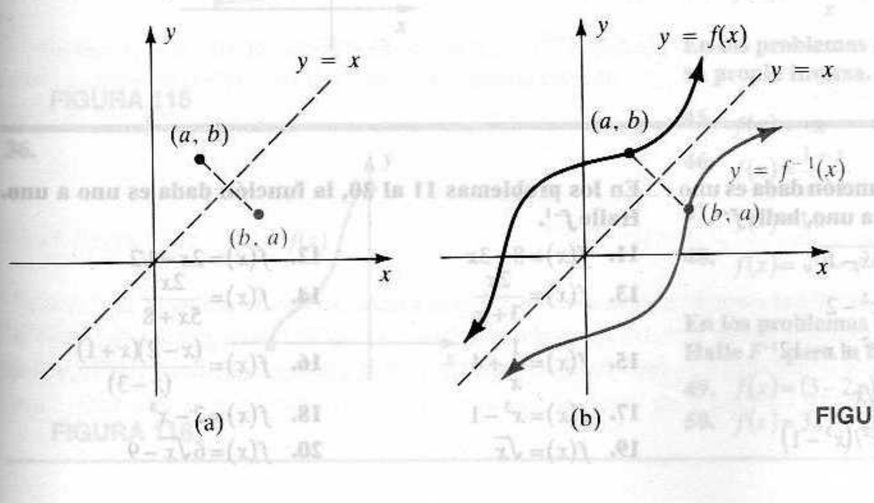


FIGURA 112

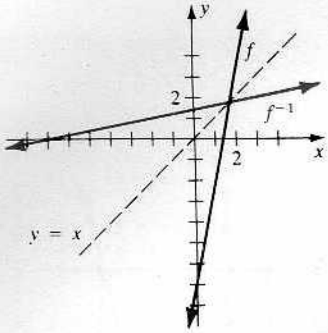


FIGURA 113

EJEMPLO 6

En el ejemplo 3 vimos que la inversa de

$$f(x) = 5x - 7 \quad \text{es} \quad f^{-1}(x) = \tfrac{1}{5}x + \tfrac{7}{5}.$$

Las gráficas de f y f^{-1} se comparan en la figura 113.

Para una función f que no sea uno a uno, puede ser posible determinar una nueva función F en una parte del dominio de f de modo que F sea uno a uno y tenga el mismo rango de f. Entonces, la función F determinada en el dominio restringido, tendrá una inversa.

EJEMPLO 7

En el ejemplo 1 vimos que $f(x) = x^2$ no es una función uno a uno. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$. Ahora, definiendo $f(x) = x^2$ solamente en $[0, \infty)$, vemos en las figuras 114(a) y (b) que F es uno a uno y, por tanto, tiene una inversa. La gráfica de F^{-1} se muestra en la figura 114(c). Observe que f y F tienen el mismo rango.

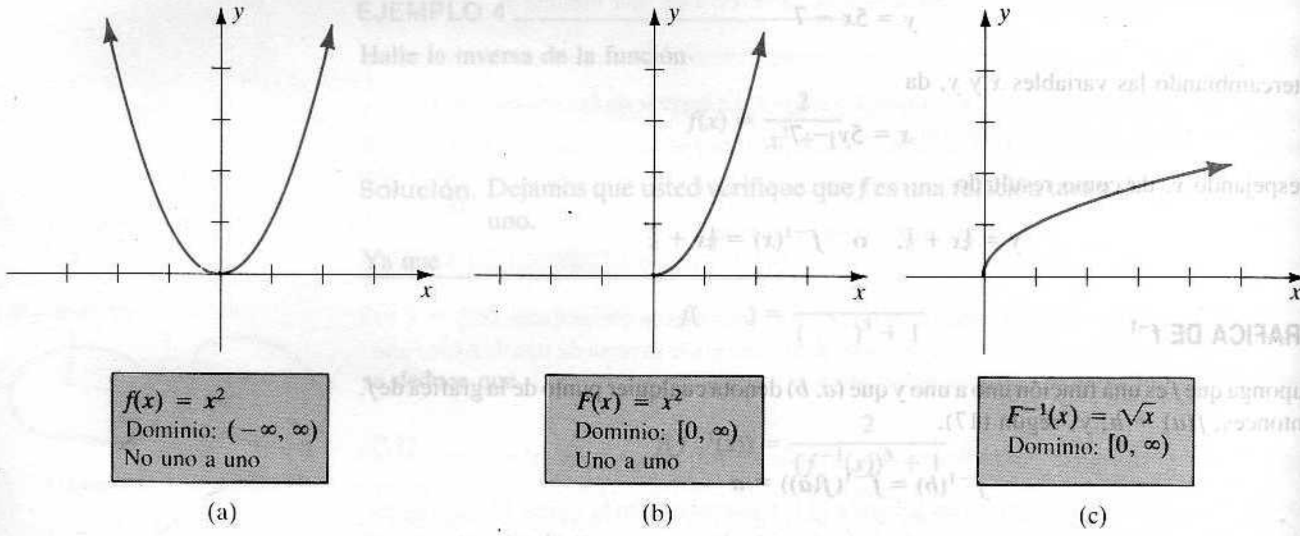


FIGURA 114

El concepto ilustrado en el ejemplo 7 se utilizará en la sección 7.9.

EJERCICIO 3.7

En los problemas 1 al 10, determine si la función dada es uno a uno, examinando su gráfica. Si f es uno a uno, halle f^{-1}.

1. $f(x) = 3x$
2. $f(x) = 3x - 1$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = x^2 - 2$
5. $f(x) = x^4$
6. $f(x) = x^2 + x - 12$
7. $f(x) = 2x^2 - x$
8. $f(x) = 2/x$
9. $f(x) = 1/(x-3)$
10. $f(x) = x^2/(x^3 - 1)$

En los problemas 11 al 20, la función dada es uno a uno. Halle f^{-1}.

11. $f(x) = 8 - 3x$
12. $f(x) = 2x - 1/2$
13. $f(x) = \dfrac{2x}{3+x}$
14. $f(x) = \dfrac{2x}{5x+8}$
15. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 4$
16. $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-3)}$
17. $f(x) = x^3 - 1$
18. $f(x) = 2 - x^3$
19. $f(x) = \sqrt{x}$
20. $f(x) = 6\sqrt{x} - 9$

En los problemas 21 al 24, verifique que las funciones dadas sean inversas entre sí.

21. $f(x)=3x-1/2,\ g(x)=x/3+1/6$

22. $f(x)=x^5+6,\ g(x)=\sqrt[5]{x-6}$

23. $f(x)=\dfrac{3-x}{2(5-x)},\ g(x)=\dfrac{3-10x}{1-2x}$

24. $f(x)=\dfrac{4x-1}{3x},\ g(x)=\dfrac{1}{4-3x}$

En los problemas 25 y 26, determine el dominio y el rango de f^{-1}, sin hallar la inversa.

25. $f(x)=\sqrt{x-3}$

26. $f(x)=3-\sqrt{2x}$

En los problemas 27 al 30, la función dada es uno a uno. Sin hallar f^{-1}, halle en el valor x indicado el punto correspondiente en la gráfica de f^{-1}.

27. $f(x)=8x-3;\ x=5$

28. $f(x)=2x^3+2x;\ x=2$

29. $f(x)=\sqrt{3x}+x;\ x=3$

30. $f(x)=\dfrac{x}{4x-1};\ x=1/4$

En los problemas 31 al 34, trace las gráficas de f y f^{-1}, utilizando los mismos ejes de coordenadas.

31. $f(x)=4x-2$

32. $f(x)=2x+2$

33. $f(x)=x^3$

34. $f(x)=\sqrt{x+2}-3$

En los problemas 35 y 36, trace la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f.

35.

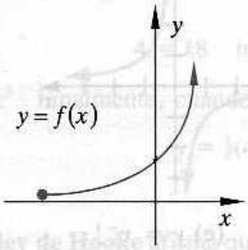


FIGURA 115

36.

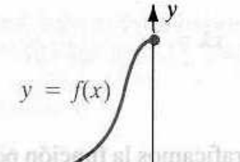


FIGURA 116

En los problemas 37 y 38, trace la gráfica de f a partir de la gráfica de f^{-1}.

37.

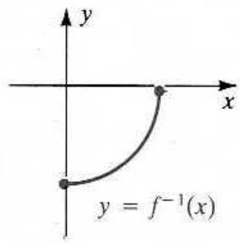


FIGURA 117

38.

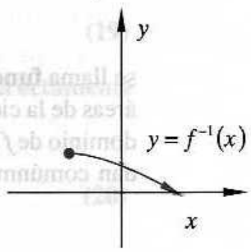


FIGURA 118

Una definición equivalente a la función uno a uno está dada por lo siguiente: La función f es uno a uno si y sólo si $f(x_1)=f(x_2)$ implica que $x_1=x_2$ para x_1 y x_2 en el dominio de f. En los problemas 39 al 44, utilice esta definición para verificar que la función sea uno a uno.

39. $f(x)=-2x+3$

40. $f(x)=\sqrt{x}$

41. $f(x)=3x-5$

42. $f(x)=\dfrac{2}{x^2+2}$

43. $f(x)=1/x$

44. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x},\ x>0$

En los problemas 45 al 48, verifique que la función dada sea su propia inversa.

45. $f(x)=-x$

46. $f(x)=\dfrac{1-x}{x+1}$

47. $f(x)=1/x$

48. $f(x)=\sqrt{9-x^2},\ 0\le x\le 3$

En los problemas 49 y 50, la función f dada no es uno a uno. Halle F^{-1} para la función F y el dominio de F^{-1}.

49. $f(x)=(3-2x)^2,(-\infty,\infty)\quad F(x)=(3-2x)^2,[3/2,\infty)$

50. $f(x)=3x^2+2,(-\infty,\infty)\quad F(x)=3x^2+2,(0,\infty)$

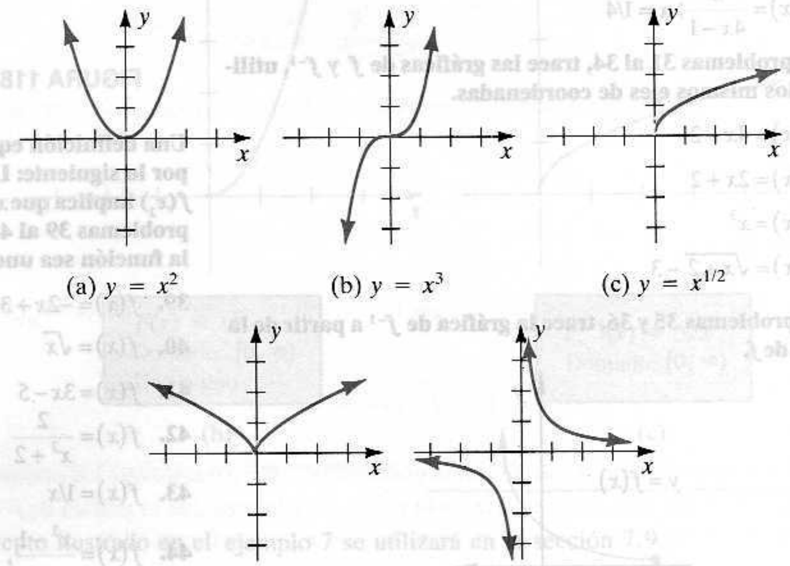
3.8 Variación

FUNCION POTENCIA

Una función de la forma

$$f(x) = kx^n, \quad k \text{ es una constante} \tag{18}$$

se llama **función potencia.** Las funciones potencia juegan un papel importante en muchas áreas de la ciencia. Puede probarse que (18) es una función para cualquier número real n; el dominio de f depende de n. La figura 119 ilustra varias funciones potencia con $k = 1$ que se dan comúnmente.



(a) $y = x^2$ (b) $y = x^3$ (c) $y = x^{1/2}$

(d) $y = x^{2/3}$ (e) $y = x^{-1}$

FIGURA 119

EJEMPLO 1

Grafique la función $f(x) = (x - 3)^{2/3}$

Solución. En el ejemplo 8 de la sección 3.5 graficamos la función potencia de $f(x) = x^{2/3}$ (Véase también figura 119(d)). La gráfica de $f(x) = (x - 3)^{2/3}$ es la gráfica de $f(x) = x^{2/3}$ trasladada 3 unidades a la derecha. El intersecto y de la gráfica es $f(0) = (-3)^{2/3} = 2.08$ (Véase figura 120).

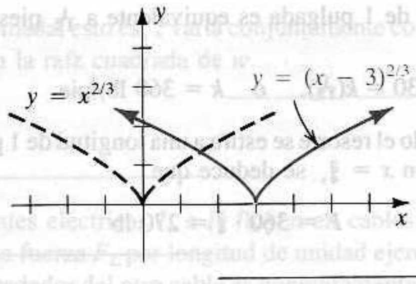


FIGURA 120

VARIACION DIRECTA E INVERSA

En las aplicaciones, una función potencia proviene de un concepto de variación. Si una variable y está dada por la fórmula

$$y = kx^n, \quad \text{donde } n > 0 \tag{19}$$

decimos que y varía directamente con la enésima potencia de x, o que y es **directamente proporcional** a x^n. Si y está dado por

$$y = \frac{k}{x^n} = kx^{-n}, \quad n > 0 \tag{20}$$

decimos que y **varía inversamente** con la enésima potencia de x, o que y es **inversamente proporcional** a x^n. En (19) y (20), k se llama **constante de proporcionalidad.**

EJEMPLO 2

Suponga que y es directamente proporcional a x^3. Si $y = 4$ cuando $x = 2$, ¿cuál es el valor de y cuando $x = 4$?

Solución. Según (19) podemos escribir

$$y = kx^3$$

Sustituyendo $y = 4$ y $x = 2$ en esta ecuación, obtenemos la constante de proporcionalidad k, puesto que

$$4 = k8 \quad \text{implica que} \quad k = \tfrac{1}{2}$$

Por tanto, $y = \frac{1}{2}x^3$. Finalmente, cuando $x = 4$, tenemos

$$y = \tfrac{1}{2}(4)^3, \quad \text{o} \quad y = 32$$

En física, la **ley de Hooke** afirma que la fuerza F requerida para mantener estirado un resorte x unidades por encima de su longitud natural (no estirado) es proporcional a la elongación x; esto es,

$$F = kx \tag{21}$$

(Véase figura 121).

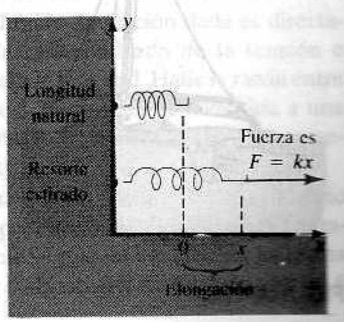


FIGURA 121

EJEMPLO 3

Un resorte cuya longitud natural es de $\frac{1}{4}$ de pie se estira 1 pulgada con una fuerza de 30 libras. ¿Qué fuerza se necesita para estirarlo a una longitud de 1 pie?

Solución. La elongación de 1 pulgada es equivalente a $\frac{1}{12}$ pies. Por tanto, según (21), tenemos

$$30 = k(\tfrac{1}{12}), \quad \text{o} \quad k = 360 \text{ lb/pie}$$

por tanto, $F = 360x$. Cuando el resorte se estira a una longitud de 1 pie, su elongación es $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ pies. Por tanto, con $x = \frac{3}{4}$, se deduce que

$$F = 360 \cdot \tfrac{3}{4} = 270 \text{ lb}$$

VARIACION CONJUNTA Y COMBINADA

Una variable puede ser directamente proporcional a los productos de potencias de varias variables. Si la variable z está dada por

$$z = kx^m y^n, \quad m > 0, \quad n > 0 \tag{22}$$

decimos que z **varía conjuntamente** con la potencia m de x y la potencia n de y, o que z es **conjuntamente proporcional** a x y y. El concepto de variación conjunta expresado en (22) puede, por supuesto, extenderse a productos de potencias de más de dos variables. A más de esto, una cantidad puede ser directamente proporcional a varias variables e inversamente proporcional a otras variables. Este tipo de variación se denomina **variación combinada.**

EJEMPLO 4

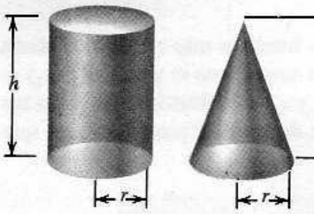


FIGURA 122

Considere el cilindro circular recto y el cono circular recto mostrados en la figura 122. El volumen V de cada uno es conjuntamente proporcional al cuadrado de su radio r y su altura h. Esto es,

$$V_{\text{cilindro}} = k_1 r^2 h \quad \text{y} \quad V_{\text{cono}} = k_2 r^2 h$$

Se produce que $k_1 = \pi$ y $k_2 = \pi/3$. Por tanto, los volúmenes son

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h \quad \text{y} \quad V_{\text{cono}} = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

EJEMPLO 5

La resistencia hidrodinámica D para un bote que se desliza a través del agua es conjuntamente proporcional a la densidad ρ del agua, el área A de la parte húmeda del casco del bote y al cuadrado de su velocidad v. Esto es,

$$D = k\rho A v^2 \tag{23}$$

(Véase figura 123).

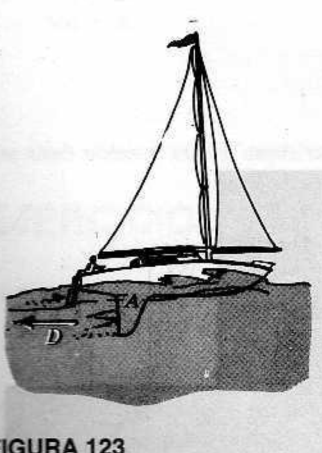


FIGURA 123

La misma relación (23) puede utilizarse algunas veces para determinar la *fuerza de arrastre* que actúa sobre un objeto que se mueve a través del aire.

EJEMPLO 6

La fórmula

$$z = k\frac{x^3 y^2}{\sqrt{w}}$$

ilustra la variación combinada; esto es, z varía conjuntamente con el cubo de x y el cuadrado de y e inversamente con la raíz cuadrada de w.

EJEMPLO 7

Suponga que las corrientes eléctricas I_1 e I_2 fluyen en cables paralelos largos, como lo muestra la figura 124. La fuerza F_L por longitud de unidad ejercida sobre un cable a causa del campo magnético alrededor del otro cable es conjuntamente proporcional a las corrientes I_1 e I_2, e inversamente proporcional a la distancia r entre los cables:

$$F_L = k\frac{I_1 I_2}{r}$$

Si las corrientes fluyen en la misma dirección, como se muestra en la figura, F_L es una fuerza atrayente. Cuando I_1 e I_2 se mueven en dirección opuesta, la fuerza F_L es una fuerza repulsiva.

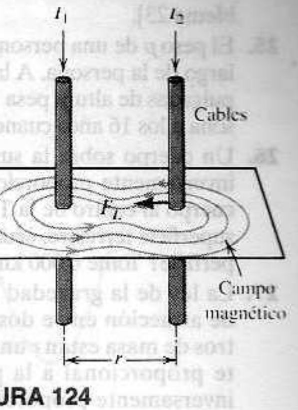


FIGURA 124

EJERCICIO 3.8

En los problemas 1 al 6, grafique la función potencia dada.

1. $f(x) = x^4$ **2.** $f(x) = -x^{-1}$ **3.** $f(x) = x^{2/3}$
4. $f(x) = x^{-3}$ **5.** $f(x) = -2x^{3/2}$ **6.** $f(x) = x^{-1/3}$

En los problemas 7 al 16, utilice las gráficas obtenidas en los problemas 1 al 6 para obtener la gráfica de la función dada.

7. $f(x) = x^4 + 2$ **8.** $f(x) = x^4 - 1$
9. $f(x) = -x^4/2$ **10.** $f(x) = (x-1)^4$
11. $f(x) = x^{2/3} + 2$ **12.** $f(x) = (x-3)^{2/3}$
13. $f(x) = (x+1)^{-1/2}$ **14.** $f(x) = 1 - x^{-3}$
15. $f(x) = (x+1)^{-1}$ **16.** $f(x) = (x-3)^{-1}$

17. Estudios empíricos indican que el periodo de vida de un mamífero en cautiverio está relacionado con el tamaño del cuerpo por medio de la función potencia

$$L(M) = (11.8)M^{0.20}$$

donde L es el periodo de vida en años y M es la masa del cuerpo en kilogramos.

(a) ¿Qué predice esta función para el periodo de vida de un elefante de 4,100 kg en un zoológico?

(b) ¿Qué predice esta función para el periodo de vida de un hombre de 95 kg recluido en una prisión?

18. La velocidad del sonido en el aire varía con la temperatura según la función potencia

$$v(T) = 33{,}145\sqrt{T/273}$$

donde v es la velocidad del sonido en centímetros por segundo y T es la temperatura del aire en grados Kelvin (273° Kelvin = 0° Celsius). ¿En qué día viaja más rápidamente el sonido de los fuegos artificiales detonadores: 4 de julio (T = 310° K) o 1o. de enero (T = 270° K)? ¿Cuánto más rápidamente?

19. Suponga que y varía directamente con el cuadrado de x. Si $y = 8$ cuando $x = 2$, ¿cuál es el valor de y cuando $x = 3$?

20. Suponga que y es directamente proporcional a la raíz cuadrada de x. Si $y = 72$ cuando $x = 6$, ¿cuál es el valor de y cuando $x = 8$?

21. Suponga que w es inversamente proporcional a la raíz cúbica de t. Si $w = 4$ cuando $t = 64$, ¿cuál es el valor de w cuando $t = 512$?

22. El tono de una cuerda vibrante de sección dada es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión e inversamente proporcional a la longitud. Halle la razón entre el tono de una cuerda de 1.20 m de largo sometida a una tensión de 50 kg y el de una cuerda de 1.05 m de largo sometida a una tensión de 32 kg.

23. La distancia s que viaja una piedra cuando cae de un edificio muy alto es directamente proporcional al cuadrado del tiempo t de viaje. Si la piedra cae 96 pies en 4 segundos, halle una fórmula que relacione s y t. ¿Hasta dónde cae la piedra en 6 segundos?

24. La velocidad v de una piedra lanzada desde un edificio muy alto varía directamente con el tiempo t de vuelo. Halle una fórmula que relacione v y t si la velocidad de la piedra al cabo de un segundo es 32 pies/s. Si la piedra se lanza desde la parte superior de un edificio que tiene 144 pies de altura, ¿cuál es la velocidad cuando toca el suelo? [*Sugerencia:* utilice el problema 23].

25. El peso p de una persona varía directamente con el cubo del largo de la persona. A la edad de 13 años una persona de 60 pulgadas de altura pesa 120 libras. ¿Cuál es el peso de la persona a los 16 años cuando mide 72 pulgadas?

26. Un cuerpo sobre la superficie de la Tierra tiene un peso inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del cuerpo al centro de la Tierra. Si un hombre pesa 80 kg en la superficie terrestre, ¿cuánto pesará a 300 km sobre dicha superficie? Tome 6,000 km como el radio de la Tierra.

27. La ley de la gravedad de Newton afirma que la fuerza F de atracción entre dos masas esféricas M y m cuyos centros de masa están r unidades separados, es conjuntamente proporcional a la primera potencia de cada masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r (véase figura 125). Exprese esta variación combinada como fórmula. Si la distancia r se reduce a la mitad, ¿entonces cuál es el efecto sobre la fuerza?

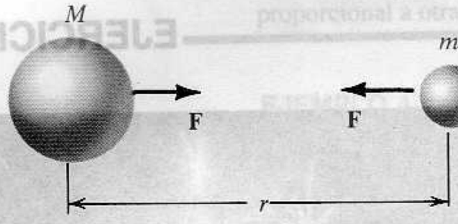


FIGURA 125

28. Según la tercera ley de Kepler del movimiento planetario, el cuadrado del período P de un planeta (esto es, el tiempo que toma un planeta en girar alrededor del Sol) es proporcional al cubo de su distancia media del Sol. El periodo de la Tierra es de 365 días y su distancia media del Sol es de 92,900,000 millas. Determine el periodo de Marte dado que su distancia media del Sol es de 142,000,000 millas.

29. Según la ley general de los gases, la presión P de una cantidad de gas es directamente proporcional a la temperatura absoluta T del gas e inversamente proporcional a su volumen V. Exprese esta variación combinada como fórmula. Un balón grande contiene 500 pies cúbicos de un gas al nivel del suelo, donde la presión es de 14.7 lb/pulg^2 y la temperatura absoluta es de 218°K (−20°C). ¿Cuál es el volumen ocupado por este gas a una altitud de 10 millas, donde la presión es de 1.5 lb/pulg^2 y la temperatura absoluta es de 218°K (−55°C)?

30. La temperatura de un tubo Pyrex se eleva de una temperatura t_1 a una temperatura final t_2. La expansión térmica e del tubo es conjuntamente proporcional a su longitud L y a la elevación de la temperatura. Cuando un tubo de 10 cm de longitud se calienta de 20°C a 420°C, su expansión térmica es de 0.012 cm. ¿Cuál es la expansión térmica del mismo tubo cuando se calienta de 20°C a 565°C?

31. El área superficial S (en metros cuadrados) de un animal es directamente proporcional a su peso p elevado a la potencia dos tercios y medido en kg. Para los humanos la constante de proporcionalidad es $k = 0.11$. Halle el área superficial de una persona cuyo peso es de 95 kg.

32. En el estudio de cuerpos elásticos, la tensión es directamente proporcional a la distensión. Para un alambre de longitud L y área transversal A que se estira en una cantidad e por medio de una fuerza aplicada F, la tensión se define como F/A y la distensión está dada por e/L. Halle una fórmula que exprese e en términos de las otras variables.

33. El calor Q (calorías) que se genera en un conductor de resistencia R (ohmios) por el que circula una corriente de intensidad I (amperios) es directamente proporcional al cuadrado de la intensidad, a la resistencia del conductor y al tiempo t durante el cual pasa la corriente. Halle una fórmula que exprese I en términos de las otras variables.

34. El paso de una cuerda vibrante de sección transversal dada es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión e inversamente proporcional a su longitud. Compare los pasos de dos cuerdas vibrantes si la primera tiene la mitad de la longitud de la segunda y está sujeta a una tensión doble.

CONCEPTOS IMPORTANTES

Sistema de coordenadas cartesiano (rectangular)
Ejes coordenados
- eje x
- eje y

Plano cartesiano
- Plano de coordenadas
- Plano xy

Cuadrantes
Punto
- coordenadas
- abscisa
- ordenada

Marcación de puntos
Gráficas
- de una relación
- de una ecuación

Intersectos
Simetría

Fórmula de la distancia
Circuferencia
Fórmula del punto medio
Pendiente
Ecuaciones de rectas
- Forma punto-pendiente
- Forma pendiente-intersecto

Recta horizontal
Recta vertical
Rectas paralelas
Rectas perpendiculares
Función
Dominio
Variable dependiente
Variable independiente
Rango
Función definida a trozos

Función constante
Prueba de la recta vertical
Función lineal
Función par
Función impar
Composición de funciones
Gráficas trasladadas
Reflexiones
Función inversa
Función uno a uno
Prueba de la recta horizontal
Función potencia
Variación directa
Variación inversa
Variación conjunta
Variación combinada

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 20, llene los espacios o responda falso o verdadero.

1. Si (a, b) es un punto del segundo cuadrante, entonces $(-a, -b)$ es un punto del ____________ cuadrante.
2. La distancia entre los puntos $(5, 1)$ y $(-1, 9)$ es ________.
3. Si la gráfica de una ecuación contiene el punto $(-3, 1)$ y es simétrica con respecto al eje x, entonces la gráfica también contiene el punto ____________.
4. Si A, B y C son puntos en el plano cartesiano, entonces siempre es verdadero que: $d(A,B) + d(B,C) > d(A,C)$. ________
5. El centro y el radio de la circunferencia $x^2+6x+y^2-2y+6=0$ son ____________.
6. Las rectas $x+3y-1=0$ y $ky-y=3$ son perpendiculares si $k =$ ____.
7. La gráfica de $x = -6$ es una ____________.
8. Los intersectos en x y en y, y la pendiente de la recta $-3y + 2x/3 = -1$ son ____________.
9. Si f es una función tal que $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. ________
10. $f(x)=(x^5+x)^3$ es una función impar. ________
11. Los intersectos en x y en y de la gráfica de la función $f(x)=-3x^2+2x+1$ son ____________.
12. La gráfica de una función puede poseer sólo un intersecto en y. ________
13. El dominio de la función $f(x)=\sqrt{2/(3-2x)}$ es ________.
14. La relación $x^2+y^2=2$ es una función ____________.
15. Una función $y=f(x)$ tiene una inversa f^{-1} si y sólo si es ____________.
16. La función $f(x) = (x^2-1)/(x^2+1)$ tiene una inversa. ________
17. La gráfica de una función diferente de la función cero no puede ser simétrica con respecto al eje x. ________
18. Las raíces de la función $f(x) = x(x^3-1)(x^2-1)$ son ________.
19. Si f es una función uno a uno con dominio el conjunto R de los números reales, entonces $f^{-1}+(f(6))=$ ____________.
20. Si p varía inversamente al cubo de q y $p = 1/3$ cuando $q = -3$, entonces $p =$ ________ cuando $q = 27$.
21. Determine si los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 4)$ y $C(4, -4)$ son vértices de un triángulo isósceles.
22. Halle una ecuación de una circunferencia cuyos puntos $(-4, 2)$ y $(6, 4)$ son los puntos extremos de un diámetro.
23. Halle una ecuación de la recta que pasa por $(3, -1)$ y es paralela a la recta $3x-2y-1=0$.
24. Halle una ecuación de la recta que pasa por $(3, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(-3, 1)$ y $(2, 4)$.
25. Considere el segmento de recta que une $(-1, 6)$ y $(1, 10)$ y el segmento de recta que une $(7, 3)$ y $(-3, -2)$. Halle una ecuación de la recta que contenga los puntos medios de estos dos segmentos de recta.
26. Según la gráfica de $y = f(x)$ mostrada en la figura 126, trace las gráficas de cada uno de los siguientes numerales:
   (a) $y=f(x)+2$ **(b)** $y=f(x+2)$ **(c)** $y+f(x)-1$
   (d) $y=f(x-1)$ **(e)** $y=f(x+1/2)$ **(f)** $y=-f(x)$

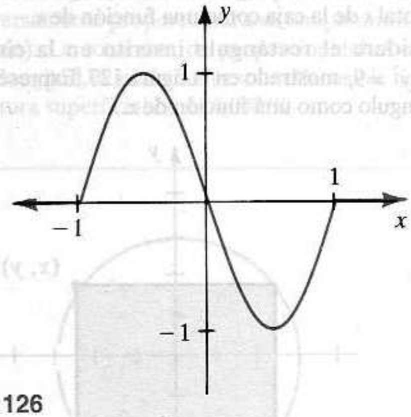


FIGURA 126

27. Halle todos los números del dominio de $f(x)=x^2+2x$ que correspondan al número 15 del rango.
28. Sea $f(x)=x$, $g(x)=|x|$ y $h(x)=[x]$* grafique las funciones (a) $=f+g$; (b) fg, y (c) $f+h$.
29. Si $f(x)=3x^2-x+6$, calcule y simplifique $\dfrac{f(x+h)-f(2)}{h}$
30. Si $f(x)=x^3-27$, evalúe y simplifique $\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$

En los problemas 31 y 32, grafique la relación dada.

31. $|y|\le x$
32. $y\le x^2-2x+1$

En los problemas 33 al 36, grafique la ecuación dada.

33. $|y|=|x|$
34. $|x|-|y|=1$
35. $x^2+y^2-9=0$
36. $y^2-x^4=0$

En los problemas 37 al 42, grafique la ecuación dada.

37. $f(x)=6-2x$
38. $f(x)=-x/5$
39. $f(x)=2x^2+1$
40. $f(x)=x^2-(x+2)$
41. $f(x)=|x-3|+|x|$
42. $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & |x|\ge 2 \\ x, & |x|<2 \end{cases}$

En los problemas 43 y 44, halle $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$, $g\circ g$, $f\circ(1/g)$ para cada una de las funciones dadas.

43. $f(x)=x^3, f(x)=2/x^2$
44. $f(x)=3x+1, g(x)=x^2+2x$

En los problemas 45 y 46, halle la inversa de la función uno a uno dada.

45. $f(x)=(x+3)/(x-3)$
46. $f(x)=3\sqrt{x-2}$

---

* $h(x) = [x]$ es la función parte entera (véase problema 61 en el ejercicio 3.5).

47. Exprese el radio r de un círculo como una función de su área A.

48. Una caja rectangular, abierta arriba, tiene una base cuadrada. Sea x la longitud de un lado de esta base. Si el volumen de la caja es de 1,200 pulgadas cúbicas, exprese el área superficial total s de la caja como una función de x.

49. Considere el rectángulo inscrito en la circunferencia $x^2+y^2=9$, mostrado en la figura 127. Exprese el área A del rectángulo como una función de x.

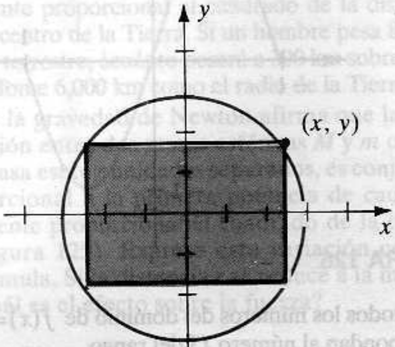


FIGURA 127

50. Considere los cuatro círculos de radio h mostrados en la figura 128. Exprese el área A de la región sombreada como una función de h.

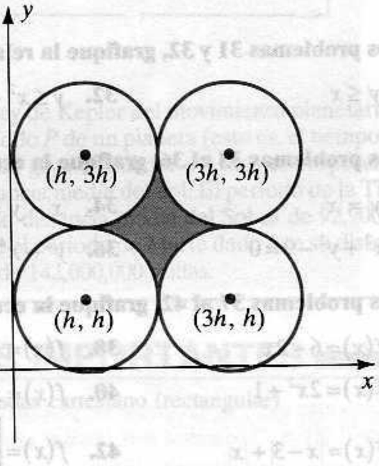


FIGURA 128

51. $f(x)=\begin{cases}1, \text{si } x \text{ es un número racional}\\ 0, \text{si } x \text{ es un número irracional,}\end{cases}$

halle lo siguiente.

(a) $f(2\sqrt{3})$ **(b)** $f(e)$
(c) $f(-2)$ **(d)** $f(3.75)$
(e) $f(-2/3)$ **(f)** $f(\pi)$

52. Complete, tomando como referencia la gráfica de la función $y=f(x)$ que se muestra en la figura 129.

$f(-3)=$ ________ $f(3.5)=$ ________

$f(-2)=$ ________ $f(2)=$ ________

$f(-1)=$ ________ $f(0)=$ ________

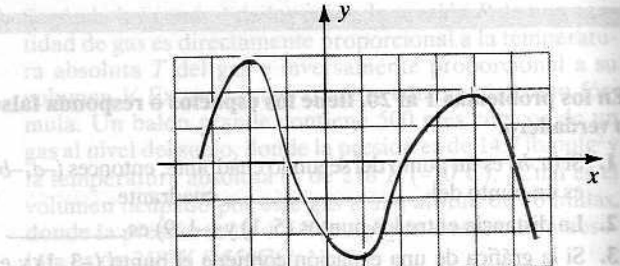


FIGURA 129

$f(5)=$ ________ $f(1/2)=$ ________

$f(-1/2)=$ ________ $f(1)=$ ________

53. Un modelo simple de formación glaciar predice que la densidad h de un pedazo de hielo a una distancia r de su centro C está dada por la función

$$h(r)=\sqrt{(2\tau_0/\rho g)(L-r)}$$

donde τ_0 es una constante llamada límite de tensión, ρ es la densidad del hielo, g es la aceleración de gravedad y $2L$ es la anchura de un corte transversal del pedazo de hielo (véase figura 130). Utilizando datos de estudios sobre glaciares en Groenlandia, tenemos que

$$\tau_0/\rho g = 11\,m \text{ y } L \approx 450{,}000\,\text{m}$$

Corte transversal de un pedazo de hielo

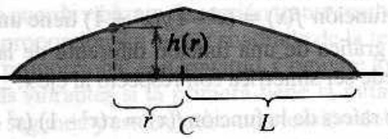


FIGURA 130

(a) ¿Cuál es el dominio de la función h?

(b) Utilice la función para predecir la densidad del pedazo de hielo de Groenlandia en su centro.

(c) ¿A qué distancia del centro se predice que el glaciar será tan denso como en el centro?

54. Kinnear y Brown (1967) presumieron que la velocidad mínima R del corazón (en latidos por segundo) de los marsupiales está dada por la función potencia

$$R(m)=106m^{-0.27}$$

donde m es la masa del cuerpo (en kilogramos).

(a) Uno de los marsupiales más pequeños es el ratón marsupial, cuya masa es aproximadamente de 19 g. Calcule la velocidad mínima de su corazón a partir de la función potencia dada (el valor observado es de 292 latidos por minuto).

(b) La velocidad observada del corazón de un canguro gris del norte de Australia es de alrededor de 47 latidos por minuto. ¿Qué indica la función Kinnear–Brown para la masa de un canguro gris? (El valor observado es de 18.7 kg).

55. Un método práctico afirma que el tono T de una campana es inversamente proporcional a la raíz cúbica de su peso p. Una campana que pesa 800 libras tiene un tono de 512 ciclos por segundo. ¿Qué tan pesada debe ser una campana similar para que produzca un tono de 256 ciclos por segundo (media C)?

56. La capacidad de carga C de una viga rectangular horizontal sostenida en ambos extremos es conjuntamente proporcional a su ancho, y el cuadrado de su altura h es inversamente proporcional a su longitud l. Exprese esta variación combinada como una fórmula.

57. En física, la ley de Wien afirma que la longitud de onda L (en metros) de la más intensa radiación proveniente de un cuerpo es inversamente proporcional a su temperatura T (en grados Kelvin). La constante de proporcionalidad es 0.00290. Halle la longitud de onda de luz amarilla visible del Sol si su temperatura superficial es de 6,000°K.

4

Funciones polinomiales y racionales

l Friedrich Gauss

El siguiente problema mantuvo perplejos a los matemáticos durante siglos. Para un *polinomio* general $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ de grado n halle una fórmula o un procedimiento que incluya sólo un número finito de operaciones aritméticas y extracción de raíces, que exprese los ceros del polinomio en términos de sus coeficientes. Vimos en el capítulo 2 que en el caso de un polinomio de segundo grado ($n = 2$) o *cuadrático*, los ceros de $f(x)$ se expresan en términos de los coeficientes por medio de la fórmula cuadrática. El problema para polinomios de tercer grado ($n = 3$) se resolvió en el siglo XVI a través del trabajo pionero del matemático italiano Nicolo Fontana (1499-1557), también conocido como Tartaglia, el Tartamudo.

Alrededor de 1540, otro matemático italiano, Lodovico Farrari (1522-1565), descubrió primero una fórmula algebraica para determinar los ceros de polinomios de cuarto grado ($n = 4$). Pero en los siguientes 284 años nadie descubrió ninguna fórmula para los ceros de polinomios generales de grados $n = 5$, $n = 6$,... Por una buena razón: en 1824, a la edad de 22 años, el matemático noruego Neils Henrik Abel (1802-1829) probó que era imposible hallar tales fórmulas para los ceros de todos los polinomios generales de grados $n \geq 5$ en términos de sus coeficientes. A través de los años se asumió, pero no se probó, que un polinomio $f(x)$ de grado n tenía *a lo sumo* n ceros. Fue un logro verdaderamente sobresaliente que el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) probara en 1799 que todos los polinomios $f(x)$ de grado n tenían *exactamente* n ceros. Como lo veremos en este capítulo, estos ceros pueden ser números reales o complejos.

4.1 Funciones cuadráticas

Funciones polinomiales

En el capítulo 3 graficamos funciones tales como $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 5x^2 - 4$, y $h(x) = x^3$. Estas funciones, en las cuales la variable de cada término se eleva a una potencia entera no negativa, son ejemplos de **funciones polinomiales.** En general, tenemos la siguiente definición:

DEFINICION 1

Una función f se llama **función polinomial** si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes reales y n es un entero no negativo.

Si $a_n \neq 0$, decimos entonces que una función polinomial f tiene **grado** n. El número a_n se denomina **coeficiente principal** del polinomio.

FUNCIONES CUADRATICAS

Para $n = 0$ y $n = 1$ tenemos, respectivamente,

$$f(x) = a_0, \quad \text{una } \textbf{función constante}$$

$$f(x) = a_1 x + a_0, \quad \text{una } \textbf{función lineal}$$

Una función polinomial de grado $n = 2$,

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

se llama **función cuadrática.** Por simplificar escribimos la forma general de una función cuadrática f como

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0 \tag{1}$$

La gráfica de una función cuadrática se denomina **parábola.** Se puede demostrar que todas las funciones cuadráticas tienen una gráfica de forma similar a la gráfica de $f(x) = x^2$. Si $a > 0$ en (1), la parábola se abrirá hacia arriba como en la figura 1(a), mientras que si $a < 0$ en (1) la parábola se abrirá hacia abajo como en la figura 1(b).

En el caso del polinomio cuadrático de término único $f(x) = ax^2$, las gráficas de $f(x) = ax^2$, $a > 0$, y $f(x) = -ax^2$, $a > 0$ son simples reflexiones una de otra a través del eje x (véase figura 2).

EJEMPLO 1

Grafique $f(x) = -x^2 + 4$.

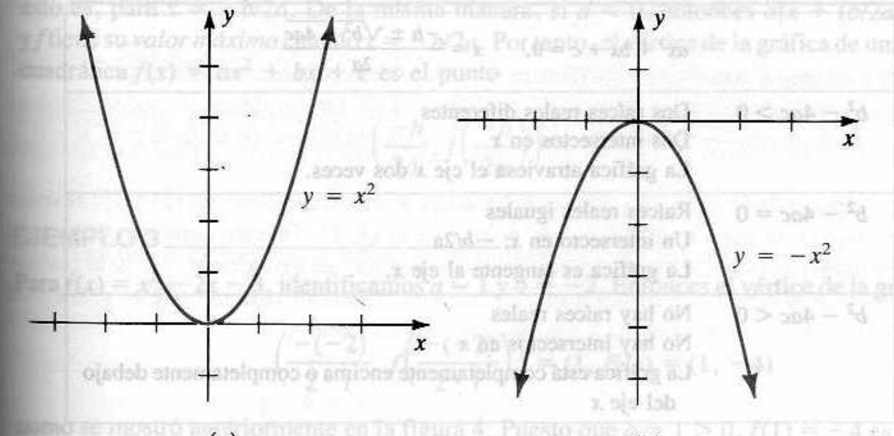


FIGURA 1

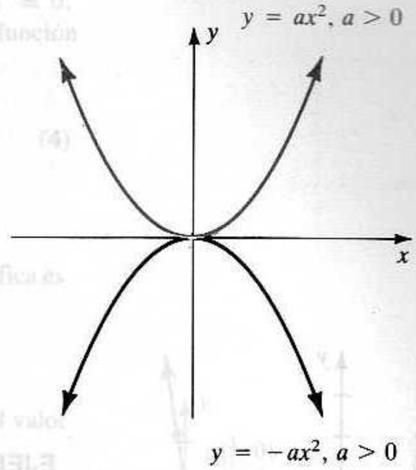


FIGURA 2

EJEMPLO 1

Gráfica $f(x) = -x^2 + 4$.

Solución. Por la sección 3.6 sabemos que la gráfica de $f(x)$ es la gráfica de $y = -x^2$ trasladada 4 unidades hacia arriba. En la figura 3 observe que el intersecto y es $f(0) = 4$ y los intersectos en x son -2 y 2 (las respuestas de la ecuación $f(x) = 0$ o $-x^2 + 4 = 0$).

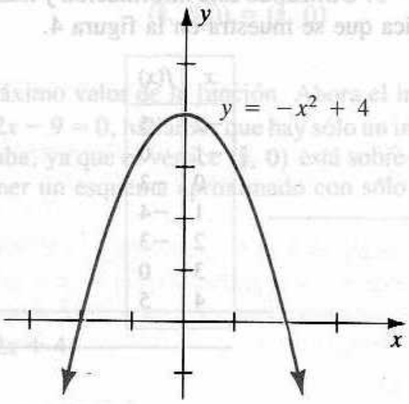


FIGURA 3

INTERSECTOS

El intersecto en y para la gráfica (1) es el valor $f(0) = c$. Para determinar si la gráfica tiene **intersectos en x**, debemos hallar cualquier raíz real de $f(x)$. Esto es, debemos hallar las soluciones reales, o raíces, de la ecuación $f(x) = 0$ ó

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

Aplicando a (2) la fórmula cuadrática, podemos ver que la gráfica de una función cuadrática puede o no tener intersectos en x. La tabla de la página siguiente sintetiza las 3 posibilidades.

$ax^2 + bx + c = 0, \quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
$b^2 - 4ac > 0$	Dos raíces reales diferentes Dos intersectos en x La gráfica atraviesa el eje x dos veces.
$b^2 - 4ac = 0$	Raíces reales iguales Un intersecto en x: $-b/2a$ La gráfica es tangente al eje x.
$b^2 - 4ac < 0$	No hay raíces reales No hay intersectos en x La gráfica está completamente encima o completamente debajo del eje x

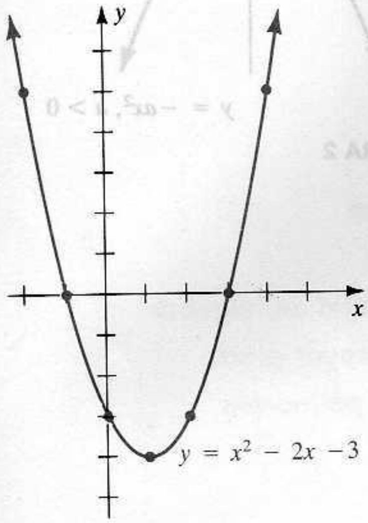


FIGURA 4

EJEMPLO 2

Grafique $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Solución. Puesto que f es una función cuadrática con $a = 1 > 0$, sabemos que la gráfica será una parábola que se abre hacia arriba. El intersecto en y es $f(0) = -3$. Para hallar los intersectos en x, resolvemos

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

o

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

y hallamos que $x = -1$ ó $x = 3$. Utilizando esta información y marcando puntos de la tabla adjunta, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 4.

x	$f(x)$
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5

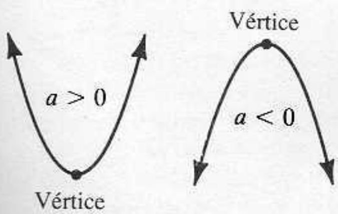


FIGURA 5

VERTICE

Si la gráfica de una función cuadrática se abre hacia arriba (abajo), el punto más *bajo (más alto)* sobre la parábola se llama **vértice** (véase figura 5).

En el ejemplo 2 *parece* que el vértice de la parábola está localizado en $(1, -4)$. El poder localizar el vértice de una parábola con precisión sería una ayuda considerable al graficar una función cuadrática. Para hacerlo, consideramos lo siguiente: completando el cuadrado en la expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$, podemos escribir

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

como

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \tag{3}$$

Vemos que, sin importar qué valor sustituye a x en (3), el término $(4ac - b^2)/4a$ no se altera. Por tanto el primer término $a[x + (b/2a)]^2$, determina la magnitud relativa de los valores funcionales $f(x)$. Si $a > 0$, entonces $a[x + (b/2a)]^2 \geq 0$. Se deduce que $f(x)$ tiene su *valor mínimo* cuando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

esto es, para $x = -b/2a$. De la misma manera, si $a < 0$, entonces $a[x + (b/2a)]^2 \leq 0$, y f tiene su *valor máximo* cuando $x = -b/2a$. Por tanto, el vértice de la gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es el punto

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) \qquad \textbf{(4)}$$

EJEMPLO 3

Para $f(x) = x^2 - 2x - 3$, identificamos $a = 1$ y $b = -2$. Entonces el vértice de la gráfica es

$$\left(\frac{-(-2)}{2 \cdot 1}, f\left(\frac{-(-2)}{2 \cdot 1}\right)\right) = (1, f(1)) = (1, -4)$$

como se mostró anteriormente en la figura 4. Puesto que $a = 1 > 0$, $f(1) = -4$ es el valor mínimo de la función.

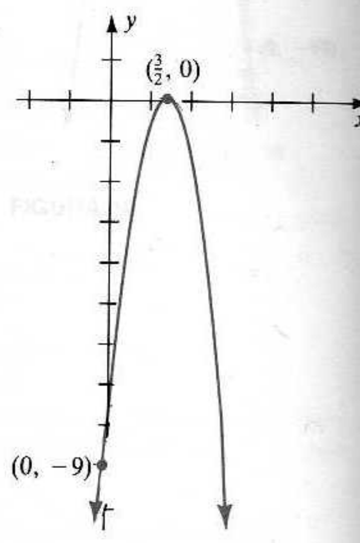
EJEMPLO 4

Grafique $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$.

Solución. La gráfica de esta función cuadrática es una parábola que se abre hacia abajo, ya que $a = -4 < 0$. Identificando $a = -4$ y $b = 12$, vemos a partir de (4) que el vértice es

$$(\tfrac{3}{2}, f(\tfrac{3}{2})) = (\tfrac{3}{2}, 0)$$

y que $f(\frac{3}{2}) = 0$ es el máximo valor de la función. Ahora el intersecto en y es $f(0) = -9$. Resolviendo $-4x^2 + 12x - 9 = 0$, hallamos que hay sólo un intersecto en x, a saber, $\frac{3}{2}$. Por supuesto, esto se esperaba, ya que el vértice $(\frac{3}{2}, 0)$ está sobre el eje x. Como lo muestra la figura 6 se puede obtener un esquema aproximado con sólo estos dos puntos.



$y = -4x^2 + 12x - 9$

FIGURA 6

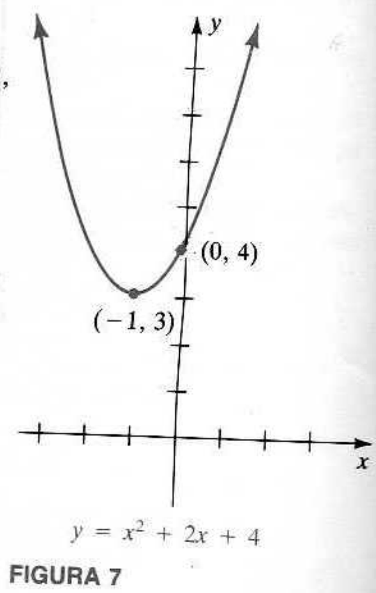
EJEMPLO 5

Grafique $f(x) = x^2 + 2x + 4$.

Solución. La gráfica es una parábola que se abre hacia arriba. Identificando $a = 1$ y $b = 2$, vemos que el vértice es

$$\left(\frac{-2}{2 \cdot 1}, f\left(\frac{-2}{2 \cdot 1}\right)\right) = (-1, 3)$$

El intersecto en y es $f(0) = 4$. Resolviendo $x^2 + 2x + 4 = 0$, no encontramos soluciones reales. Por tanto, la gráfica no tiene intersectos en x. Puesto que el vértice está por encima del eje x, la gráfica debe localizarse por completo encima del eje x (véase figura 7).



$y = x^2 + 2x + 4$

FIGURA 7

TRASLACION DE GRAFICAS

En el ejemplo 1 vimos que la gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + c$ puede obtenerse de la gráfica de $y = ax^2$ por medio de una traslación vertical. Completando el cuadrado, podemos escribir $f(x) = ax^2 + bx + c$, $b \neq 0$, como

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \tag{5}$$

La gráfica de esta ecuación es la gráfica de $y = ax^2$ trasladada horizontalmente $|h|$ unidades y luego trasladada verticalmente $|k|$ unidades. (Utilizamos signos de valor absoluto debido a que h y k pueden ser negativos). La figura 8 ilustra el caso en el que $a > 0$, $h > 0$, y $k > 0$.

Un examen de la figura 8 y una comparación de las ecuaciones en (3) y (5) revelan que el vértice de la gráfica de $f(x) = a(x - h)^2 + k$ es (h, k). De esta manera, obtenemos las coordenadas del vértice directamente; no hay necesidad de memorizar $-b/2a$ ni tampoco de calcular la función cuadrática en este número. Observe también que la gráfica de $f(x) = a(x - h)^2 + k$ es simétrica con respecto a la línea $x = h$.

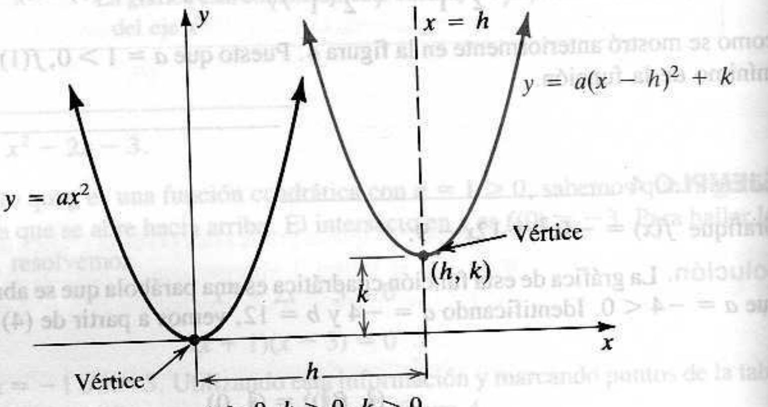


FIGURA 8 $a > 0, h > 0, k > 0$

EJEMPLO 6

Compare las gráficas de (a) $f(x) = (x - 2)^2$ y (b) $f(x) = (x + 3)^2$.

Solución

(a) La gráfica punteada de la figura 9 es la gráfica de $y = x^2$. Trasladando esta gráfica 2 unidades a la derecha, obtenemos la gráfica de $f(x) = (x - 2)^2$. La gráfica se muestra a color. Observe en la figura y en las identidades $h = 2$ y $k = 0$ que el vértice de la gráfica es (2, 0).

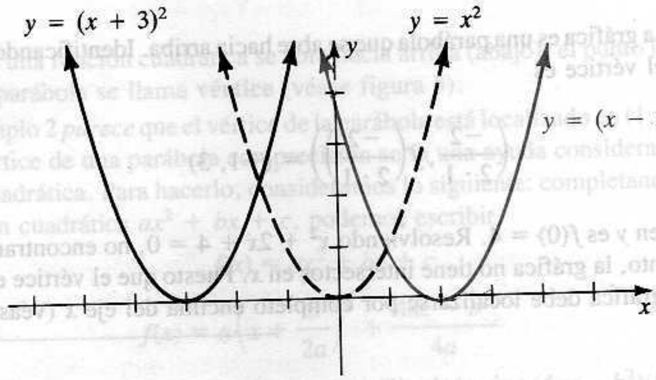


FIGURA 9

(b) La gráfica de $f(x) = (x + 3)^2$ se obtiene trasladando la gráfica de $y = x^2$ hacia la izquierda, tres unidades. Esta es la gráfica que aparece en negro en la figura 9. A partir de la ecuación, vemos que $h = -3$ y $k = 0$. Por tanto, el vértice es $(-3, 0)$.

EJEMPLO 7

Grafique $f(x) = -x^2 - 7x - 10$.

Solución. Primero completamos el cuadrado. Para hacerlo, factorizamos -1 a partir de los términos que incluyen x, de modo que el coeficiente de x^2 sea (véase página 80).

$$f(x) = -(x^2 + 7x \qquad) - 10$$

Sumando $\frac{49}{4}$, el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, dentro del paréntesis, le estamos sumando en realidad $-\frac{49}{4}$ a la expresión. Por tanto, compensamos sumando $\frac{49}{4}$ por fuera del paréntesis:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 + 7x + \tfrac{49}{4}) - 10 + \tfrac{49}{4} \\ &= -(x + \tfrac{7}{2})^2 + \tfrac{9}{4} \end{aligned}$$

En esta última ecuación vemos que $h = -\frac{7}{2}$ y $k = \frac{9}{4}$. El vértice de la gráfica es entonces $(-\frac{7}{2}, \frac{9}{4})$, y la gráfica es $y = -x^2$ trasladada $\frac{7}{2}$ unidades a la izquierda y $\frac{9}{4}$ unidades hacia arriba.

Sólo con esta información, podríamos fácilmente trazar una gráfica aproximada. Sin embargo, es siempre buena idea, que revisemos los intersectos. El intersecto en y es $f(0) = -10$. Para hallar los intersectos en x, resolvemos

$$-x^2 - 7x - 10 = 0, \quad \text{o} \quad (x + 5)(x + 2) = 0$$

Los intersectos en x son -5 y -2. Utilizando los cuatro puntos $(-\frac{7}{2}, \frac{9}{4})$, $(0, -10)$, $(-5, 0)$ y $(-2, 0)$, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 10.

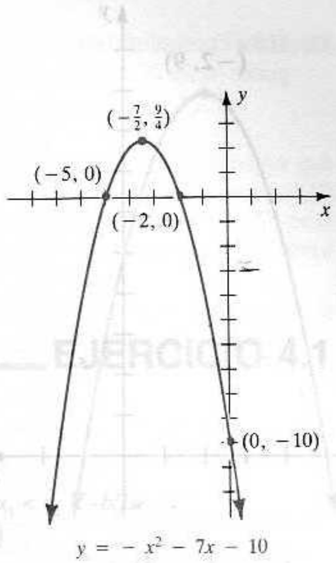


FIGURA 10

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

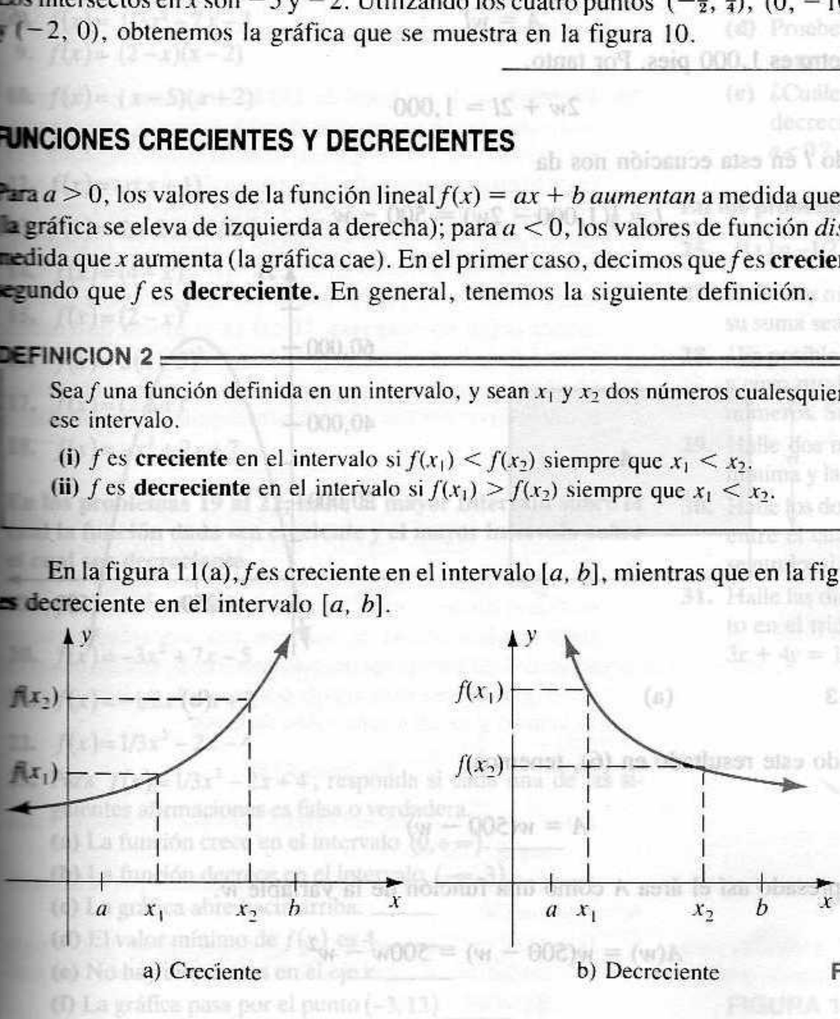
Para $a > 0$, los valores de la función lineal $f(x) = ax + b$ *aumentan* a medida que x aumenta (la gráfica se eleva de izquierda a derecha); para $a < 0$, los valores de función *disminuyen* a medida que x aumenta (la gráfica cae). En el primer caso, decimos que f es **creciente**, y en el segundo que f es **decreciente.** En general, tenemos la siguiente definición.

DEFINICION 2

Sea f una función definida en un intervalo, y sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en ese intervalo.

(i) f es **creciente** en el intervalo si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.
(ii) f es **decreciente** en el intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

En la figura 11(a), f es creciente en el intervalo $[a, b]$, mientras que en la figura 11(b), f es decreciente en el intervalo $[a, b]$.



a) Creciente b) Decreciente FIGURA 11

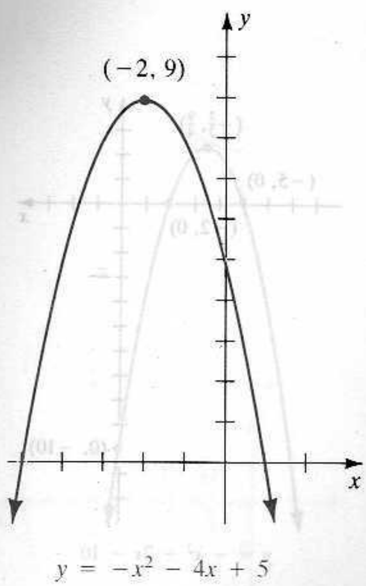


FIGURA 12

EJEMPLO 8

Halle el mayor intervalo sobre el cual la función $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ sea creciente y el mayor intervalo en el cual sea decreciente.

Solución. La gráfica de la función es una parábola que se abre hacia abajo con vértice en $(-2, 9)$ (verifique esto). Como lo muestra la figura 12, la función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2]$, y decreciente en el intervalo $[-2, \infty)$.

Muchos fenómenos diversos de la ciencia, ingeniería y comercio pueden describirse por medio de las funciones cuadráticas. Es necesario a menudo hallar el máximo o mínimo valor de tal función.

EJEMPLO 9

Un ganadero desea construir un corral rectangular con 1,000 pies de cercado. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del corral para que el área cercada sea máxima?

Solución. Como se muestra en la figura 13(a), designamos la anchura y la longitud del corral como w y l, respectivamente. El área está dada por

$$A = wl \tag{6}$$

y el perímetro es 1,000 pies. Por tanto,

$$2w + 2l = 1{,}000$$

Despejando l en esta ecuación nos da

$$l = \tfrac{1}{2}(1{,}000 - 2w) = 500 - w$$

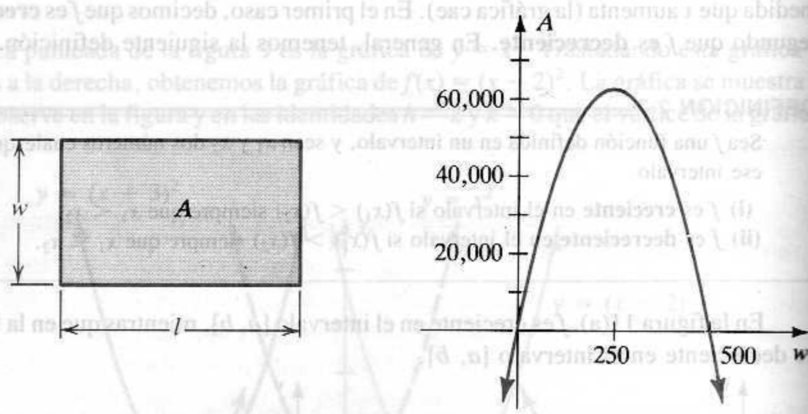


FIGURA 13 (a) (b)

Sustituyendo este resultado en (6), tenemos

$$A = w(500 - w)$$

Hemos expresado así el área A como una función de la variable w.

$$A(w) = w(500 - w) = 500w - w^2$$

Esta función se grafica en la figura 13(b).

Puesto que la parábola se abre hacia abajo, el valor máximo de A se da en el vértice. Utilizando (4) con $b = 500$ y $a = -1$, o completando el cuadrado, encontramos que el vértice está en $w = 250$. Puesto que la longitud correspondiente es

$$l = 500 - 250$$

las dimensiones deseadas son 250 pies por 250 pies.

EJERCICIO 4.1

En los problemas 1 al 6, grafique la función dada.

1. $f(x) = 4x^2$ **2.** $f(x) = -4x^2$

3. $f(x) = 4x^2 - 4$ **4.** $f(x) = 4x^2 + 5$

5. $f(x) = -4x^2 + 1$ **6.** $f(x) = -4x^2 - 4$

En los problemas 7 al 18, grafique la función dada. Halle el vértice de la parábola y los intersectos.

7. $f(x) = x^2 - 2x$

8. $f(x) = 1/3x^2 - 2x - 1$

9. $f(x) = (2 - x)(x - 2)$

10. $f(x) = (x - 5)(x + 2)$

11. $f(x) = 1/2x + x - 1$

12. $f(x) = x(x + 1)$

13. $f(x) = 2 + 2x - 1/3x^2$

14. $f(x) = (4 - x)^2$

15. $f(x) = (2 - x)^2$

16. $f(x) = 2(x + 3)^2$

17. $f(x) = (2 + x)^2$

18. $f(x) = -x^2 + 2x + 7$

En los problemas 19 al 22, halle el mayor intervalo sobre el cual la función dada sea creciente y el mayor intervalo sobre el cual sea decreciente.

19. $f(x) = 5x^2 - 8x + 2$

20. $f(x) = -3x^2 + 7x - 5$

21. $f(x) = -1/2x^2 - x + 2$

22. $f(x) = 1/3x^2 - 2x - 4$

23. Para $f(x) = 1/3x^2 - 2x + 4$, responda si cada una de las siguientes afirmaciones es falsa o verdadera.

(a) La función crece en el intervalo $(0, +\infty)$. ______

(b) La función decrece en el intervalo $(-\infty, 3)$. ______

(c) La gráfica abre hacia arriba. ______

(d) El valor mínimo de $f(x)$ es 4. ______

(e) No hay intersectos en el eje x. ______

(f) La gráfica pasa por el punto $(-3, 13)$ ______

24. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(a) Pruebe que si $a > 0$ y $x_1 < x_2 < -b/2a$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$

(b) Pruebe que si $a > 0$ y $-b/2a < x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$

(c) Pruebe que si $a < 0$ y $x_1 < x_2 < -b/2a$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$

(d) Pruebe que si $a < 0$ y $-b/2a < x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$

(e) ¿Cuáles son los intervalos máximos de crecimiento y decrecimiento de la función cuando $a > 0$ y cuando $a < 0$?

En los problemas 25 y 26, halle el valor máximo de $f(x)$.

25. $f(x) = -1/2x^4 + 3x^2 + 1$ **26.** $f(x) = -1/3x + 2\sqrt{x} + 5$

27. Halle dos números reales tales que su producto sea máximo y su suma sea 8.

28. ¿Es posible hallar dos números reales cuya diferencia sea 20 y cuyo producto sea máximo?, ¿mínimo? Si es así, halle los números. Si no, explique.

29. Halle dos números tales que la suma de sus cuadrados sea mínima y la suma de ellos sea 20.

30. Halle los dos números reales que hacen máxima la diferencia entre el cuadrado del primero y el duplo del cuadrado del segundo, si la suma de los números es 6.

31. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en el triángulo que forman los ejes cartesianos y la recta $3x + 4y = 12$ (véase figura 14).

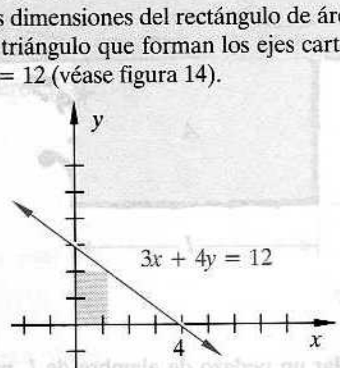


FIGURA 14

32. Halle el punto de la recta $y = 3x + 1$ que está más cercano al punto (6, 0). ¿Cuál es la distancia mínima? (véase figura 15.)

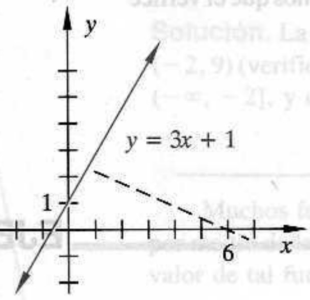


FIGURA 15

33. Considere la gráfica mostrada en la figura 16. Halle los puntos de ambas gráficas que hacen máxima su distancia vertical para $1 \le x \le 8$. ¿Cuál es la distancia vertical máxima?

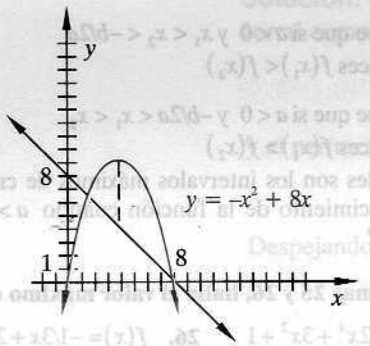


FIGURA 16

34. Un ranchero desea cercar un corral rectangular a lo largo de una corriente recta como muestra la figura 17. Si la longitud total de cerca disponible es de 3,500 pies, halle las dimensiones del área máxima del corral.

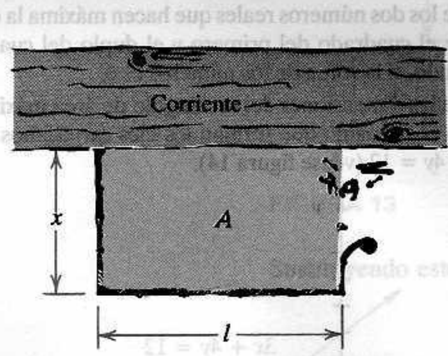


FIGURA 17

35. Se debe doblar un pedazo de alambre de L pulgadas para formar un rectángulo. Demuestre que el rectángulo que tiene la mayor área A es el cuadrado.

36. Suponga que se lanza una pelota que viaja de acuerdo con la ecuación

$$S(t) = -16t^2 + 128t$$

donde $S(t)$ mide la altura de la pelota (en pies) sobre el suelo al cabo de t segundos de ser lanzada. ¿Cuántos segundos tarda la pelota para alcanzar su máxima altura? ¿Cuál es esa máxima altura?

37. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo encima, como se muestra en la figura 18. Determine las dimensiones de área máxima que tiene como perímetro 12 pies y halle esa área máxima.

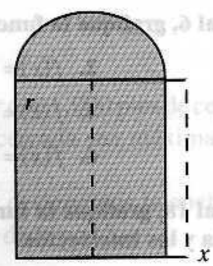


FIGURA 18

38. La gerencia de un hotel de 150 habitaciones ha determinado que con un precio diario por habitación, con el servicio incluido, de US\$850, todas se mantienen ocupadas. Por cada habitación ocupada ellos pagan diariamente por concepto de impuestos y servicio aproximadamente US\$350 y deben pagar por las desocupadas US\$200 por impuestos. Un estudio de mercado determinó que por cada US\$50 de incremento en el precio diario por habitación, 4 habitaciones dejan de ocuparse. ¿Cuál es el precio que deben cobrar para maximizar su ganancia diaria?

39. Un fabricante determina que el ingreso R obtenido por la producción y venta de x artículos está dado por la función

$$R(x) = 350x - 0.25x^2$$

Determine cuántos artículos deben fabricarse y venderse para obtener un máximo ingreso y cuál es el ingreso máximo.

40. Se llama función demanda para un artículo dado a la forma en que el precio por unidad de ese artículo "P" está relacionado con la cantidad de unidades x de ese artículo que se venden. Una fábrica de latas de puré de tomate ha determinado que la función demanda por una caja de latas de puré de tomate si vende x cajas viene dada por

$$P(x) = -x + 160$$

(a) ¿Cuántas cajas deberá vender para que el precio por caja sea de US\$140?

(b) ¿Cuál será el ingreso que recibe la fábrica por la venta de x cajas?

(c) ¿Cuál será la cantidad de cajas que deben vender para maximizar su ingreso, y cuál será el precio por caja para lograrlo?

41. Se sabe que la ganancia de una compañía viene dada por la diferencia de ingreso y costo. Si en el problema 40 la gerencia de la fábrica conoce que el costo c de producir x cajas de latas de puré de tomate está dado por

$$C(x) = 40x + 10$$

determine el precio por caja que maximizará la ganancia de la fábrica. ¿Cuántas cajas deberán venderse?

42. Dentro de un lote rectangular de 120 pies de largo y 80 pies de ancho se debe construir un jardín rodeado por un sendero de anchura uniforme x. Exprese el área A del jardín como una función de x. ¿Qué ancho debe tener el sendero para que el jardín tenga un área de 5,200 pies^2?

43. Un modelo para la expansión de epidemias supone que la velocidad a la cual se propaga una enfermedad es conjuntamente proporcional al número de personas que ya tienen la enfermedad y al número de gente no infectada aún (esto es razonable, ya que si nadie la tiene no hay expansión de ésta, y si todos la tienen, entonces no puede expandirse más). Matemáticamente, el modelo está dado por la función cuadrática

$$R(D) = kD(P - D)$$

donde k es una constante de proporcionalidad mayor que cero que depende de la población, enfermedad, etc.; $R(D)$ es la velocidad de expansión (en casos por día), P es la población total y D es el número de personas que llevan la enfermedad.

(a) Si la población P es constante, determine la parte de la población que estará enferma para que la velocidad de expansión de la enfermedad sea máxima y note que esto no depende de R.

(b) Suponga que en una ciudad de 20,000 personas, 275 personas están enfermas el domingo y se reportan 57 nuevos casos el lunes. Calcule la constante k.

(c) Calcule la cantidad de nuevos casos que habrá el martes, miércoles, jueves, viernes y sábado. ¿Cuál será el total de casos que habrá al comenzar el domingo siguiente?

4.2 División de polinomios

Hay un método para dividir polinomios similar a la división larga de dos enteros positivos. Como repaso, examinamos la división 1,052 por 23.

$$\begin{array}{rl} & \underline{45} \leftarrow \text{Cociente} \\ \text{Divisor} \rightarrow 23 & \overline{)1,052} \leftarrow \text{dividendo} \\ & \underline{92} \\ & 132 \\ & \underline{115} \\ & 17 \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

Escribimos el resultado de esta división, como

$$\frac{1052}{23} = 45 + \frac{17}{23}$$

o, multiplicando ambos lados de la ecuación por 23, podemos escribir

$$1{,}052 = (23 \times 45) + 17$$

Observe que la última ecuación proporciona una prueba de la división. Esto es, el divisor (23) multiplicado por el cociente (45) más el residuo (17) es igual al dividendo (1,052).

Ahora considere la división del polinomio $3x^3 - x^2 - 2x + 6$ por $x^2 + 1$.

$$\begin{array}{rl}
 & \underline{3x - 1} \quad \leftarrow \text{Cociente} \\
\text{Divisor} \rightarrow x^2 + 1 & \overline{)3x^3 - x^2 - 2x + 6} \quad \leftarrow \text{Dividendo} \\
 & \underline{3x^3 \qquad\quad + 3x} \\
 & -x^2 - 5x + 6 \\
 & \underline{-x^2 \qquad\quad - 1} \\
 & -5x + 7 \quad \leftarrow \text{Residuo}
\end{array}$$

Los pasos de este procedimiento se pueden resumir como sigue:

1. Divida $3x^3$ (el primer término del dividendo) por x^2 (el primer término del divisor), obteniendo $3x$ (el primer término del cociente).
2. Multiplique $x^2 + 1$ (el divisor) por $3x$ y escriba el producto $3x^3 + 3x$ *debajo de los términos correspondientes* en el dividendo.
3. Reste para obtener $-x^2 - 5x + 6$, el cual se trata como nuevo dividendo.
4. Divida $-x^2$ (el primer término del nuevo dividendo) por x^2, obteniendo -1 (el segundo término del cociente).
5. Multiplique $x^2 + 1$ por -1 y reste el producto, del nuevo dividendo.
6. Observe que puesto que el grado de $-5x + 7$ (la diferencia) es menor que el grado del divisor, la división está terminada. Escribimos el resultado de la división como

$$\frac{3x^3 - x^2 - 2x + 6}{x^2 + 1} = 3x - 1 + \frac{-5x + 7}{x^2 + 1}$$

Si multiplicamos ambos lados de la última ecuación por $x^2 + 1$, tenemos

$$3x^3 - x^2 - 2x + 6 = (x^2 + 1)(3x - 1) - 5x + 7 \tag{7}$$

Esto proporciona una prueba de la división, de la misma manera como se describió arriba para revisar la división de dos enteros positivos.

ALGORITMO DE DIVISION PARA POLINOMIOS

En general, cuando dividimos un entero positivo p por un entero positivo s, obtenemos un único cociente q y residuo r que satisfacen

$$p = sq + r$$

donde $0 \leq r < s$. Un resultado análogo, llamado **algoritmo de división para polinomios** se enuncia como sigue.

TEOREMA 1

El algoritmo de división para polinomios

Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios con $g(x) \neq 0$. Entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

donde $r(x)$ es 0, o tiene un grado menor al grado de $g(x)$.

Llamamos a $f(x)$ el **dividendo**, a $g(x)$ el **divisor,** a $q(x)$ el **cociente,** y a $r(x)$ el **residuo.** Cuando $r(x) = 0$, entonces $f(x) = g(x)q(x)$ y $g(x)$ es un factor de $f(x)$. En este caso, se dice que $f(x)$ es **divisible** por. $g(x)$.

EJEMPLO 1

Si identificamos

$$f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 6 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 + 1$$

podemos concluir, según la división ilustrada arriba, que

$$q(x) = 3x - 1 \quad \text{y} \quad r(x) = -5x + 7$$

Observe que (7) tiene la forma $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$.

EJEMPLO 2

Divida el polinomio $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ por el polinomio $g(x) = x^2 + 2$.

Solución. El polinomio $x^4 - 2x^2 - 8$ es divisible por $x^2 + 2$ ya que $r(x) = 0$:

$$\begin{array}{r@{}l}
 & x^2 - 4 \\
x^2 + 2 \,\big) & \overline{x^4 - 2x^2 - 8} \\
 & \underline{x^4 + 2x^2} \\
 & - 4x^2 - 8 \\
 & \underline{- 4x^2 - 8} \\
 & 0
\end{array}$$

Esto es, $x^2 + 2$ es un factor de $x^4 - 2x^2 - 8$:

$$x^4 - 2x^2 - 8 = (x^2 - 4)(x^2 + 2)$$

Si el divisor $g(x)$ en el teorema 1 es un polimonio lineal $x - c$, se deduce que el residuo $r(x)$ debe ser una constante. Por tanto tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 2

Sea $f(x)$ un polinomio de grado $n > 0$ y sea c un número real. Entonces, existe un polinomio único $q(x)$ de grado $n - 1$ y un número real único r tales que

$$f(x) = (x - c)q(x) + r$$

EJEMPLO 3

Divida el polinomio $f(x) = x^3 - 4x + 7$ por $g(x) = x + 1$.

Solución. Por medio de una división larga en la que se escriben los productos parciales, tenemos

$$\begin{array}{r@{}l}
 & x^2 - x - 3 \\
x + 1 \,\big) & \overline{x^3 + 0x^2 - 4x + 7} \\
 & \underline{x^3 + x^2} \\
 & - x^2 - 4x + 7 \\
 & \underline{- x^2 - x} \\
 & - 3x + 7 \\
 & \underline{- 3x - 3} \\
 & 10
\end{array}$$

Por tanto en el teorema 2 identificamos $q(x) = x^2 - x - 3$ y $r = 10$, y escribimos

$$x^3 - 4x + 7 = (x + 1)(x^2 - x - 3) + 10$$

DIVISION SINTETICA

La división por un polinomio lineal de la forma $x - c$ para cualquier número real c, puede simplificarse utilizando la técnica llamada **división sintética.** Por ejemplo, en la división

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & 4x^2 & - & 3x & + & 7 & \\
x-2) & 4\,\boxed{} & - & 11x^2 & + & \boxed{} & -\ \boxed{} \\
(-) & \boxed{} & & 8x^2 & & & \\
 & & & \boxed{-3}\,x^2 & + & \boxed{} & - \\
 & & (-) & \boxed{}\,x^2 & + & 6x & \\
 & & & & & \boxed{7} & - \\
 & & & & & (-) & 14 \\
 & & & & & & 9 \quad \text{Residuo}
\end{array} \tag{8}$$

Podemos hacer algunas observaciones:

- Debajo del signo de división, cada columna contiene términos del mismo grado.
- Cada rectángulo contiene términos idénticos.
- Los coeficientes del cociente y el residuo constante se encierran en un círculo.
- Cada línea marcada con $(-)$ se resta de la línea anterior.

Si borramos las variables y las repeticiones observadas en (8), tenemos

$$\begin{array}{rrrrr}
x - 2 \rightarrow -2) & 4 & -11 & 13 & -5 \\
 & (-) & -8 & \uparrow & \uparrow \\
 & & -3 & & \\
 & & (-) & 6 & \\
 & & & 7 & \\
 & & & (-) & -14 \\
 & & & & 9 \quad \text{Residuo}
\end{array} \tag{9}$$

Como lo indican las flechas en (9), esto puede escribirse en forma más compacta así:

$$\begin{array}{rrrrr}
-2) & 4 & -11 & 13 & -5 \\
(-) & \downarrow & -8 & 6 & -14 \\
\hline
 & & -3 & 7 & \boxed{9} \quad \text{Residuo}
\end{array} \tag{10}$$

Si bajamos el coeficiente 4, como lo indica la flecha en (10), entonces los coeficientes del cociente y el residuo están sobre una línea.

$$\begin{array}{rrrrrl}
-2) & 4 & -11 & 13 & -5 & \text{Primera fila} \\
(-) & & -8 & 6 & -14 & \text{Segunda fila} \\
\hline
 & 4 & -3 & 7 & \boxed{9} & \text{Tercera fila}
\end{array} \tag{11}$$

Ahora observamos que cada número de la segunda fila de (11) puede hallarse multiplicando el número de la tercera fila de la columna anterior por -2; y que cada número de la tercera fila se obtiene *restando* cada número de la segunda fila del correspondiente número en la primera fila.

Finalmente podemos evitar la resta en (11) multiplicando por $+2$ (el inverso aditivo de -2) y *sumándole* la segunda fila a la primera. Esto se ilustra a continuación.

$$\begin{array}{l}
\text{Coeficientes del dividendo } f(x) = 4x^3 - 11x^2 + 13x - 5 \\
\text{Divisor: } x-2 \quad \begin{array}{r|rrrrl}
2 & 4 & -11 & 13 & -5 & \text{Primera fila} \\
(+) & & 8 & -6 & 14 & \text{Segunda fila} \\ \hline
 & 4 & -3 & 7 & \boxed{9} & \text{Tercera fila}
\end{array} \qquad (12) \\
\text{Coeficientes del cociente } q(x) = 4x^2 - 3x + 7
\end{array}$$

El procedimiento de la división sintética para dividir $f(x)$, un polinomio de grado $n > 0$, por $x - c$ se sintetiza como sigue:

División sintética

1. Escriba c seguido de los coeficientes de $f(x)$. Asegúrese de incluir cualquier coeficiente que sea 0, además de término constante.
2. Baje el primer coeficiente de $f(x)$ a la tercera fila.
3. Multiplique este número por c y escriba el producto directamente debajo del segundo coeficiente de $f(x)$. Luego sume los dos números en esta columna y escriba la suma debajo de ellos, en la tercera fila.
4. Multiplique esta suma por c y escriba el producto en la segunda fila de la siguiente columna. Luego sume los dos números en esta columna y escriba la suma en la tercera fila.
5. Repita el paso anterior tantas veces como sea necesario.
6. El último número de la tercera fila es el residuo constante r; los números que lo preceden en la tercera fila son los coeficientes de $q(x)$, el polinomio cociente de grado $n - 1$.

EJEMPLO 4

Utilice la división sintética para dividir:

(a) $f(x) = 2x^3 - 4x + 7$ por $g(x) = x - 3$
(b) $f(x) = 6x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ por $g(x) = x + \frac{1}{2}$

Solución

(a) Debemos escribir todos los coeficientes de $f(x)$, incluyendo los coeficientes cero. Aquí tenemos $c = 3$.

$$\begin{array}{r|rrrl}
3 & 2 & 0 & -4 & 7 \\
 & & 6 & 18 & 42 \\ \hline
 & 2 & 6 & 14 & \boxed{49 = r}
\end{array}$$

El cociente es entonces $q(x) = 2x^2 + 6x + 14$, y el residuo es $r = 49$.

(b) Para poner $x + \frac{1}{2}$ de la forma $x - c$, escribimos $x - (-\frac{1}{2})$ e identificamos $c = -\frac{1}{2}$. Tenemos entonces

$$\begin{array}{r|rrrrl}
-\frac{1}{2} & 6 & 3 & -2 & -5 & -2 \\
 & & -3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline
 & 6 & 0 & -2 & -4 & \boxed{0 = r}
\end{array}$$

El cociente es $q(x) = 6x^3 - 2x - 4$, y el residuo es $r = 0$. Observe que $x + \frac{1}{2}$ es un factor de $6x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x - 2$.

EJERCICIO 4.2

En los problemas 1 al 12, utilice la división larga para dividir $f(x)$ por $g(x)$. Escriba las respuestas en la forma $f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$.

1. $f(x) = x^2 - 7x + 4;\ g(x) = x + 4$
2. $f(x) = x^2 + 6x - 8;\ g(x) = x^2 + 2$
3. $f(x) = x^2 + 6x - 8;\ g(x) = x^2 + 2$
4. $f(x) = 16x^3 - 18x^2 + 4;\ g(x) = 2x^2 - 1$
5. $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 8x - 1;\ g(x) = (x+1)^2$
6. $f(x) = 8x^4 - 3x^2 + x - 5;\ g(x) = (2x+1)^2$
7. $f(x) = 27x^4 - 36x^2 + x + 9;\ g(x) = 3x^2 + x + 2$
8. $f(x) = 12x^4 - 15x^3 + x^2 - x + 2;\ g(x) = 4x^3 + x + 2$
9. $f(x) = 3x^5 - 13x^3 + x - 2;\ g(x) = x^2 - 2x + 2$
10. $f(x) = 6x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 5;\ g(x) = x^3 - x + 1$
11. $f(x) = 5x^6 - 3x^5 + x^3 - 2x^2 + 2;\ g(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$
12. $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 2x^2 + x - 5;\ g(x) = x - 1$

En los problemas del 13 al 28, utilice la división sintética para dividir $f(x)$ por $g(x)$. Identifique el cociente $q(x)$ y el residuo r.

13. $f(x) = 5x^2 - 3x + 2;\ g(x) = x - 3$
14. $f(x) = 2x^2 - 6x + 8;\ g(x) = x - 1/3$
15. $f(x) = 2x^3 + 7x - 9;\ g(x) = x - 1$
16. $f(x) = x^3 + 64;\ g(x) = x + 4$
17. $f(x) = x^3 - x^2 + 4;\ g(x) = x - 1/2$
18. $f(x) = 12x^3 - x + 5;\ g(x) = x + 2$
19. $f(x) = 7x^3 + 5x^2 - 12x + 2;\ g(x) = x + 1/4$
20. $f(x) = x^3 - 3x + 1;\ g(x) = x + 3$
21. $f(x) = x^4 + 64;\ g(x) = x - 4$
22. $f(x) = 3x^6 - 2x^3 - 4x^2 + 1;\ g(x) = x - 2$
23. $f(x) = 8x^5 - 3x^2 + 4x + 5;\ g(x) = x - 1/4$
24. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 2;\ g(x) = x - 1$
25. $f(x) = 6x^3 - 3x^2 + 2x;\ g(x) = 2x - 1$
26. $f(x) = x^4 + x;\ g(x) = 3x + 1$
27. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 15;\ g(x) = x - \sqrt{5}$
28. $f(x) = x^{10} - 5^{10};\ g(x) = x - 5$

En los problemas 29 y 30, utilice la división larga para ha[llar] un valor de k tal que $f(x)$ sea divisible por $g(x)$.

29. $f(x) = x^6 + 3x^2 + k;\ g(x) = x^2 - 1$
30. $f(x) = x^7 - 2x^5 + 2x^4 - kx^2 + x - 1;\ g(x) = x^2 - x + 1$

En los problemas 31 y 32, utilice la división sintética pa[ra] hallar un valor k tal que $f(x)$ sea divisible por $g(x)$.

31. $f(x) = kx^5 - 3x^2 + 2x + 5k;\ g(x) = x - 1$
32. $f(x) = x^4 - kx^3 - 2kx + 4;\ g(x) = x + 2$

4.3 Teorema del residuo y teorema del factor

Hay una relación entre el residuo r obtenido por la división de un polinomio $f(x)$ por $x - c$ y el valor funcional $f(c)$.

TEOREMA DEL RESIDUO

Recordemos del teorema 2 que la división de un polinomio $f(x)$ por un polinomio lineal $x - c$ da como resultado un residuo constante r:

$$f(x) = (x - c)q(x) + r$$

Al determinarse (13) en $x = c$ produce

$$f(c) = (c - c)q(c) + r = r$$

Por tanto, hemos establecido el siguiente resultado, el cual se conoce como **teorema del residuo.**

TEOREMA 3

Teorema del residuo

Cuando un polinomio $f(x)$ se divide por $x - c$, el residuo r es el valor del polinomio en $x = c$, esto es, $r = f(c)$.

EJEMPLO 1

Determine el residuo cuando $f(x) = 4x^3 - x^2 + 4$ se divide por $x - 2$.

Solución. Según el teorema del residuo tenemos

$$\begin{aligned} r &= f(2) \\ &= 4(2)^3 - (2)^2 + 4 = 32 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2

Utilice el teorema del residuo para hallar el valor de $f(-3)$ si $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 10$.

Solución. El valor $f(-3)$ es el residuo cuando $f(x)$ se divide por $x - (-3)$. Utilizando la división sintética tenemos

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & 1 & 0 & -4 & 0 & 2 & -10 \\ & & -3 & 9 & -15 & 45 & -141 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & -15 & 47 & \boxed{-151 = r} \end{array}$$

Por tanto, $f(-3) = -151$.

Observe que en el ejemplo 2 evitamos calcular las potencias de -3, utilizando el teorema del residuo para evaluar $f(-3)$.

TEOREMA DEL FACTOR

Decimos que un número c es un **cero** o una raíz de un polinomio $f(x)$ si $f(c) = 0$. En este caso, $r = f(c) = 0$ y se deduce por tanto, según el teorema 2, que podemos escribir el polinomio como

$$f(x) = (x - c)q(x) \qquad \textbf{(14)}$$

Por tanto, cuando c es una raíz de $f(x)$, $x - c$ es un factor. Y viceversa, si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces $f(x)$ tiene la forma dada en (14). En este caso, vemos que $f(c) = (c - c)q(c) = 0$. Estos resultados se sintetizan en el **teorema del factor.**

TEOREMA 4

Teorema del factor

Un número c es una raíz de un polinomio $f(x)$ si y sólo si $x - c$ es un factor de $f(x)$.

EJEMPLO 3

Determine si $x + 1$ es un factor de $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x - 1$.

Solución. Puesto que es fácil encontrar potencias de -1, calculamos $f(-1)$ directamente:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^4 - 5(-1)^2 + 6(-1) - 1 \\ &= -11 \end{aligned}$$

Puesto que $f(-1) \neq 0$, concluimos, según el teorema del factor, que $x - (-1) = x + 1$ no es un factor de $f(x)$.

EJEMPLO 4

Determine si $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Solución. Calculamos el valor de $f(2)$ por medio de la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrl} 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

Puesto que $r = f(2) = 0$, concluimos, según el teorema del residuo, que 2 es una raíz de $f(x)$. Por tanto, según el teorema del factor, $x - 2$ es un factor de $f(x)$.

EJEMPLO 5

Considere el polinomio $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 1$. Puesto que

$$\begin{array}{r|rrrl} -\frac{1}{2} & 2 & -1 & 1 & 1 \\ & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & 2 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

se deduce, según el teorema del residuo, que $-\frac{1}{2}$ es una raíz de $f(x)$. Por tanto, según el teorema del factor, $x - (-\frac{1}{2})$, o $x + \frac{1}{2}$, es un factor de $f(x)$:

$$f(x) = (x + \tfrac{1}{2})q(x)$$

Para determinar $q(x)$, podríamos dividir $f(x)$ por $x + \frac{1}{2}$. Sin embargo, según la división sintética que acabamos de realizar, vemos que $q(x) = 2x^2 - 2x + 2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + \tfrac{1}{2})(2x^2 - 2x + 2) \\ &= (x + \tfrac{1}{2})(2)(x^2 - x + 1) \\ &= (2x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

El siguiente teorema nos permite utilizar la fórmula cuadrática para factorizar cualquier polinomio cuadrático que tenga raíces reales.

TEOREMA 5

Cualquier polinomio cuadrático $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales, para los cuales $b^2 - 4ac \geq 0$, puede factorizarse como

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

$$\text{donde } r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Este teorema puede verificarse por medio de la multiplicación directa.

EJEMPLO 6

Factorice el polinomio cuadrático $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$.

Solución. Según la fórmula cuadrática, se encuentra que las raíces reales de $f(x)$ son

$$1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{6} \quad \text{y} \quad 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{6}$$

Se deduce por el teorema 5 que

$$\begin{aligned} f(x) &= 2[x - (1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{6})][x - (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{6})] \\ &= 2(x - 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{6})(x - 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{6}) \end{aligned}$$

EJERCICIO 4.3

En los problemas 1 al 6, utilice el teorema del residuo para hallar r cuando $f(x)$ se divide por el polinomio lineal dado.

1. $f(x)=5x^2-7x+13;\ \ x-3$
2. $f(x)=4x^2-8x-8;\ \ x+3$
3. $f(x)=9x^3-3x^2+6x-2;\ \ x-1/3$
4. $f(x)=2x^4+4x^3-2x^2+4x-5;\ \ x+1/2$
5. $f(x)=8x^5-6x^3+5x^2+2x-1;\ \ x+1$
6. $f(x)=2x^3-3x^2-4x+1;\ \ x-3/2$

En los problemas 7 al 16, utilice el teorema del residuo para hallar $f(c)$.

7. $f(x)=2x^2-10x+4;\ \ c=2$
8. $f(x)=9x^2-6x-4;\ \ c=1/4$
9. $f(x)=x^3+2x^2+4x+5;\ \ c=-5$
10. $f(x)=12x^3+4x^2-3x+4;\ \ c=-1/2$
11. $f(x)=x^4/27-x^3/9+x+1;\ \ c=3$
12. $f(x)=18x^4-3x^3+2x^2+x-4;\ \ c=-1/3$
13. $f(x)=12x^5-10x^3+2x^2-3x-1;\ \ c=1$
14. $f(x)=2x^7-3x^5+4x-2;\ \ c=-2$
15. $f(x)=5x^6-6x^5+x-5;\ \ c=4$
16. $f(x)=2x^7-10x^5+4x-8;\ \ c=5$

En los problemas 17 al 26, determine si el polinomio lineal dado es un factor de $f(x)$.

17. $f(x)=3x^2-10x-8;\ x-4$
18. $f(x)=12x^2-4x+2;\ x-1/6$
19. $f(x)=2x^3-3x^2+x-6;\ x-1/2$
20. $f(x)=x^3+2x^2+x+2;\ x+2$
21. $f(x)=3x^3+6x^2+2x-1/8;\ x+1/2$
22. $f(x)=12x^3+8x^2+x+5;\ x+1$
23. $f(x)=3x^4-2x^3+6x-2;\ x-2/3$
24. $f(x)=5x^5-x^4+10x^3-2x^2-5x+1;\ x-1/3$
25. $f(x)=x^5+7x^4+6x^3+2x^2+x-1;\ x+1$
26. $f(x)=18x^4-3x^3+2x^2+1;\ x+1/9$

En los problemas 27 al 32, factorice el polinomio cuadrático dado.

27. $f(x)=-x^2+5x-6$
28. $f(x)=x^2-2\sqrt{5x}+4$
29. $f(x)=4x^2+3x-2$
30. $f(x)=3x^2-7x+2$
31. $f(x)=2x^2-5x+3$
32. $f(x)=-3x^2+4x+1$
33. Halle un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 1, 2 y – 2. Determine cuál es el que en $x = 0$ su valor es 8.
34. Halle un polinomio de cuarto grado cuyas raíces sean 2/3, –2/3, 1, –3.
35. Demuestre que $(x + 1)$ es un factor de $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$. Factorice $f(x)$ en factores lineales.
36. Demuestre que $(x - 2)$ es un factor de $f(x) = 9x^3 - 18x^2 - x + 2$. Factorice $f(x)$ en factores lineales.
37. Halle qué valor debe tomar k para que $(x + 2)$ sea un factor de $f(x) = 3x^2 - kx - 4$.
38. Halle qué valor debe tomar k para que $x + 3$ sea un factor de $f(x) = 2x^3 + 2kx^2 - 3x + 5$.
39. Halle qué valor debe tomar k para que el residuo de dividir $f(x) = 2x^3 + 2kx^2 - 3x + 5$ por $x + 3$ sea $r = 10$.
40. Halle todos los valores posibles que puede tomar k para que el residuo en la división de $f(x) = 3x^3 + 4kx^2 + 6$ por $(x + 2)$ sea -2.
41. Si se conoce que cuando dividimos $f(x) = x^2 - 5x + 5$ por $x - c$ se obtiene un residuo de $r = -1$, ¿cuáles son los posibles valores de c?
42. Determine c de modo que $f(x) = x^n - 2^n$ se pueda expresar como $(x - c)q(x)$, donde $q(x)$ es un polinomio. ¿Qué condición debe cumplir n para que $x^n + c^n$ se pueda expresar como $(x + c)q(x)$?
43. Suponga que $f(x) = 24x^{100} + 36x^{50} - 25x^{25} + 50x^5 + 15x^3 - 5$ se divide por $(x + 1)$; ¿cuál es el residuo?
44. Suponga que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ se divide por $x - 1$ y su residuo es 10. Pruebe que $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 10$.

4.4 Raíces reales de los polinomios

En esta sección examinamos algunas técnicas especiales para hallar raíces *reales* de una función polinomial de grado mayor que 2.

MULTIPLICIDAD DE LAS RAICES

El polinomio $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5$ puede factorizarse como

$$f(x) = (x - 1)^3(x + 5)$$

Por tanto, $f(x)$ tiene 4 factores lineales pero sólo dos raíces distintas. Decimos que 1 es una raíz de multiplicidad 3 y que $n - 5$ es una raíz de multiplicidad 1. Si $(x - c)^k$ es factor de un polinomio $f(x)$ y $(x - c)^{k+1}$ no es factor para k, un entero positivo, entonces se dice que c es una **raíz de multiplicidad** k de $f(x)$.

EJEMPLO 1

Puesto que $f(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$, se deduce que -2 es una raíz de multiplicidad dos de $f(x)$.

NUMERO DE RAICES

Suponga que un polinomio $f(x)$ de grado n tiene m (no necesariamente diferentes) raíces reales $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Entonces, según el teorema del factor, $(x - c_1), (x - c_2), \ldots, (x - c_m)$ son, cada uno de ellos, factores de $f(x)$; esto es,

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_m)q(x)$$

para algún polinomio $q(x)$. Por consiguiente, el grado n de $f(x)$, debe ser mayor o igual que m, el número total de raíces reales cuando cada una se cuenta según su multiplicidad.

TEOREMA 6

Un polinomio $f(x)$ de grado $n > 0$ tiene a lo sumo n raíces reales (no necesariamente diferentes).

EJEMPLO 2

(a) El polinomio de grado 4

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 \\ &= (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \end{aligned}$$

tiene 4 raíces reales distintas, cada una de multiplicidad 1.

(b) El polinomio de cuarto grado

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4$$

tiene una sola raíz real de multiplicidad 4.

(c) El polinomio de cuarto grado

$$f(x) = x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

tiene dos raíces reales diferentes, de multiplicidad 1.

Sea $f(x)$ un polinomio que tiene coeficientes reales y se organiza en potencias descendentes de x. A partir de esta forma es posible determinar el número máximo de raíces positivas y el número máximo de raíces negativas, examinando las variaciones de signo en $f(x)$. Una **variación de signo** se da cuando dos términos consecutivos tienen signos opuestos. Por ejemplo, en el polinomio

$$f(x) = 9x^6 - 7x^4 - 8x^3 + 2x - 14$$

Cambio de signo — Cambio de signo — Cambio de signo

hay 3 variaciones de signo. Enunciamos la siguiente regla sin prueba.

Regla de los signos de Descartes

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales que se organiza en potencias descendentes de x.

(i) El número de *raíces positivas* de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $f(x)$, o es este número disminuido en un entero par.

(ii) El número de *raíces negativas* de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $f(-x)$, o es este número disminuido en un entero par.

EJEMPLO 3

Suponga que un polinomio $f(x)$ tiene 5 variaciones de signo. La regla de Descartes estipula que el número de raíces positivas de $f(x)$ es 5, 3 ó 1. Por consiguiente, el número máximo de raíces positivas es 5.

EJEMPLO 4

El polinomio

$$f(x) = \underbrace{x^3 - 3x}_{\text{Cambio de signo}} - 1$$

tiene una variación de signo. Según la regla de Descartes concluimos que $f(x)$ tiene una raíz positiva. (Observe que el número 1 reducido por un entero par es negativo y no podemos tener un número negativo de raíces). Ahora, la inspección de

$$f(-x) = -x^3 + 3x - 1$$

Cambio de signo — Cambio de signo

revela dos variaciones de signo. Por tanto, $f(x)$ tiene dos o ninguna raíz negativa.

Puesto que el polinomio

$$f(x) = x^2 - 10x + 25$$

tiene dos variaciones de signo, sabemos por la regla de Descartes que $f(x)$ tiene o dos, o *ninguna* raíz positiva. Pero según

$$f(x) = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

vemos que 5 es una raíz positiva de multiplicidad 2. Esto nos lleva a un punto importante: en la aplicación de la regla de Descartes, debemos contar una raíz de multiplicidad k como k ceros.

CEROS RACIONALES

Hemos visto que la división sintética es útil para determinar si un número dado es una raíz de un polinomio $f(x)$. Cuando el residuo en la división de $f(x)$ por $x - c$ es $r = 0$, hemos hallado una raíz del polinomio, puesto que $r = f(c) = 0$. Por ejemplo, $\frac{2}{3}$ es un cero de $f(x) = 18x^3 - 15x^2 + 14x - 8$, puesto que

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{2}{3} & 18 & -15 & 14 & -8 \\ & & 12 & -2 & 8 \\ \hline & 18 & -3 & 12 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

Por la división sintética, sabemos que el cociente es $q(x) = 18x^2 - 3x + 12$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \tfrac{2}{3})(18x^2 - 3x + 12) \\ &= (x - \tfrac{2}{3})(3)(6x^2 - x + 4) \\ &= (3x - 2)(6x^2 - x + 4) \end{aligned} \qquad (15)$$

En la multiplicación indicada en (15), el coeficiente principal 18 y el término constante -8 de $f(x)$ se obtienen de los productos

$$(3x - \overbrace{2)(6x^2 - x + 4}^{-8})$$
$$\underbrace{(3x - 2)(6x^2}_{18}$$

Vemos por tanto, que el denominador 3 de la raíz racional $\frac{2}{3}$ es un *factor* del coeficiente principal de $f(x)$, y el numerador 2 de la raíz es un *factor* del término constante de $f(x)$.

Este ejemplo ilustra un principio general, dado en el teorema siguiente, para determinar las raíces racionales de un polinomio.

TEOREMA 7

Sea p/s un número racional con p y s primos entre sí (sin factores comunes excepto 1 y -1) y una raíz del polinomio

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

donde los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, son enteros con $a_n \neq 0$. Entonces, p es un factor de a_0 y s es un factor de a_n.

Observe que el teorema 7 *no* asevera que un polinomio deba tener raíces racionales; más bien afirma que *si* un polinomio con coeficientes enteros tiene una raíz racional p/s entonces:

p es un factor entero de a_0, y
s es un factor entero de a_n.

Formando todas las posibles razones de cada factor de a_0 con cada factor de a_n, podemos construir una lista de todas las raíces racionales *posibles*.

EJEMPLO 5

Halle todas las raíces racionales de

$$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$$

Solución. Identificamos $a_0 = -2$ y $a_n = 3$ y enumeramos todos los factores de a_0 y a_n respectivamente:

$$p\colon\ \pm 1,\ \pm 2$$
$$s\colon\ \pm 1,\ \pm 3$$

Según el teorema 7, las raíces racionales posibles de $f(x)$ son

$$\frac{p}{s}\colon\ -1,\ 1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -2,\ 2,\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}$$

De estas 8 posibilidades, *a lo sumo* 4 pueden ser raíces según el teorema 6, ya que $f(x)$ es de cuarto grado. Además, la regla de Descartes señala que hay 3 raíces o una raíz positiva y una raíz negativa*.

Para determinar cuáles de estos números son raíces, podríamos utilizar la sustitución directa. La división sintética, sin embargo, es usualmente más efectiva. Puesto que hay una raíz negativa comenzamos por probar -1:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 3 & -10 & -3 & 8 & -2 \\ & & -3 & 13 & -10 & 2 \\ \hline & 3 & -13 & 10 & -2 & \lfloor 0 = r \end{array}$$

Por tanto, -1 es una raíz de $f(x)$. Además, la división sintética produce los coeficientes del cociente en la división de $f(x)$ por $x - (-1) = x + 1$. Por consiguiente tenemos la factorización

$$f(x) = (x + 1)(3x^3 - 13x^2 + 10x - 2)$$

Ahora cualquier otra raíz racional debe ser una raíz del factor $3x^3 - 13x^2 + 10x - 2$. Puesto que el polinomio es de grado menor, será más fácil utilizar la división sintética en éste en vez de en $f(x)$ para probar la siguiente raíz racional posible. Ya hemos encontrado la única raíz negativa, por tanto empezamos por probar los números positivos en la lista:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & -13 & 10 & -2 \\ & & 3 & -10 & 0 \\ \hline & 3 & -10 & 0 & \lfloor -2 = r \end{array}$$

* Tenga en cuenta lo que la regla enuncia: hay al menos una raíz positiva y exactamente una raíz negativa. Por supuesto, estos podrían ser números irracionales, y por tanto, no estar en la lista de las posibles raíces racionales.

Encontramos que 1 no es una raíz racional. Probando $\frac{1}{3}$, tenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{3} & 3 & -13 & 10 & -2 \\ & & 1 & -4 & 2 \\ \hline & 3 & -12 & 6 & \lfloor 0 = r \end{array}$$

Por consiguiente, $\frac{1}{3}$ es un cero, y tenemos ahora la factorización

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-\tfrac{1}{3})(3x^2-12x+6) \\ &= (x+1)(x-\tfrac{1}{3})(3)(x^2-4x+2) \\ &= (x+1)(3x-1)(x^2-4x+2) \end{aligned}$$

Puesto que el factor $x^2 - 4x + 2$ es cuadrático, las raíces restantes, $2 + \sqrt{2}$ y $2 - \sqrt{2}$, se determinan fácilmente a partir de la fórmula cuadrática. Por tanto, el polinomio tiene dos raíces racionales -1 y $\frac{1}{3}$, y dos raíces irracionales.

EJEMPLO 6

Las raíces racionales posibles de

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$$

son -1, 1, -2, 2, -4 y 4. Sin embargo, puesto que no hay variaciones de signo en $f(x)$, sabemos por la regla de Descartes que no hay raíces positivas. Eliminamos entonces 1, 2, y 4 de la lista de posibilidades. Ahora hay cuatro variaciones de signo en

$$f(-x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$$

entonces hay 4, 2, o ninguna raíz negativa. Probando -1 con la división sintética se demuestra que no es una raíz. Probando -2, encontramos

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ & & -2 & -4 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 2 & \lfloor 0 = r \end{array}$$

y entonces -2 es una raíz. Vemos por el término constante de $q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ que -2 puede también ser una raíz de este cociente. Procediendo, encontramos

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ & & -2 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \lfloor 0 = r \end{array}$$

Puesto que el nuevo cociente $x^2 + 1$ no tiene raíces reales, concluimos que -2 es una raíz de $f(x)$ de multiplicidad 2 y que $f(x) = (x+2)^2(x^2+1)$.

EJEMPLO 7

El polinomio

$$f(x) = 12x^4 - 3x^3 + 17x^2 - 2x + 6$$

tiene 24 raíces racionales posibles:

$$\frac{p}{s}:\ -1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3},$$

$$-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{12}$$

Si examinamos las variaciones de signo para $f(x)$ y $f(-x)$, la regla de Descartes señala que hay 4, 2 o ninguna raíz positiva y que no hay raíces negativas. Por tanto, podemos eliminar los números negativos de la lista anterior. Ahora, se puede verificar por medio de la división sintética que ninguno de los números racionales positivos restantes es una raíz de $f(x)$. En consecuencia, el polinomio no tiene raíces racionales.

EJEMPLO 8

Halle todos los factores de

$$f(x) = 4x^3 - 5x - 2$$

Solución. Puesto que $a_0 = -2$ y $a_n = 4$,

$$p: \pm 1, \pm 2$$
$$s: \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

Las raíces racionales posibles son

$$\frac{p}{s}: -1, 1, -2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$$

Según la regla de Descartes, hay una raíz positiva y dos o ninguna raíz negativa. Usando la división sintética para revisar la lista, encontramos finalmente

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 4 & 0 & -5 & -2 \\ & & -2 & 1 & 2 \\ \hline & 4 & -2 & -4 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

Entonces, $-\frac{1}{2}$ es una raíz racional; de hecho, se encuentra que es la única raíz racional de $f(x)$. Sin embargo, tenemos ahora la factorización

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - (-\tfrac{1}{2}))(4x^2 - 2x - 4) \\ &= (x + \tfrac{1}{2})(2)(2x^2 - x - 2) \\ &= (2x + 1)(2x^2 - x - 2) \end{aligned}$$

Según la fórmula cuadrática, encontramos que las raíces de $2x^2 - x - 2$ son los números irracionales $(1 + \sqrt{17})/4$ y $(1 - \sqrt{17})/4$. Según el teorema 5 se deduce que

$$2x^2 - x - 2 = 2\left(x - \frac{1 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{17}}{4}\right)$$

Por tanto, tenemos

$$f(x) = 2(2x + 1)\left(x - \frac{1 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{17}}{4}\right)$$

La teoría de las raíces de polinomios tiene muchas aplicaciones en la solución de ecuaciones y en la graficación de funciones polinomiales.

EJEMPLO 9

Halle las soluciones reales de $3x^3 + 4x^2 + 4x = -1$.

Solución. Hallar las soluciones reales de esta ecuación equivale a hallar las raíces reales del polinomio $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 4x + 1$. Las raíces racionales posibles son $-1, 1, -\frac{1}{3}$, y $\frac{1}{3}$. Ya que no hay variaciones de signo en $f(x)$, podemos descartar los números positivos 1 y $\frac{1}{3}$. Entonces, probamos sólo -1 y $-\frac{1}{3}$ por medio de la división sintética

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ & & -3 & -1 & -3 \\ \hline & 3 & 1 & 3 & \boxed{-2 = r} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{3} & 3 & 4 & 4 & 1 \\ & & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 3 & 3 & 3 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

Por tanto, $-\frac{1}{3}$ es la única raíz racional de $f(x)$, y tenemos la factorización

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + \tfrac{1}{3})(3x^2 + 3x + 3) \\ &= (3x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Según la fórmula cuadrática, encontramos que $x^2 + x + 1$ no tiene raíces reales. Por consiguiente, $-\frac{1}{3}$ es la única solución real de la ecuación dada.

EJEMPLO 10

Explique por qué las gráficas de

$$f(x) = 4x^3 + 6x - 3 \quad \text{y} \quad g(x) = 3x^3 - 6x^2 + 1$$

pueden intersecarse en máximo 3 puntos.

Solución. La coordenada en x de cualquier punto del *intersecto* de las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ es una solución de

$$4x^3 + 6x - 3 = 3x^3 - 6x^2 + 1$$

o

$$x^3 + 6x^2 + 6x - 4 = 0 \tag{16}$$

Puesto que según el teorema 6 el polinomio cúbico $x^3 + 6x^2 + 6x - 4$ tiene a lo sumo 3 raíces reales, hay máximo 3 soluciones para (16). Por tanto, las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ pueden intersecarse en máximo 3 puntos.

LOCALIZACION DE RAICES REALES

Sea $f(x)$ un polinomio de grado n con coeficientes reales. Si $c_1, c_2, \ldots, c_m$, $m \leq n$, denotan números reales tales que $f(c_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, entonces existen números reales a y b tales que $a \leq c_i \leq b$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Al número a se le llama **cota inferior para las raíces de** $f(x)$ y a b se le llama **cota superior para las raíces.** En otras palabras, a y b son números que determinan un intervalo $[a, b]$ en el cual se encuentran todas las raíces reales de $f(x)$. Las cotas para las raíces reales no son únicas; *cualquier* número que sea menor o igual a la raíz menor es una cota inferior para las raíces, y *cualquier* número que sea mayor o igual a la raíz mayor es una cota superior.

Las siguiente regla, la cual presentamos sin demostración, utiliza la división sintética para hallarles cotas a las raíces de un polinomio.

Cotas para las raíces reales de un polinomio

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales y un coeficiente principal positivo, y sea k un número positivo.

(i) Si no hay números negativos en la tercera fila de la división sintética de $f(x)$ por $x - k$, entonces k es una cota superior para las raíces reales de $f(x)$.

(ii) Si los números de la tercera fila de la división sintética de $f(x)$ por $x - (-k)$ son alternadamente positivos y negativos, entonces $-k$ es una cota inferior para las raíces reales de $f(x)$. Si el número 0 aparece en la tercera fila, puede considerarse que tiene el signo más o el signo menos.

EJEMPLO 11

Halle cotas superiores e inferiores para las raíces reales de $f(x) = x^4 + x^3 - 1$.

Solución. Puesto que hay una variación de signo en $f(x)$ y una variación de signo en $f(-x)$, la regla de Descartes señala que el polinomio dado tiene una raíz positiva y una negativa. Para aplicar la regla de las cotas arriba mencionada, escogemos k por ensayo y error.

Si $k = 1$, entonces la división sintética

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline \text{Números no negativos} \Rightarrow & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

demuestra que 1 es una cota superior para las raíces de $f(x)$. Ahora, si escogemos $k = 2$ de modo que $-k = -2$, entonces se deduce de

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & -2 & 2 & -4 & 8 \\ \hline \text{Números alternados en signo} \Rightarrow & 1 & -1 & 2 & -4 & 7 \end{array}$$

que -2 es una cota inferior para las raíces de $f(x)$. Por tanto las raíces reales del polinomio deben estar en el intervalo $[-2, 1]$.

EJEMPLO 12

Por la regla de Descartes, sabemos que el polinomio

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 8x - 6$$

tiene raíces reales. Observe que en la división

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 1 & 3 & -10 & -8 & -6 \\ & & -5 & 10 & 0 & 40 \\ \hline & 1 & -2 & 0 & -8 & 34 \end{array}$$

podemos considerar el 0 de la tercera fila como $+0$. Puesto que los números de la tercera fila son alternadamente positivos y negativos, concluimos que -5 es una cota inferior para las raíces reales de $f(x)$.

Habrá notado que no hemos dado un método general para hallar las raíces irracionales de un polinomio. De hecho, usualmente es imposible determinar con exactitud todas las

raíces irracionales. Sin embargo, hay técnicas numéricas para hallar aproximaciones decimales de estas raíces. Una de estas técnicas se analiza en la sección 4.7.

EJERCICIO 4.4

En los problemas 1 al 10, utilice la regla de los signos de Descartes para determinar los posibles números de las raíces positivas y negativas del polinomio dado.

1. $f(x)=17x^2+9x-8$
2. $f(x)=3x^2+8x+1$
3. $f(x)=2x^3-5x^2+2x-3$
4. $f(x)=4x^3-5x-1$
5. $f(x)=3x^3+2x^2+4x+1$
6. $f(x)=2x^3-4$
7. $f(x)=-x^4+7x^3-2x-4$
8. $f(x)=2x^5-4x^4+3x^3+x-8$
9. $f(x)=x^5+x^4-x^3-x^2+x-1$
10. $f(x)=5x^6+2x^3+x+1$

En los problemas 11 al 26, halle todas las raíces racionales del polinomio dado.

11. $f(x)=3x^3+2x^2+2x-1$
12. $f(x)=5x^3-2x^2+3$
13. $f(x)=4x^3+12x^2+5x-3$
14. $f(x)=6x^4-3x^3+4x^2-2x-4$
15. $f(x)=8x^4-16x^3-2x^2+12x-4$
16. $f(x)=5x^4+2x^2+3$
17. $f(x)=3x^3-10x-4$
18. $f(x)=2x^4+4x^3+x^2+4x+4$
19. $f(x)=5x^4-3x^3-2x$
20. $f(x)=x^5-4x^3+4x$
21. $f(x)=x^5+5x^4+5x^3-5x^2-6x$
22. $f(x)=256x^6-4$
23. $f(x)=1/2x^4+7/12x^3-3/4x^2+1/6x$
24. $f(x)=0.4x^3-2x+1.6$
25. $f(x)=1.25x^3+0.5x^2+0.3x+0.05$
26. $f(x)=6x^4+x^3-16x^2+4x-2$

En los problemas 27 al 42, halle todas las raíces reales del polinomio dado.

27. $f(x)=x^3+x^2-3x-3$
28. $f(x)=2x^3+x^2-4x-2$
29. $f(x)=3x^3+x^2-6x-2$
30. $f(x)=4x^3+3x^2-100x-75$
31. $f(x)=81x^4-54x^2+1$
32. $f(x)=4x^4-20x^3-x^2+5x-1$
33. $f(x)=8x^3+x^2-16x-2$
34. $f(x)=6x^3+x^2+6x+1$
35. $f(x)=16x^4+16x^3-77x^2-80x-15$
36. $f(x)=x^4+5x^3-30x-36$
37. $f(x)=x^5-9x^4-18x^3+2x^2+22x+12$
38. $f(x)=18x^5-51x^4+21x^3-23x^2-9x+2$
39. $f(x)=6x^4-4x^3-5x^2+2x-1$
40. $f(x)=3x^6-10x^2-4$
41. $f(x)=0.4x^6-2x^2+1.6$
42. $f(x)=2.5x^6+x^4+0.6x^2+0.1$

En los problemas 43 al 48, halle todas las soluciones racionales de la ecuación.

43. $x^4+2x^3-10x^2+14x+21=0$
44. $5x^3-3x^2+8x+4=0$
45. $4x^4-8x^3+3x^2+2x-1=0$
46. $6x^4-5x^3-2x^2-8x-3=0$
47. $2x^3-9x^2+17x-24=0$
48. $9x^3+42x^2-35x-10=0$

En los problemas 49 al 58, halle las cotas superior e inferior para las raíces reales del polinomio dado.

49. $f(x)=x^3-3x^2-18x+4$
50. $f(x)=7x^3-14x^2+x-1$
51. $f(x)=2x^3-5x+1$
52. $f(x)=2x^3-6x+21$
53. $f(x)=x^3-3x^2-9x+12$
54. $f(x)=3x^3-2x^2+x-5$
55. $f(x)=x^4+6x^3-3x-7$
56. $f(x)=2x^4-x+5$
57. $f(x)=2x^5+3x^3+1$
58. $f(x)=x^6+x^4-x^2+8$

59. Sea $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, donde a_0, a_1, a_2, a_{n-1} son números enteros; ¿puede ser 1/2 raíz del polinomio?, ¿por qué?

60. Si k es un número primo tal que $k>2$, ¿cuáles son las posibles raíces racionales de

(a) $f(x)=kx^4-3x^2+2$?

(b) $f(x)=2x^4-3x^2+k$?

61. ¿Para qué valor de k será 2 una raíz de $f(x)=3x^3-2x^2+k$?

62. ¿Pueden hallarse valores de k tales que $x=-1$ sea una raíz de $f(x)=4x^4-2xk^2+4k^4$?

63. Determine para cuáles valores de k el polinomio $f(x)=2kx^3+3x^2-k^2x-3$ tiene $a-1$ como raíz.

64. Enumere, pero no pruebe, todas las raíces racionales posibles de $f(x)=8x^4-13x^2+x-6$

65. Halle el polinomio cúbico $f(x)$ que tiene a 0.5 y 3 como raíces y que cumple que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$.

66. Demuestre que $\sqrt{3}$ es una raíz de $f(x)=x^2-3$. Use el teorema 7 para probar que $\sqrt{3}$ es un irracional.

67. Demuestre que $2+\sqrt{3}$ es irracional.

68. Demuestre que $3+\sqrt[3]{7}$ es irracional.

69. ¿Cuál es el número máximo de veces que las gráficas de dos polinomios de grados n y m respectivamente con $n > m$, pueden intersecarse?

70. Considere el polinomio

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.\ .+a_1x+1$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, \ldots a_n$ son pares, ¿pueden ser 1 ó −1 raíces del polinomio? Explique.

71. ¿Es posible que la gráfica de un polinomio de grado par no tenga intersectos con el eje x? ¿Es posible que la gráfica de un polinomio de grado impar no tenga intersectos con el eje x?

72. Explique por qué todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.

4.5 Raíces complejas y el teorema fundamental del álgebra

En la sección anterior nos centramos en el problema de hallar raíces reales de una función polinomial de grado mayor que 2. En la discusión que sigue, consideramos raíces complejas de estas funciones.

EJEMPLO 1

La función polinomial $f(x) = x^2 + 1$ no tiene raíces reales, ya que $x^2 + 1 > 0$ para todos los números reales. Sin embargo, puesto que el número complejo i tiene la propiedad de que $i^2 = -1$, tenemos

$$f(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

y $$f(-i) = (-i)^2 + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

Por tanto, $f(x)$ tiene dos raíces complejas, i y $-i$.

Para un polinomio cuadrático $f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b y c constantes reales, sabemos que cuando $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales. Sin embargo, cuando $b^2 - 4ac < 0$, podemos escribir $-(b^2 - 4ac) > 0$; por tanto,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{-(b^2-4ac)}\,i}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a} \\ &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i \end{aligned}$$

En otras palabras, cuando $b^2 - 4ac < 0$, las raíces de un polinomio cuadrático $f(x) = ax^2 + bx + c$ son números complejos.

EJEMPLO 2

Halle las raíces de $f(x) = x^2 - 12x + 40$.

Solución. Según la fórmula cuadrática obtenemos

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(40)}}{2}$$

Esto es,

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$= \frac{12 \pm 4i}{2}$$

$$= 6 \pm 2i$$

Por tanto, las raíces de $f(x)$ son $6 + 2i$ y $6 - 2i$.

PARES CONJUGADOS

Observe tanto en el ejemplo 1 como en el 2 que las raíces complejas del polinomio dado son pares conjugados. En otras palabras, una raíz compleja es la conjugada de la otra. Esto no es coincidencia; las raíces complejas de polinomios con coeficientes reales *siempre* aparecen en pares conjugados. Para probar esto, utilizamos los siguientes resultados concernientes a los conjugados.

Si z_1 y z_2 son números complejos, entonces puede demostrarse que

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \text{ y } \overline{z_1^n} = \overline{z_1}^n \tag{17}$$

(Véase problema 72 en el ejercicio 2.4).

TEOREMA 8

Sea $f(x)$ un polinomio de grado $n > 1$ con coeficientes reales. Si z es una raíz compleja de $f(x)$, entonces el conjugado $\bar{z}$ es también una raíz de $f(x)$.

Prueba: Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde los coeficientes a_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, son números reales. Por hipótesis,

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

Sacando el conjugado de ambos lados de esta ecuación da

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{0}$$

Ahora, utilizando (17) y el hecho de que el conjugado de cualquier número real es el mismo número, obtenemos

$$a_n \bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0$$

Esto significa que $f(\bar{z}) = 0$, y por tanto, $\bar{z}$ es una raíz de $f(x)$, siempre que z sea una raíz.

EJEMPLO 3

Dado que $1 + 2i$ es una raíz del polinomio cúbico

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 20,$$

se deduce del teorema 8 que $1 - 2i$ es también una raíz.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

El siguiente teorema, llamado **teorema fundamental del álgebra,** se aplica a polinomios con coeficientes reales o complejos. Su demostración requiere matemática avanzada, y no se realizará.

TEOREMA 9

El teorema fundamental del álgebra

Un polinomio $f(x)$ de grado $n > 0$ tiene exactamente n raíces, donde una raíz de multiplicidad k se cuenta k veces.

Según el teorema 8, las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales se dan en pares conjugados. Por tanto cualquier polinomio de éstos debe tener un número par de raíces complejas. Por consiguiente, según el teorema 9, cualquier polinomio de *grado impar* con coeficientes reales tiene *al menos* un cero real. Por ejemplo, según el teorema fundamental del álgebra, sabemos que un polinomio cúbico tiene tres raíces. Estas podrían ser 3 números reales o un número real y dos complejos.

EJEMPLO 4

Halle todas las raíces de

$$f(x) = 2x^5 + x^4 + 10x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

Solución. Puesto que $f(x)$ es un polinomio de quinto grado, se deduce del análisis anterior que existen cinco raíces, y al menos una de ellas es real. Ahora, aplicando el teorema 7, vemos que las raíces racionales posibles son ± 4, ± 2, ± 1, y $\pm \frac{1}{2}$. Pero puesto que no hay variaciones de signo en $f(x)$, descartamos los números positivos de esta lista. Probando el resto de números negativos por medio de la división sintética, encontramos

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -\frac{1}{2} & 2 & 1 & 10 & 5 & 8 & 4 \\ & & -1 & 0 & -5 & 0 & -4 \\ \hline & 2 & 0 & 10 & 0 & 8 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

y por tanto $-\frac{1}{2}$ es una raíz de $f(x)$. Se deduce del teorema 4 que

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + \tfrac{1}{2})(2x^4 + 10x^2 + 8) \\ &= (2x + 1)(x^4 + 5x^2 + 4) \end{aligned}$$

Ahora, se puede verificar fácilmente que $q(x) = x^4 + 5x^2 + 4$ *no* tiene raíces racionales. Entonces, las raíces de $q(x)$ son o irracionales, o complejas. Observando que

$$x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$$

vemos que las raíces restantes de $f(x)$ son $-i$, i, $-2i$, y $2i$.

Si un número real c es raíz de un polinomio $f(x)$, entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$. Este resultado también se aplica para las raíces complejas. El siguiente teorema es una extensión natural del teorema del factor, y es consecuencia del teorema fundamental del álgebra.

TEOREMA 10

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (no necesariamente diferentes) las n raíces de la función polinomial de grado n:

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad n > 0$$

Entonces $f(x)$ puede escribirse como producto de factores lineales:

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) + \cdots + (x - c_n)$$

EJEMPLO 5

Sabemos por el ejemplo anterior que las raíces de

$$f(x) = 2x^5 + x^4 + 10x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

son $-\frac{1}{2}$, $-i$, i, $-2i$, y $2i$. Por consiguiente, según el teorema 10 podemos escribir

$$f(x) = 2(x + \tfrac{1}{2})(x + i)(x - i)(x + 2i)(x - 2i)$$

EJEMPLO 6

En el ejemplo 3 vimos que $1 + 2i$ y $1 - 2i$ son raíces de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 20$. Se deduce del teorema 10 que

$$f(x) = [x - (1 + 2i)][x - (1 - 2i)]q(x)$$

Dividiendo $f(x)$ por el polinomio cuadrático (con coeficientes reales),

$$[x - (1 + 2i)][x - (1 - 2i)] = x^2 - 2x + 5$$

encontramos

$$q(x) = x + 4$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= [x - (1 + 2i)][x - (1 - 2i)](x + 4) \\ &= (x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i)(x + 4) \end{aligned}$$

EJERCICIO 4.5

En los problemas 1 al 10, halle todas las raíces de la función polinomial dada. Escriba $f(x)$ como un producto de factores lineales.

1. $f(x)=3x^2+2x+1$
2. $f(x)=6x^2+4x+3$
3. $f(x)=4x^3-4x^2+9x-9$
4. $f(x)=2x^3+4x^2+x+2$
5. $f(x)=4x^3-2x^2+2x-1$
6. $f(x)=x^3+x^2+x+1$
7. $f(x)=2x^3+3x^2+3x+1$
8. $f(x)=x^4-x^3-3x^2+4x-4$
9. $f(x)=2x^4-32$
10. $f(x)=x^6-64$

En los problemas 11 al 14, halle una función polinomial $f(x)$ que tenga el grado dado y las raíces dadas.

11. Grado 2; $5i$
12. Grado 2; $3-2i$
13. Grado 3; $1+3i$, 4
14. Grado 4; $2i$, $1+i$
15. Halle un polinomio de cuarto grado con coeficientes reales que tenga $2 + 3i$ como una raíz de multiplicidad dos.
16. Demuestre que todo polinomio de coeficientes reales y grado impar tiene al menos una raíz real.
17. Verifique que $(1 + i)$ es una raíz de $f(x) = x^2 - ix - (1 + i)$. ¿Se deduce que su conjugado $(1 + i)$ es también una raíz de $f(x)$? Explique. Determine la otra raíz de $f(x)$.

18. ¿Existe algún polinomio $f(x)$ de coeficientes reales y grado 3 con raíces $-1, 1, i$? Explique.
19. Halle un polinomio $f(x)$ de grado 2 y coeficientes reales tal que $f(0) = 1$ y $f(2-i) = 0$. ¿Puede existir otro?
20. Halle un polinomio $f(x)$ de grado 3 y coeficientes reales tal que $f(-1) = 1$, $f(1) = -1$ y $f(-i) = 0$. ¿Existe otro?

En los problemas 21 al 30, halle las raíces restantes de cada polinomio dado que el número complejo indicado es una raíz.

21. $f(x)=2x^3-x^2+18x-9;\ \ 3i$
22. $f(x)=3x^3-20x^2+42x-20;\ \ 3-i$
23. $f(x)=x^3+2x^2+5x-26;\ \ -2+3i$
24. $f(x) = 4x^3 - 20x^2 - 21x - 18;\ \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}i$
25. $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 4;\ \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$
26. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1;\ \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$
27. $f(x) = x^4 - 14x^2 - 72;\ -2i$
28. $f(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x - 10;\ -2i$
29. $f(x) = x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 4x^2 - 13x + 10;\ 2+i$
30. $f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 3x - 18;\ g(x) = \bar{x}\,i$

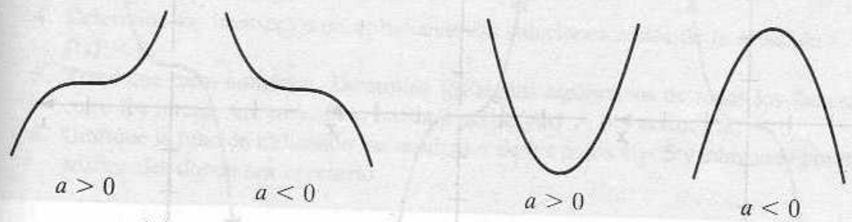
4.6 Gráficas de funciones polinomiales de grado mayor

La gráfica de una función lineal, o una función polinomial de primer grado, $f(x) = a_1x + a_0$, es siempre una recta. La gráfica de una función cuadrática, o una función polinomial de grado 2, $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, es siempre una parábola. Tales enunciados definitivos no pueden hacerse con respecto a la gráfica de una función polinomial de grado mayor. ¿Cuál es la forma de una función polinomial de quinto grado? Resulta que la gráfica de una función polinomial de grado ≥ 3 puede tener una o varias formas posibles. En general, graficar funciones polinomiales de grado ≥ 3 no es una labor directa y, a menudo, requiere técnicas avanzadas de cálculo. En consecuencia, en esta sección limitaremos nuestro análisis a graficar *tipos especiales* de funciones polinomiales de grados 3, 4, y 5.

FUNCION POLINOMIAL DE UN TERMINO

Comenzamos por considerar un caso especial de función potencia (véase sección 3.8).

$$f(x) = ax^n, \quad n \text{ un entero positivo} \tag{18}$$



(a) $f(x) = ax^n$, n impar (b) $f(x) = ax^n$, n par

FIGURA 19

Se dice también que la función en (18) es un **polinomio de un solo término.** Puesto que $f(0) = 0$, la gráfica de f pasa por el origen. La figura 19 ilustra las 4 posibles formas de la gráfica de $f(x) = ax^n$.

Cuando $a < 0$, la gráfica se obtiene de la gráfica de $f(x) = ax^n$, $a > 0$, por medio de una reflexión por el eje x. Observe que cuando n es un entero par, $(-x)^n = x^n$, y cuando n es un entero impar, $(-x)^n = -x^n$. En consecuencia, $f(x) = ax^n$ es una función par cuando n es par y una función impar cuando n es impar.

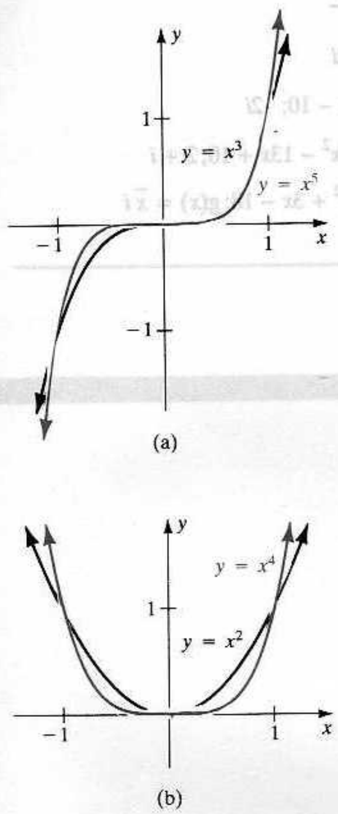


FIGURA 20

EJEMPLO 1

Compare las gráficas de cada uno de los siguientes pares de funciones:

(a) $y = x^3$, $y = x^5$
(b) $y = x^2$, $y = x^4$

Solución. Ya hemos visto las gráficas de $y = x^2$ (figura 9) y $y = x^3$ (figura 75, cap. 3). Para contrastar, las gráficas de $y = x^5$ y $y = x^4$ se muestran a color en la figura 20. Puesto que $a = 1 > 0$ para cada una de estas funciones, las gráficas son similares a las de la izquierda (*a*) y (*b*) de la figura 19.

GRAFICAS TRASLADADAS

Para $k > 0$, las gráficas de

$$y = a(x + k)^n,\ y = a(x - k)^n$$

y

$$y = ax^n + k,\quad y = ax^n - k$$

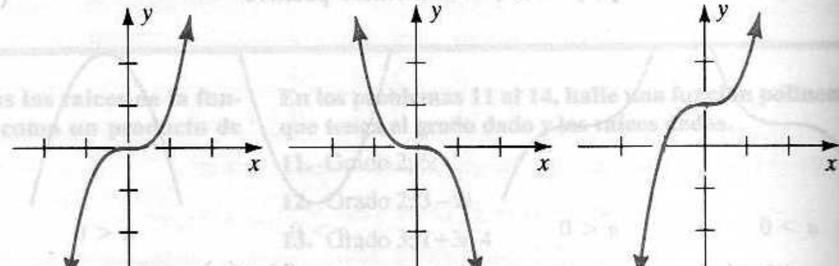
pueden obtenerse por medio de traslaciones horizontales y verticales, respectivamente, de la gráfica de $f(x) = ax^n$.

EJEMPLO 2

Compare las gráficas de lo siguiente.

(a) $f(x) = x^3$ **(b)** $f(x) = -x^3$
(c) $f(x) = x^3 + 1$ **(d)** $f(x) = (x - 3)^3$
(e) $f(x) = -x^3 + 2$ **(f)** $f(x) = (x + 2)^3 + 1$

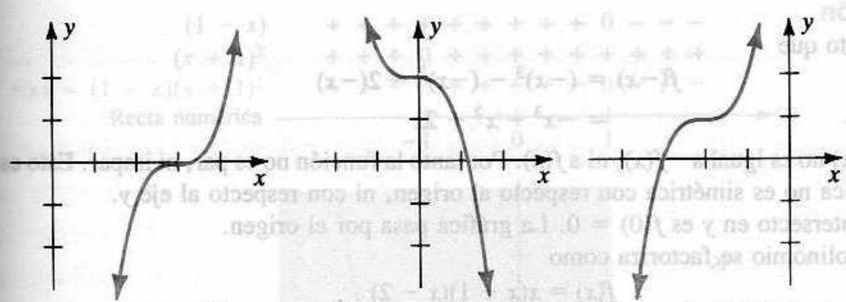
Solución. Las gráficas de las funciones en (b)−(f) pueden obtenerse de la gráfica de $f(x) = x^3$, mostrada en la figura 21(a), por medio de una traslación o una reflexión.



(a) $y = x^3$ (b) $y = -x^3$ (c) $y = x^3 + 1$

Reflexión de la gráfica de $y = x^3$ respecto del eje x.

Desplazamiento de la gráfica de $y = x^3$ una unidad hacia arriba



(d) $y = (x - 3)^3$ (e) $y = -x^3 + 2$ (f) $y = (x + 2)^3 + 1$

Desplazamiento de la gráfica de $y = x^3$ tres unidades a la derecha	Desplazamiento de la gráfica de $y = -x^3$ dos unidades hacia arriba.	Desplazamiento de la gráfica de $y = x^3$ dos unidades a la izquierda y una unidad hacia arriba.

FIGURA 21

En general, la gráfica de un polinomio de tercer grado,

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

puede tener una de cuatro formas básicas, las cuales se muestran en la figura 22.

La gráfica de un polinomio de cuarto grado,

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

puede tener una de las seis formas mostradas en la figura 23.

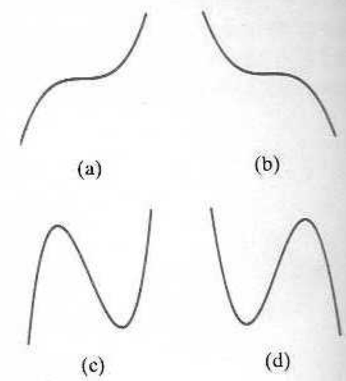


FIGURA 22

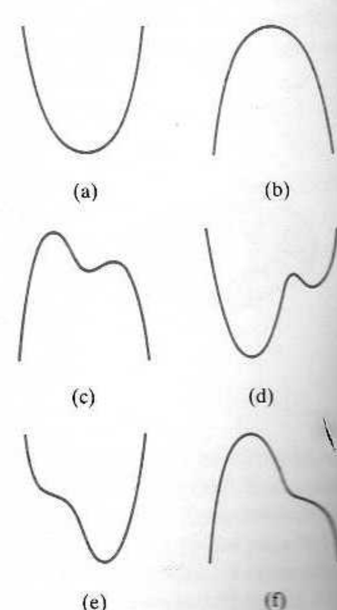


FIGURA 23

POLINOMIOS QUE SE PUEDEN FACTORIZAR

En los ejemplos restantes consideraremos sólo gráficas de polinomios que se pueden factorizar. En la mayoría de los casos, se puede obtener una gráfica totalmente precisa utilizando el procedimiento enumerado a continuación.

Sugerencias para graficar una función polinómica $y = f(x)$

1. Calcule $f(-x)$ para determinar si la gráfica tiene alguna simetría.
2. Calcule el intersecto $f(0)$ en y.
3. Factorice el polinomio.
4. Determine los intersectos en x, hallando las soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$.
5. Trace una recta numérica. Determine los signos algebraicos de todos los factores entre los intersectos en x. Esto indicará dónde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$.
6. Grafique la función utilizando los resultados de los pasos 1 − 5 y marcando puntos adicionales donde sea necesario.

En los intervalos en los que los valores de $f(x)$ son positivos ($f(x) > 0$), la gráfica de la función está por *encima* del eje x. La gráfica de la función está por *debajo* del eje x, en aquellos intervalos donde los valores de $f(x)$ son negativos ($f(x) < 0$).

EJEMPLO 3

Grafique $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

Solución

1. Puesto que

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - (-x)^2 - 2(-x) \\ &= -x^3 - x^2 + 2x \end{aligned}$$

$f(-x)$ no es igual a $-f(x)$, ni a $f(x)$. Por tanto la función no es par, ni impar. Esto es, la gráfica no es simétrica con respecto al origen, ni con respecto al eje y.

2. El intersecto en y es $f(0) = 0$. La gráfica pasa por el origen.
3. El polinomio se factoriza como

$$f(x) = x(x + 1)(x - 2)$$

4. A partir del paso 3 vemos que $f(x) = 0$ para $x = 0$, $x = -1$, y $x = -2$. Los intersectos en x son 0, -1, y 2.

5 y 6. El diagrama de signos y la gráfica se muestran en la figura 24

x	− − − − 0 + + + + + + + +
$x + 1$	− − 0 + + + + + + + + + +
$x - 2$	− − − − − − − − − − 0 + +
$f(x) = x(x + 1)(x - 2)$	− − 0 + + 0 − − − − − − 0 + +
Recta numérica	−1 0 2

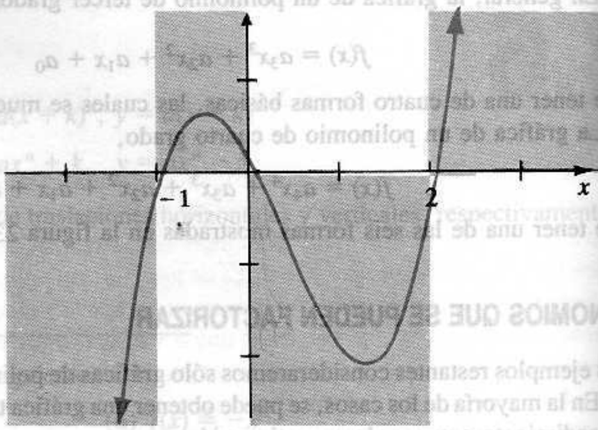


FIGURA 24

En el ejemplo 3 no hicimos ningún intento por localizar con precisión los **puntos críticos** de la gráfica, esto es, los puntos donde la función polinomial cambia de creciente a decreciente, o de decreciente a creciente. Una inspección a la figura 24 muestra que la gráfica tiene dos puntos críticos. Localizar estos puntos con precisión, requeriría, en general, técnicas de cálculo. Sin embargo, observamos que una parábola tiene solamente un punto crítico −a saber, su vértice− que puede encontrarse utilizando las técnicas de la sección 4.1.

EJEMPLO 4

Grafique $f(x) = (1 - x)(x + 1)^2$.

Solución

1. La función no es par ni impar.
2. El intersecto en y es $f(0) = 1$.
3. El polinomio ya está factorizado.
4. La inspección de la función muestra que $f(x) = 0$ en $x = -1$ y $x = 1$. Los intersectos en x son -1 y 1.

5 y 6. El diagrama de signos y la gráfica se muestran en la figura 25

$(1 - x)$	+ + + + + + + + + 0 − − −
$(x + 1)^2$	+ + + 0 + + + + + + + + +
$f(x) = (1 - x)(x + 1)^2$	+ + + 0 + + + + + 0 − − −
Recta numérica	−1 0 1

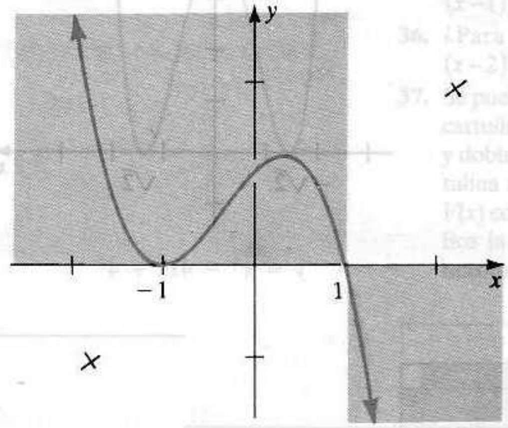


FIGURA 25

TANGENTE AL EJE x

En el ejemplo 4 observamos que a pesar de que $f(-1) = 0$, la gráfica no atraviesa el eje x en $x = -1$, sino que solamente lo "toca". Esto se debe al hecho de que $f(x)$ no cambia signos en $x = -1$, ya que el exponente en $(x + 1)^2$ es par.

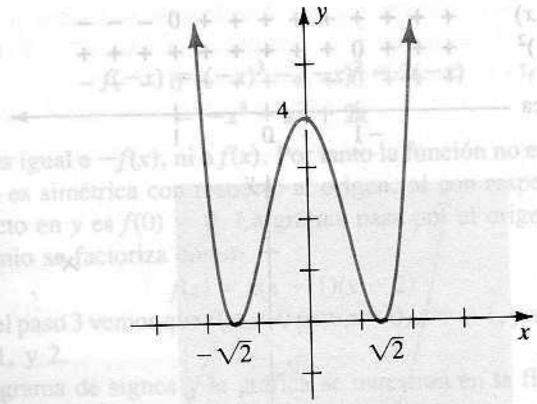
En general, si una función polinomial $f(x)$ contiene el factor $(x - k)^n$, $n > 1$, la gráfica será **tangente al eje x** en $x = k$. Si n es *par*, la gráfica estará o completamente por encima o completamente por debajo del eje de x, en un intervalo que contiene $x = k$ (excepto, por supuesto, en el punto de tangencia $x = k$, donde toca al eje x). Sin embargo, si n es *impar*, la gráfica de $f(x)$ atravesará el eje x como en la figura 21(d).

EJEMPLO 5

Grafique $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$.

Solución

1. Puesto que $f(-x) = f(x)$, la función es par y, por tanto, su gráfica es simétrica con respecto al eje y.
2. El intersecto en y es $f(0) = 4$.
3. Reconocemos que la función puede escribirse como
$$f(x) = (x^2 - 2)^2, \quad \text{o} \quad f(x) = (x + \sqrt{2})^2(x - \sqrt{2})^2$$
Por la discusión anterior, sabemos que la gráfica es tangente al eje x en $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.
4. Los intersectos en x son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.
5. No hay necesidad de un diagrama de signos en este caso, ya que $(x^2 - 2)^2 \geq 0$ para todo x.
6. La gráfica es simétrica con respecto al eje y, pasa por los tres puntos $(0, 4)$, $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$, y es tangente, pero no atraviesa el eje x en $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$. La gráfica en la figura 26 es una interpretación de estos datos.



$y = x^4 - 4x^2 + 4$

FIGURA 26

EJEMPLO 6

Grafique $f(x) = x^4 - 2x^3$.

Solución

1. La función no es par ni impar.
2. El intersecto en y es $f(0) = 0$.
3. El polinomio se factoriza como

$$f(x) = x^3(x - 2)$$

Debido a que $x^3 = (x - 0)^3$, la gráfica es tangente al eje x en $x = 0$. Además, puesto que el exponente en el factor $(x - 0)^3$ es un entero impar positivo, la gráfica atraviesa el eje x en 0.

4. Los intersectos en x son 0 y 2.
5. y 6. El diagrama de signos y la gráfica se muestran en la figura 27.

x^3	− − − 0 + + + + + + + + +
$x - 2$	− − − − − − − − − 0 + + +
$f(x) = x^3(x - 2)$	+ + + 0 − − − − − 0 + + +
Recta numérica	0 2

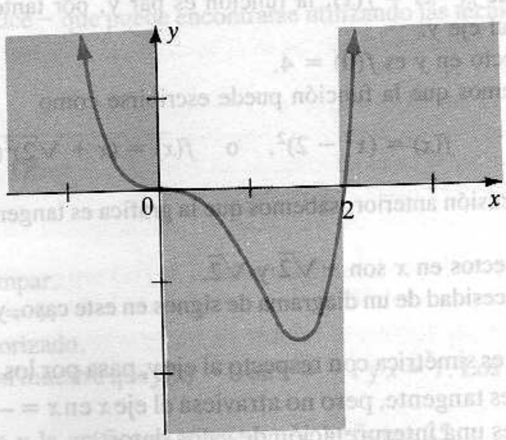


FIGURA 27

EJERCICIO 4.6

En los problemas 1 al 30, grafique la función polinomial dada.

1. $f(x)=x^3-2$
2. $f(x)=x^3+2$
3. $f(x)=(x-3)^3+1$
4. $f(x)=(x-3)^3-1$
5. $f(x)=-(x-3)^3$
6. $f(x)=1-(x-3)^3$
7. $f(x)=(x-2)^4-1$
8. $f(x)=4-(x-2)^4$
9. $f(x)=x^3-4x$
10. $f(x)=4x-x^3$
11. $f(x)=2x^3-x^2$
12. $f(x)=-2x(x-1)^2$
13. $f(x)=x^3-5x^2+6x$
14. $f(x)=x^3+8x^2+12x$
15. $f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$
16. $f(x)=(1-x)(x-2)(x+3)$
17. $f(x)=x^4+7x^3+12x^2$
18. $f(x)=x^2(x-4)^2$
19. $f(x)=x(x^2-1)(x-2)$
20. $f(x)=x^2(x^2-1)$
21. $f(x)=x^4-3x^2-4$
22. $f(x)=x^4+7x^3+12x^2$
23. $f(x)=-x^4+4x^2-4$
24. $f(x)=x^4-10x^2+25$
25. $f(x)=x^4+2x^3$
26. $f(x)=x(x-3)^3$
27. $f(x)=x^5-2x^3$
28. $f(x)=x(x^2-4)^2$
29. $f(x)=(x^2-1)^2(x-1)$
30. $f(x)=x(x+2)^2(x-1)(x-3)$
31. Halle el valor que debe tomar k para que -2 sea un intersecto en x para la gráfica de $f(x)=kx^5+3x^4+2x^2+8$.
32. Halle qué valores deben tomar k_1 y k_2 para que -1 y 1 sean intersectos en x para la gráfica de $f(x)=x^5+k_1x^4-k_2x^3-x+3$.
33. Halle el valor que debe tomar k para que 8 sea un intersecto en y de la gráfica de $f(x)=x^7+7x^5-4x^3+12x^2+18x-2k+1$.
34. Si n es un entero positivo, ¿qué condición debe cumplir para que la gráfica $f(x)=(x-1)^n(x+1)$ atraviese el eje x en $x=1$? Explique.
35. ¿Para cuáles enteros positivos n, la gráfica de $f(x)=(x-1)^{2n}(x-1)^{2n-1}$ atraviesa el eje x en $x=1$? ¿En $x=-1$?
36. ¿Para cuáles enteros positivos n, la gráfica de $f(x)=(x-2)^n(x-1)(x-2)$ no atraviesa al eje x en $x=2$?
37. Se puede hacer una caja abierta de un pedazo rectangular de cartulina, recortando un cuadrado de lado x de cada esquina y doblando los lados hacia arriba (véase figura 28). Si la cartulina mide 60 cm por 40 cm, exprese el volumen de la caja $V(x)$ como una función de x. Trace su gráfica para $x>0$. Utilice la gráfica de $V(x)$ para aproximar el valor de x que maximiza su volumen.

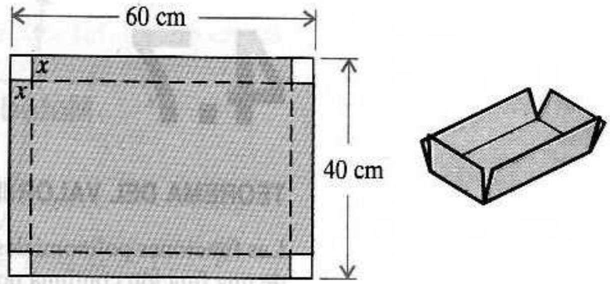


FIGURA 28

38. La caja construida en el problema 37 necesitará cinta, o algún otro sujetador en las esquinas, para mantener su forma. Una caja abierta que se sujeta por sí misma puede construirse recortando un cuadrado de longitud x de cada esquina de un pedazo rectangular de cartulina, recortando las líneas continuas, y doblando en las líneas interrumpidas, como lo muestra la figura 29. Halle una función polinomial $V(x)$ que dé el volumen de la caja resultante si la cartulina original mide 60 cm por 40 cm. Trace la gráfica de $V(x)$ para $x>0$; utilice la gráfica para aproximar el valor de x que maximiza el volumen.

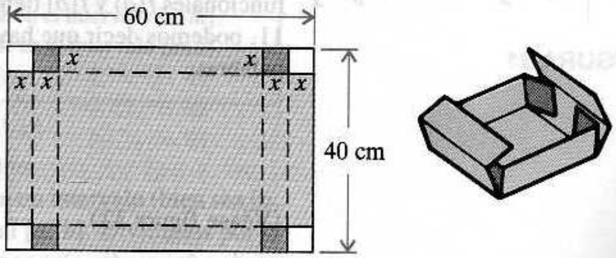


FIGURA 29

39. Con un pedazo rectangular de cartulina se puede construir una caja con una tapa que se sujeta por sí misma, recortando por las líneas continuas y doblando por las líneas interrumpidas como se muestra en la figura 30 (las pizzas para llevar fuera del restaurante a menudo se empacan en cajas construidas de esta manera). Halle una función polinomial $V(x)$ que dé el volumen de la caja resultante si la cartulina original mide 60 cm por 40 cm. Trace la gráfica para aproximar el valor de x que maximiza el volumen $V(x)$.

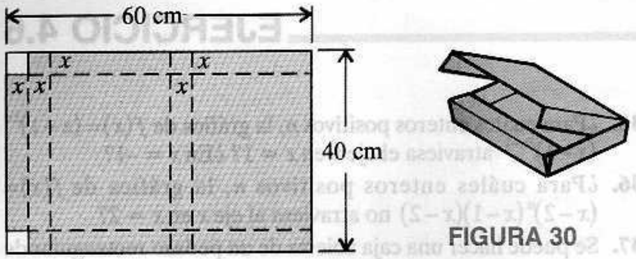


FIGURA 30

40. La flexión de una viga de 15 pies de largo a una distancia horizontal x de un extremo está dada por

$$Y = \frac{1}{3000}\left(x^3 - 45x^2\right)$$

trace la curva que representa la figura (esto es, para $0 \leq x \leq 15$).

4.7 Método para aproximar las raíces de un polinomio

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Las funciones polinomiales son *funciones continuas*. Como su nombre lo indica, la gráfica de una función continua no tiene divisiones ni vacíos. En realidad, una función continua a menudo se describe informalmente como una cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz de la hoja. El siguiente resultado, conocido como el **teorema del valor intermedio,** es una consecuencia directa de la propiedad de continuidad.

TEOREMA 11

Suponga que f es una función polinomial. Si $f(a) \neq f(b)$ para $a < b$, y si N es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número c en el intervalo $[a, b]$ para el cual $f(c) = N$.

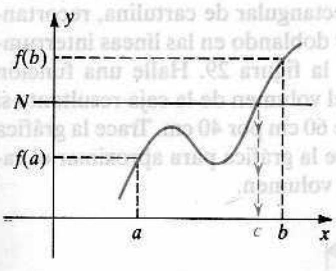


FIGURA 31

Como lo vemos en la figura 31, el teorema del valor intermedio simplemente enuncia que f adopta todos los valores entre los números $f(a)$ y $f(b)$. En particular, si los valores funcionales $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces identificando $N = 0$ en el teorema 11, podemos decir que hay al menos un número c en $[a, b]$ para el cual $f(c) = 0$. En otras palabras:

$$\text{Si } f(a) > 0,\ f(b) < 0 \quad \text{o} \quad \text{si } f(a) < 0,\ f(b) > 0$$
$$\text{entonces } f \text{ tiene al menos una raíz en } [a, b]. \tag{19}$$

(Véase figura 32).

EJEMPLO 1

En el ejemplo 4 de la sección 4.4 vimos que la función polinomial $f(x) = x^3 - 3x - 1$ tiene exactamente una raíz positiva y dos, o ninguna raíz negativa. Utilizando el teorema 7, podemos verificar que f no tiene raíces racionales. Pero según los datos de la tabla adjunta podemos concluir de (19) que f tiene 3 raíces irracionales. Hay una raíz en cada uno de los intervalos $[-2, -1]$, $[-1, 0]$ y $[1, 2]$. La gráfica aproximada de la función f mostrada en la figura 33,, se obtuvo de esta información.

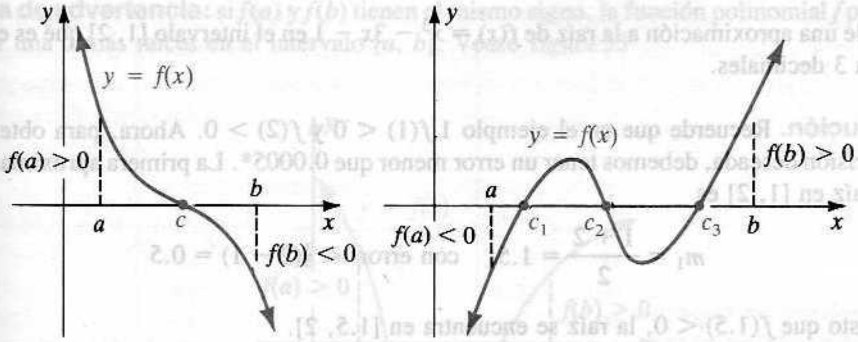


FIGURA 32 (a) $f(c) = 0$ (b) $f(c_1) = 0, f(c_2) = 0, f(c_3) = 0$

x	$f(x)$
-2	-3
-1	1
0	-1
1	-3
2	1

Signos opuestos

Signos opuestos

Signos opuestos

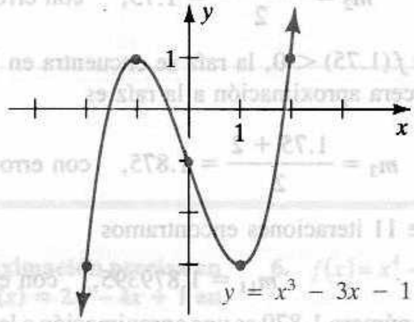


FIGURA 33

En el siguiente ejemplo obtendremos una aproximación a una raíz irracional, utilizando una técnica llamada el **método de bisección,** que puede sintetizarse como sigue:

Método de bisección

Sea $f(x)$ una función polinomial tal que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos.

1. Divida el intervalo $[a, b]$ por la mitad, hallando su punto medio $m = (a + b)/2$.
2. Calcule $f(m)$.
3. Si $f(a)$ y $f(m)$ tienen signos opuestos, entonces f tiene una raíz en el intervalo $[a, m]$. Si $f(m)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces f tiene una raíz en el intervalo $[m, b]$. Si $f(m) = 0$, entonces m es una raíz de f.

Si $m = (a + b)/2$ no es una raíz de f, entonces hay una raíz en un intervalo (bien sea $[a, m]$ o $[m, b]$ que tiene la mitad de la longitud del intervalo original $[a, b]$. Dividimos por la mitad este intervalo de menor longitud: el nuevo punto medio es una raíz, o hemos localizado una raíz en un intervalo que tiene la cuarta parte de la longitud del intervalo $[a, b]$. Continuando de esta manera, podemos localizar una raíz de la función en intervalos sucesivos de menor longitud. Luego tomaremos los puntos medios de estos intervalos como aproximaciones a una raíz de la función. Utilizando este método, vemos en la figura 34 que el error en la aproximación a una raíz en un intervalo es menor que la mitad de la longitud del intervalo.

Debido a que el método de bisección se usa repetitivamente, se denomina **técnica iterativa.**

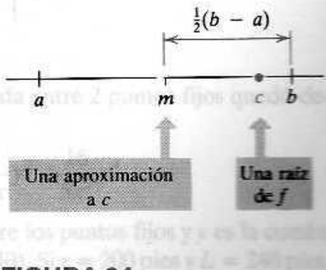


FIGURA 34

EJEMPLO 2

Halle una aproximación a la raíz de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en el intervalo $[1, 2]$ que es exacto para 3 decimales.

Solución. Recuerde que en el ejemplo 1 $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$. Ahora, para obtener la precisión deseada, debemos tener un error menor que 0.0005*. La primera aproximación a la raíz en $[1, 2]$ es

$$m_1 = \frac{1 + 2}{2} = 1.5, \quad \text{con error} < \tfrac{1}{2}(2 - 1) = 0.5$$

Puesto que $f(1.5) < 0$, la raíz se encuentra en $[1.5, 2]$.

La segunda aproximación a la raíz es

$$m_2 = \frac{1.5 + 2}{2} = 1.75, \quad \text{con error} < \tfrac{1}{2}(2 - 1.5) = 0.25$$

Puesto que $f(1.75) < 0$, la raíz se encuentra en $[1.75, 2]$.

La tercera aproximación a la raíz es

$$m_3 = \frac{1.75 + 2}{2} = 1.875, \quad \text{con error} < \tfrac{1}{2}(2 - 1.75) = 0.125$$

Después de 11 iteraciones encontramos

$$m_{11} = 1.879395, \quad \text{con error} < 0.0005$$

Por tanto el número 1.879 es una aproximación a la raíz de f en $[1, 2]$ que es precisa para tres decimales.

Dejamos como ejercicio las aproximaciones a las raíces de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en los intervalos $[-2, -1]$ y $[-1, 0]$.

Puesto que el proceso de iteración del método de bisección es a menudo largo y tedioso, es conveniente utilizar un computador. Hemos listado a continuación un programa de computador escrito en BASIC. Usted sólo necesita proporcionar una función en la línea 20.

```
10   REM METODO DE BISECCION
20   DEF FNC(X) =
30   INPUT "ESCRIBA EL EXTREMO IZQUIERDO DEL INTERVALO:", A
40   INPUT "ESCRIBA EL EXTREMO DERECHO DEL INTERVALO:", B
50   INPUT "ESCRIBA UNA COTA PARA EL ERROR:", E
60   LET M = (A + B)/2
70   IF (B - A)/2 < E GOTO 170
80   IF FNC(M) = 0 GOTO 170
90   IF FNC(A)*FNC(M) < 0 GOTO 140
100  REM LA RAIZ ESTA EN LA MITAD DERECHA DEL INTERVALO
110  A = M
120  GOTO 60
130  REM LA RAIZ ESTA EN LA MITAD IZQUIERDA DEL INTERVALO
140  B = M
150  GOTO 60
160  REM PRESENTA LA RAIZ
170  PRINT "LA RAIZ ES"; M; "CON UN ERROR A LO MAS"; E
180  END
```

* Si deseamos una aproximación que sea precisa para dos decimales, iteramos hasta que el error sea menor que 0.005.

Nota de advertencia: si $f(a)$ y $f(b)$ tienen el mismo signo, la función polinomial f podría tener una o más raíces en el intervalo $[a, b]$. Véase figura 35

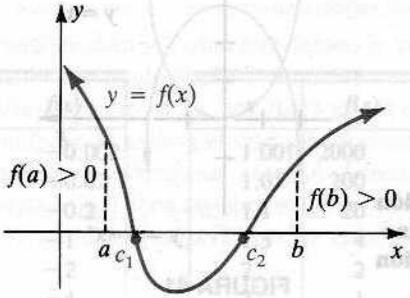


FIGURA 35

EJERCICIO 4.7

En los problemas 1 y 2, halle una aproximación precisa en tres cifras decimales, para la raíz de $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$ en el intervalo indicado.

1. $[0, 1]$ **2.** $[1, 2]$

3. La función $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$ tiene raíz en el intervalo $[-2, -1]$. ¿Puede justificar el porqué? Dé una aproximación de esa raíz con tres cifras decimales exactas.

En los problemas 4 al 7, utilice el método de bisección para aproximar con una precisión de tres cifras decimales la(s) raíz (raíces) indicada(s) por la gráfica de la función dada.

4. $f(x) = x^3 + x - 1$

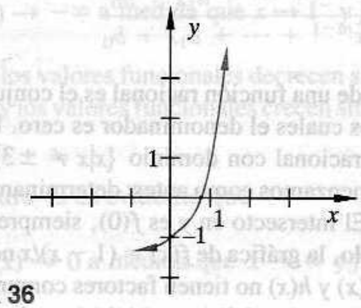


FIGURA 36

5. $f(x) = -x^3 - 2x + 1$

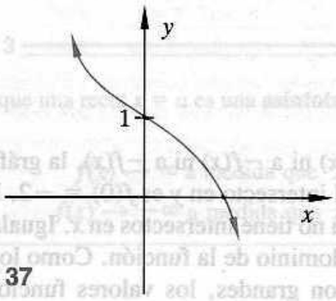


FIGURA 37

6. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9$

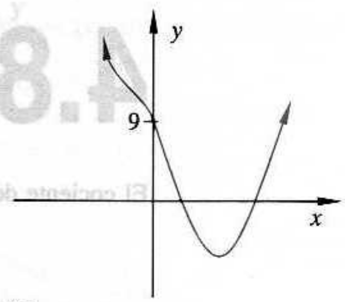


FIGURA 38

7. $f(x) = x^3 - 3x - 1$

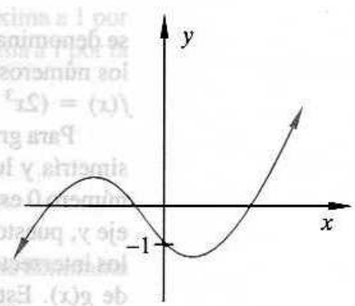


FIGURA 39

8. La longitud L de una cuerda entre 2 puntos fijos quedó determinada por

$$L = x + \frac{4}{3x}y^2 - \frac{16}{5x^3}y^4$$

donde x es la distancia entre los puntos fijos y y es la comba de la cuerda (véase figura 40). Si $x = 200$ pies y $L = 240$ pies, utilice el método de bisección para aproximar con una exactitud de dos cifras decimales la comba de la cuerda.

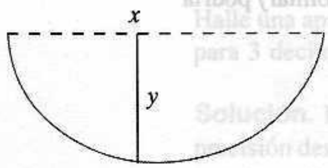


FIGURA 40

En los problemas 9 y 10, utilice el método de bisección para dar una aproximación con tres cifras decimales exactas de la(s) coordenada(s) x del punto(s) de intersección de las gráficas dadas.

9.

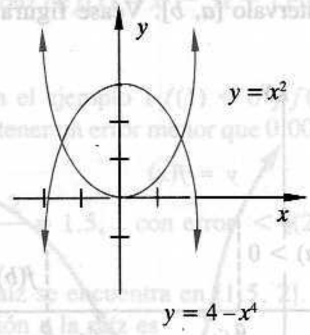


FIGURA 41

10.

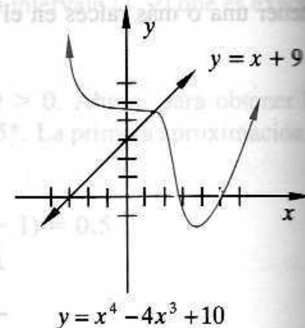


FIGURA 42

4.8 Funciones racionales

El cociente de dos funciones polinomiales

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

se denomina **función racional.** El dominio de una función racional es el conjunto de todos los números reales excepto aquellos para los cuales el denominador es cero. Por ejemplo, $f(x) = (2x^3 - 1)/(x^2 - 9)$ es una función racional con dominio $\{x|x \neq \pm 3\}$.

Para graficar una función racional, comenzamos como antes: determinamos cualquier simetría y luego hallamos los intersectos. El intersecto en y es $f(0)$, siempre y cuando el número 0 esté en el dominio de f. Por ejemplo, la gráfica de $f(x) = (1 - x)/x$ no atraviesa el eje y, puesto que $f(0)$ no está definido. Si $g(x)$ y $h(x)$ no tienen factores comunes, entonces los intersectos en x de la gráfica de una función racional $f(x) = g(x)/h(x)$ son las raíces reales de $g(x)$. Esto es, la única forma como $f(x) = g(x)/h(x) = 0$ es teniendo $g(x) = 0$.

EJEMPLO 1

Grafique la función $f(x) = 2/(x - 1)$.

Solución. Puesto que $f(-x)$ no es igual a $f(x)$ ni a $-f(x)$ ni a $-f(x)$, la gráfica de f no es simétrica con respecto al eje y o al origen. El intersecto en y es $f(0) = -2$. Puesto que el numerador de la función nunca es 0, la gráfica no tiene intersectos en x. Igualando el denominador a 0, vemos que $x = 1$ no está en el dominio de la función. Como lo muestran las tablas adjuntas, cuando los valores de $|x|$ son grandes, los valores funcionales correspondientes están cerca a 0. Esto es, la gráfica de la función se aproxima al eje x a medida que $|x|$ aumenta sin límite. De la misma manera, para valores de x cercanos a 1, los valores funcionales correspondientes son grandes en valor absoluto. Por tanto, la gráfica de la función se aproxima a la recta vertical $x = 1$ a medida que x se aproxima a 1. La gráfica se muestra en la figura 43

x	$f(x)$
-999	-0.002
-99	-0.02
-9	-0.2
-1	-1
0	-2
0.5	-4
0.9	-20
0.99	-200
0.999	-2000

x	$f(x)$
1.001	2000
1.01	200
1.1	20
1.5	4
2	2
3	1
11	0.2
101	0.02
1001	0.002

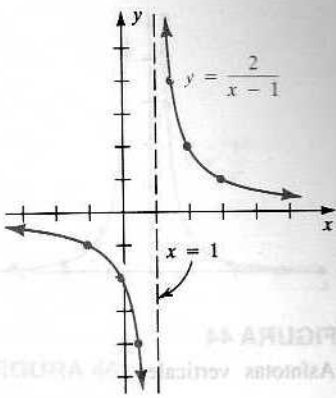


FIGURA 43

ASINTOTAS

Para indicar que x se está aproximando a un número a, utilizamos la notación

$x \to a^-$ para indicar que x se está aproximando a a por la *izquierda*, y
$x \to a^+$ para indicar que x se está aproximando a a por la *derecha*.

También utilizamos la notación

$x \to \infty$ para indicar que x *crece sin límite*, y
$x \to -\infty$ para indicar que x *decrece sin límite*.

Interpretaciones similares se dan a los símbolos $f(x) \to \infty$ y $f(x) \to -\infty$.

Por tanto, en el ejemplo 1, podemos escribir

$$f(x) \to -\infty \text{ a medida que } x \to 1^- \text{ y } f(x) \to \infty \text{ a medida que } x \to 1^+$$

En palabras, los valores funcionales decrecen sin límite a medida que x se aproxima a 1 por la izquierda, y los valores funcionales crecen sin límite a medida que x se aproxima a 1 por la derecha.

En la figura 43 es evidente que

$$f(x) \to 0 \text{ a medida que } x \to \infty \text{ y } f(x) \to 0 \text{ a medida que } x \to -\infty$$

La recta $x = 1$ se denomina **asíntota vertical** para la gráfica de f, y la recta $y = 0$ se denomina **asíntota horizontal.** Estos dos conceptos se definen como sigue.

DEFINICION 3

Se dice que una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de una función f si

$$f(x) \to \infty \text{ a medida que } x \to a^- \text{ o } x \to a^+, \text{ o}$$
$$f(x) \to -\infty \text{ a medida que } x \to a^- \text{ o } x \to a^+$$

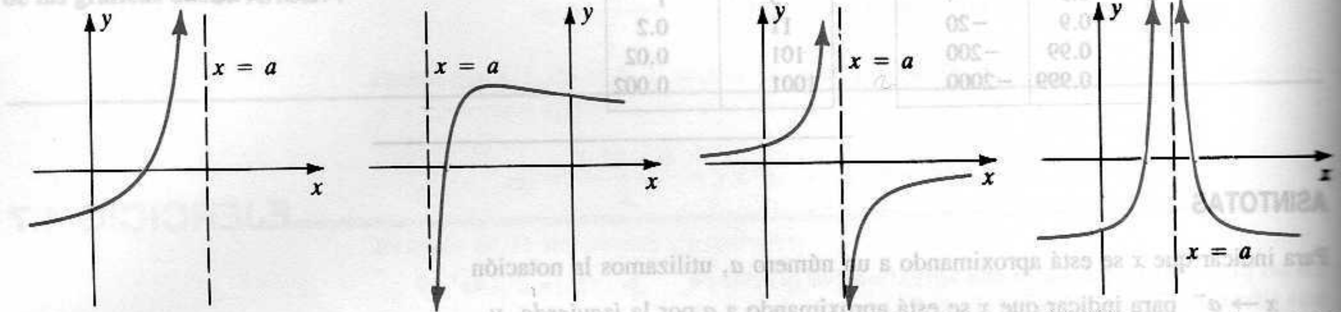
DEFINICION 4

Se dice que una recta $y = c$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de una función f si

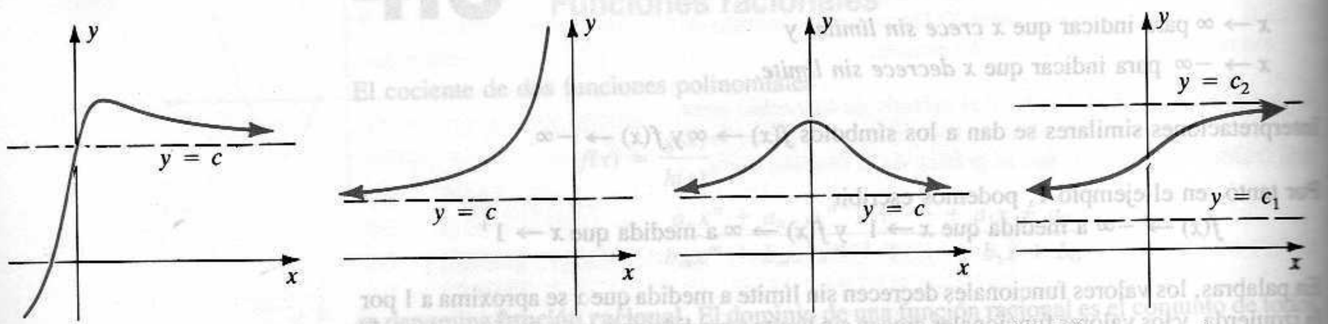
$$f(x) \to c \text{ a medida que } x \to -\infty \quad \text{o} \quad x \to \infty$$

La figura 44 ilustra el comportamiento ilimitado de una función cerca de una asíntota vertical $x = a$. En la figura 45hemos ilustrado algunas asíntotas horizontales típicas. Observamos, con ayuda de la figura 45(d) que, en general, la gráfica de una función puede tener máximo *dos* asíntotas horizontales pero la gráfica de una *función racional* puede tener máximo *una* asíntota horizontal. Además, una gráfica de una función *nunca* puede atravesar una asíntota, vertical pero, como se muestra en la figura 45(a), una gráfica puede atravesar una asíntota horizontal varias veces. (Véanse problemas 19, 27, y 28).

FIGURA 44
Asíntotas verticales



(a) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$ (b) $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ (c) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$, $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ (d) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$, $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^+$



(a) $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$ (b) $f(x) \to c$ cuando $x \to -\infty$ (c) $f(x) \to c$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$ (d) $f(x) \to c_1$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to c_2$ cuando $x \to \infty$

FIGURA 45
Asíntotas horizontales

En un nivel práctico, las asíntotas verticales pueden determinarse para una función racional, encontrando las raíces reales de su denominador.

Asíntotas verticales

Sea $$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{g(x)}{h(x)}$$

una función racional tal que $g(x)$ y $h(x)$ no tengan factores comunes. La recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de f si a es un número real tal que $h(a) = 0$.

EJEMPLO 2

Grafique la función $f(x) = 1/x^2$.

Solución. La función no tiene intersectos en x o y. Pero $f(-x) = 1/(-x)^2 = f(x)$ indica que la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y. Ya que el denominador de la función racional es 0 cuando $x = 0$, concluimos que la recta $x = 0$ (eje y) es una asíntota vertical. Además, cuando $x \to \infty$, vemos que $f(x) \to 0$ y por tanto la recta $y = 0$ (eje x) es una asíntota horizontal. Al usar esta información con los puntos que se obtienen de la tabla adjunta, obtenemos la gráfica que se observa en la figura 46.

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	4
1	1
2	$\frac{1}{4}$

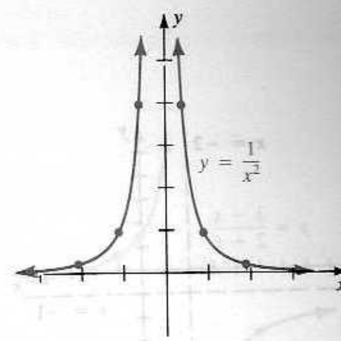


FIGURA 46

EJEMPLO 3

Grafique la función $f(x) = 1/(x + 4)^2$.

Solución. La gráfica de $f(x) = 1/(x + 4)^2$ es la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ trasladada cuatro unidades a la izquierda. En otras palabras, la recta $x = -4$ es la asíntota vertical. Al usar la figura 51 obtenemos la gráfica de la figura 47. Nótese que la función dada ahora tiene un intersecto en y $f(0) = 1/4^2 = 1/16$.

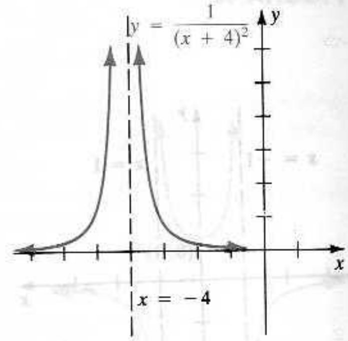


FIGURA 47

Un método para determinar si la gráfica de una función racional tiene una asíntota horizontal es dividir tanto el numerador como el denominador por la potencia más alta de x que *exista en el denominador*. Entonces examinamos la conducta del cociente resultante a medida que $x \to -\infty$ y $x \to \infty$.

EJEMPLO 4

Grafique la función $f(x) = (3 - x)/(2 + x)$.

Solución. La gráfica de f no es simétrica con respecto al eje y o al origen. El intersecto en y es $f(0) = \frac{3}{2}$, y el intersecto en x es $x = 3$. Puesto que el numerador y el denominador no tienen factores comunes y ya que el denominador es 0 cuando $x = -2$, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical. Para hallar asíntotas horizontales, dividimos el numerador y el denominador por x:

$$f(x) = \frac{\frac{3}{x} - \frac{x}{x}}{\frac{2}{x} + \frac{x}{x}} = \frac{\frac{3}{x} - 1}{\frac{2}{x} + 1}$$

A medida que $x \to -\infty$ y $x \to \infty$, los términos $3/x$ y $2/x$ se aproximan a 0 y los valores funcionales de $f(x)$ están cerca de $-1/1 = -1$. Por tanto, la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal. La gráfica se muestra en la figura 48 con las líneas punteadas indicando las asíntotas.

x	$f(x)$
-5	$-\frac{8}{3}$
-3	-6
-1	4
0	$\frac{3}{2}$
1	$\frac{2}{3}$
3	0

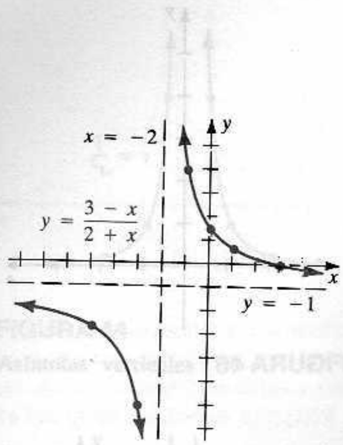


FIGURA 48

EJEMPLO 5

Grafique la función $f(x) = 1/(1 - x^2)$.

Solución. Puesto que

$$f(-x) = \frac{1}{1-(-x)^2} = \frac{1}{1-x^2} = f(x)$$

sabemos que la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y. El intersecto en y es $f(0) = 1$; no hay intersectos en x porque el numerador 1 nunca es cero. A medida que $x \to -\infty$ y $x \to \infty$, los valores funcionales se aproximan a 0. Por tanto la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal. Finalmente, resolviendo $1 - x^2 = 0$, encontramos que $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. Con esta información es posible dar un esbozo aproximado de la gráfica (véase figura 49). Como en los ejemplos anteriores, es buena idea marcar algunos puntos en cualquier lado de las asíntotas verticales.

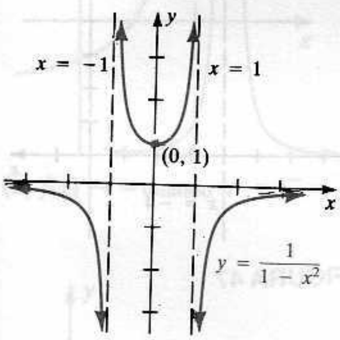


FIGURA 49

En general, el siguiente resultado sobre asíntotas horizontales puede probarse para funciones racionales de una manera similar a la ilustrada en el ejemplo 4.

Asíntotas horizontales

Sea

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{g(x)}{h(x)}$$

una función racional.

(i) Si $n < m$, entonces la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal.
(ii) Si $n = m$, entonces la recta $y = a_n/b_m$ es una asíntota horizontal.
(iii) Si $n > m$, entonces la gráfica de f no tiene asíntota horizontal.

EJEMPLO 6

Determine si la gráfica de la función dada f posee una asíntota horizontal.

(a) $f(x) = \dfrac{5x^3 + 1}{2x + 6}$

(b) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{8x^2 + 1}$

Solución

(a) Puesto que el grado del numerador $5x^3 + 1$ es 3 y el grado del denominador $2x + 6$ es 1 (y $3 > 1$), concluimos, en vista de (iii), que la gráfica de f no tiene asíntota horizontal.
(b) En este caso, el grado del numerador $3x^2 + 4x$ es igual al grado del denominador (ambos grados son 2). Por tanto, según (ii), la gráfica de f tiene asíntota horizontal $y = \frac{3}{8}$.

Solución alterna para (b). Dividiendo el numerador y el denominador por x^2, podemos escribir la función f como

$$f(x) = \frac{3 + \dfrac{4}{x}}{8 + \dfrac{1}{x^2}}$$

A medida que $x \to -\infty$, y $x \to \infty$, $4/x \to 0$ y $1/x^2 \to 0$. Por tanto, $f(x) \to \frac{3}{8}$. De la definición 4, la recta $y = \frac{3}{8}$ es una asíntota horizontal.

ASINTOTAS OBLICUAS

La gráfica de una función racional f puede aproximarse a la recta $y = ax + b$, $a \neq 0$, a medida que $x \to -\infty$ y $x \to \infty$. Tal recta se denomina **asíntota oblicua** para la gráfica de f. Una asíntota oblicua para una función racional puede hallarse de la siguiente manera:

Asíntotas oblicuas

Sea $$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{g(x)}{h(x)}$$

una función racional tal que $g(x)$ y $h(x)$ no tienen factores comunes y el grado de $g(x)$ es uno más que el grado de $h(x)$ (esto es, $n = m + 1$). Una asíntota oblicua $y = ax + b$ para la gráfica de f es el cociente obtenido cuando $g(x)$ se divide por $h(x)$.

Si $g(x)$ y $h(x)$ no tienen factores comunes y el grado de $g(x)$ es uno más que el grado de $h(x)$, entonces la división da

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = ax + b + \frac{r}{h(x)}$$

donde el residuo r es una constante diferente de cero. A medida que $x \to -\infty$ o $x \to \infty$ $r/h(x) \to 0$ y entonces los valores funcionales de f se aproximan más y más a $ax + b$.

EJEMPLO 7

Grafique la función

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 4}$$

Solución. Para esclarecer la discusión identificamos las funciones $g(x) = x^2 - x - 6$ y $h(x) = x - 4$.

Simetría: no hay simetría con respecto al eje y o al origen.

Intersecto en y: $f(0) = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}$

Intersectos en x: $f(x) = 0$ cuando $g(x) = x^2 - x - 6 = 0$. Puesto que $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$, vemos que -2 y 3 son los intersectos en x.

Asíntotas verticales: $h(x) = x - 4 = 0$ cuando $x = 4$. La recta $x = 4$ es una asíntota vertical.
Asíntotas horizontales: ninguna

Asíntotas oblicuas: puesto que el grado de $g(x) = x^2 - x - 6$ (el cual es 2) es uno más que el grado de $h(x) = x - 4$ (el cual es 1), la gráfica de f tiene una asíntota oblicua. Para hallarla, dividimos:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 4} = \underbrace{x + 3}_{\text{Cociente}} + \frac{\overbrace{6}^{\text{Residuo}}}{x - 4}$$

Observe que $r/h(x) = 6/(x - 4) \to 0$ a medida que $x \to -\infty$ y $x \to \infty$. Por tanto la recta $y = x + 3$ es una asíntota oblicua.

Marcación de puntos: utilizando la información anterior y marcando puntos de la tabla adjunta, obtenemos la gráfica mostrada en la figura 50. Las asíntotas son las líneas punteadas en la figura.

x	$f(x)$
-2	0
-1	$\frac{4}{5}$
0	$\frac{3}{2}$
1	2
2	2
3	0
5	14
6	12
7	12
8	$\frac{25}{2}$

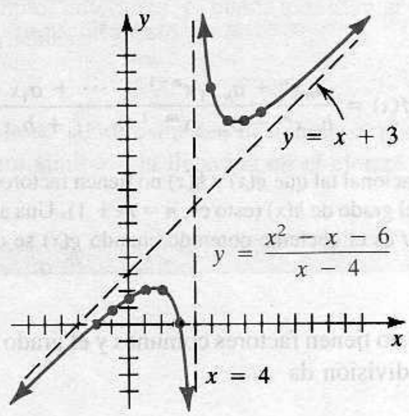


FIGURA 50

EJERCICIO 4.8

En los problemas 1 al 20, halle las asíntotas horizontales y verticales. Grafique.

1. $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$
2. $f(x) = \dfrac{5}{x+1}$
3. $f(x) = \dfrac{3x}{2x+1}$
4. $f(x) = \dfrac{2x}{3x-5}$
5. $f(x) = \dfrac{3x-2}{5x+1}$
6. $f(x) = \dfrac{3x+6}{x-2}$
7. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$
8. $f(x) = \dfrac{5-4x}{3x}$
9. $f(x) = \dfrac{2}{(x-2)^2}$

10. $f(x)=\dfrac{3}{(x+1)^3}$

11. $f(x)=\dfrac{8}{x^3}$

12. $f(x)=\dfrac{4}{x^4}+1$

13. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$

14. $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^3-9}$

15. $f(x)=\dfrac{3}{x(x+1)}$

16. $f(x)=\dfrac{4}{x^3-7x+12}$

17. $f(x)=\dfrac{4-x^2}{2x^2+1}$

18. $f(x)=\dfrac{24}{x^2+9}$

19. $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^3-1}$

20. $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x^2-4}$

En los problemas 21 y 22, determine si la función dada tiene una asíntota vertical. Grafique.

21. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ **22.** $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$

En los problemas 23 al 26, halle las asíntotas verticales y oblicuas. Grafique.

23. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

24. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+3}$

25. $f(x)=\dfrac{x^2-4x-12}{x+5}$

26. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-4}$

En los problemas 27 y 28, halle el(los) punto(s) en la gráfica de la función dada en donde la gráfica corte su asíntota horizontal. No grafique.

27. $f(x)=\dfrac{x^4+2x+2}{x^4+1}$

28. $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^3+1}$

En los problemas 29 y 30, halle las asíntotas verticales. No grafique.

29. $f(x)=\dfrac{3x+1}{4x^3+3x^2-100x-75}$

30. $f(x)=\dfrac{1}{x^5+4x^4-6x^3-24x^2+5x+20}$

31. La concentración $c(t)$ de cierto fármaco en la sangre, t horas después de ser inyectado viene dada por

$$c(t)=\frac{25t}{(t+1)^2}$$

trace la gráfica de $c(t)$ como función del tiempo ($t \geq 0$)

32. La potencia eléctrica en vatios en un circuito con dos resistencias R_1 y R_2 conectado en serie es

$$P=\frac{vR_1R_2}{(R_1+R_1)^2}$$

donde v es el voltaje. Suponga que v y R_1 se mantienen constantes: v = 20 voltios y R_1 = 4 ohmios. Trace la gráfica de P como función de R_2.

33. Una población de 500 bacterias se introduce en un cultivo y crece en número según la ecuación

$$P(t)=500\left(1+50t/(t+50)^2\right)$$

trace la gráfica como función del tiempo ($t \geq 0$).

34. La intensidad de iluminación de una fuente de luz es directamente proporcional a la fuerza de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la fuente. Dadas dos fuentes de fuerza de 20 unidades y 4 unidades, separadas 100 cm, como lo muestra la figura 51, la intensidad I en cualquier punto P entre ellos está dada por

$$I(x)=\frac{20}{x^2}+\frac{4}{(100-x)^2}$$

donde x es la distancia en un punto desde la fuente de 20 unidades. Trace la gráfica de $I(x)$ para $0 < x < 100$.

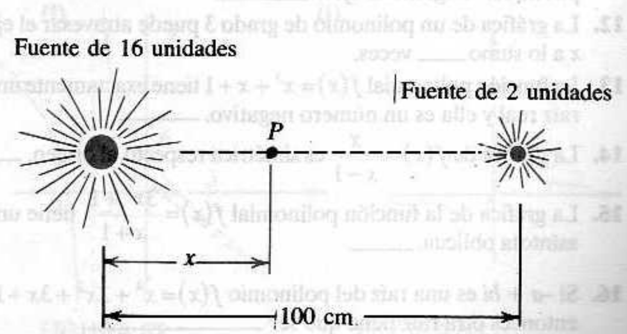


FIGURA 51

CONCEPTOS IMPORTANTES

Función polinomial
gráficas
raíces
Raíces de multiplicidad k
Función cuadrática
vértice
Función creciente
Función decreciente
Algoritmo de la división
División sintética
Teorema del residuo
Teorema del factor
Regla de signos de Descartes
Cotas para ceros reales
Teorema fundamental del álgebra
Teorema del valor intermedio
Método de bisección
Función racional
asíntota vertical
asíntota horizontal
asíntota oblicua

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 20, llene los espacios o responda falso o verdadero.

1. La función $f(x)=3x^2+x^{-1}+5$ es una función polinomial.___
2. La función $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2+1}$ tiene asíntotas verticales.___
3. La función $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x+1}$ tiene asíntotas horizontales.___
4. La gráfica de una función con asíntota horizontal puede atravesar la asíntota.______
5. El vértice de la gráfica de la función $f(x)=-x^2+4x$ es $(-2,-4)$.______
6. El vértice de la gráfica de $f(x)=(x-5)^2+2$ es $(5, 2)$.______
7. El rango de la función $f(x)=-x^2+4x$ es ____________
8. La función $f(x)=-x^2+4x$ es creciente en el intervalo ____________
9. Si un polinomio de grado mayor que 1 se divide por uno de grado 1, el residuo t tiene que ser una constante.______
10. El grado de un polinomio que tiene como únicas raíces reales -1, 0, 1 tiene que ser tres.______
11. La gráfica de un polinomio de grado mayor o igual que 1 puede ser tangente al eje x.______
12. La gráfica de un polinomio de grado 3 puede atravesar el eje x a lo sumo____ veces.
13. La función polinomial $f(x)=x^3+x+1$ tiene exactamente una raíz real y ella es un número negativo.______
14. La gráfica de $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ es simétrica respecto al origen.____
15. La gráfica de la función polinomial $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x+1}$ tiene una asíntota oblicua._____
16. Si $-a+bi$ es una raíz del polinomio $f(x)=x^4+2x^2+3x+1$, entonces otra raíz tiene que ser ____________.
17. La gráfica de $y=(x-3)^3$ es la gráfica de $y=x^3$ trasladada 3 unidades a la ____________
18. Todo polinomio de coeficientes reales tiene al menos un cero real.______
19. Dada una función polinomial $y=f(x)$, si $f(a)=0$, entonces $x+a$ es factor de $f(x)$.______
20. La gráfica de $y=x^3-3$ es la gráfica de $y=x^3$, 3 unidades hacia ____________.
21. Utilice la división larga para dividir $f(x)=18x^5-3x^3+6x^2-3x+9$ por $g(x)=3x^2+1$.
22. Utilice la división larga para dividir $f(x)=24x^7-18x^5+9x^4-6x^2+12$ por $g(x)=8x^3-3x^2+1$.
23. Utilice la división sintética para dividir $f(x)=3x^4-4x^3+x-1$ por $g(x)=x+1$.
24. Utilice la división sintética para dividir $f(x)=2x^5-77x^2+3x+24$ por $g(x)=x-2$.
25. Determine el residuo cuando $f(x)=x^{100}+x^{99}-3x^5+2$ se divide por $x+1$ sin hacer la división.
26. Determine cuál valor debe tomar k para que el residuo de dividir $f(x)=x^3+3x^2-kx+5$ por $g(x)=x+1$ sea 2.
27. Utilice la división sintética para determinar el valor de $f(x)=x^8-2x^7+3x^3-x+5$ en $x=3$.
28. Halle cuál valor debe tomar k para que $x+1/3$ sea un factor de $f(x)=9x^2+3kx+2$.
29. ¿Cuál valor debe tomar k para que $x-k$ sea un factor de $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$?
30. Factorice el polinomio cuadrático $f(x)=3x^2+5x+2$.
31. ¿Tiene raíces reales la función polinomial $f(x)=x^8+3x^4+2x^2+1$? Explique su respuesta.
32. Enumere, pero no pruebe, todas las raíces racionales posibles de $f(x)=12x^5-3x^3+4x+15$.
33. Halle todas las raíces de $f(x)=x^3+x^2-3x-3$.
34. Pruebe que $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ es irracional.
35. Considere el polinomio $\sqrt{2}x^6-(1+\pi)x^3-5$. Determine, sin hallarlas, el número de raíces reales de $f(x)$.
36. Halle las cotas superior e inferior para las raíces reales de $f(x)=x^5-2x^3+8$.
37. ¿Cuántas veces pueden intersecarse a lo sumo las gráficas de las funciones polinomiales $f(x)=x^5+ax+b$ y $g(x)=x^5+cx+d$? Explique.
38. Desde el techo de un edificio de 20 metros de altura se lanza una bola hacia arriba. Suponga que su posición por encima del suelo después de t segundos está dada por

$$s(t)=-16t^2+256t+20$$

(a) ¿Cuál es la máxima altura desde el suelo alcanzada por la bola?
(b) ¿Cuándo alcanza esa máxima altura?
(c) ¿Cuándo toca el techo del edificio?

39. Determine una función cuadrática que describa el arco parabólico mostrado en la figura 52.

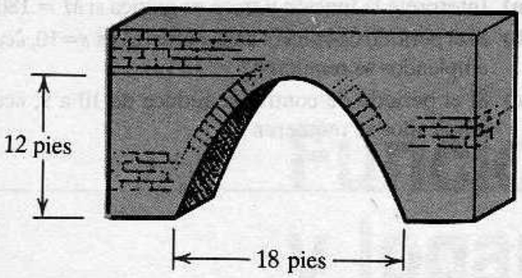


FIGURA 52

40. Un tubo de ensayo está formado por una semiesfera y un cilindro como se muestra en la figura 53. Si el diámetro de la semiesfera es x cm y el largo del tubo $(2x + 10)$ cm, entonces la capacidad del tubo de ensayo es:

$$C(x)=\frac{\pi}{6}x^3+\frac{5\pi x^2}{2}=\pi x^2[x/6+5/2]$$

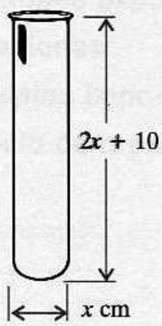


FIGURA 53

Trace la gráfica de $C(x)$ para $x > 0$.

En los ejercicios 41 al 50, aparee la función dada con su respectiva gráfica en (a) – (j).

41. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$ **42.** $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+2}$

43. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2}$ **44.** $f(x)=\dfrac{4x}{x-3}$

45. $f(x)=4-\dfrac{2}{x^4}$ **46.** $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

47. $f(x)=\dfrac{3x^2-5}{2x-6}$ **48.** $f(x)=\dfrac{-x^2-x+12}{x+2}$

49. $f(x)=\dfrac{3x}{x^3+8}$ **50.** $f(x)=\dfrac{4}{x^2+2}$

(a)

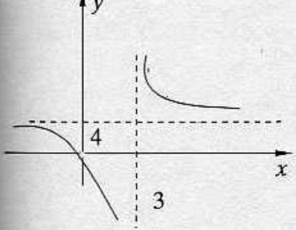


FIGURA 54

(b)

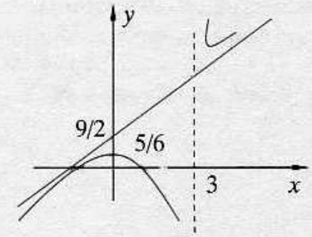


FIGURA 55

(c)

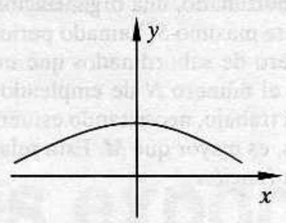


FIGURA 56

(d)

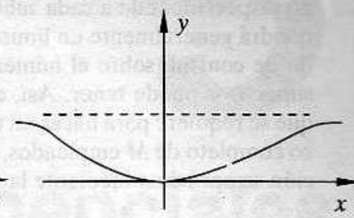


FIGURA 57

(e)

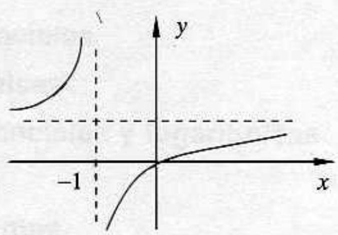


FIGURA 58

(f)

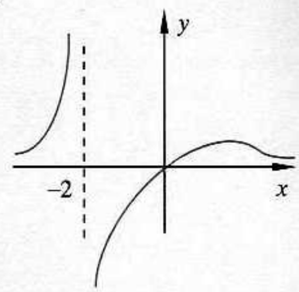


FIGURA 59

(g)

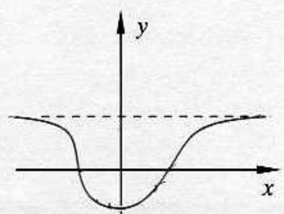


FIGURA 60

(h)

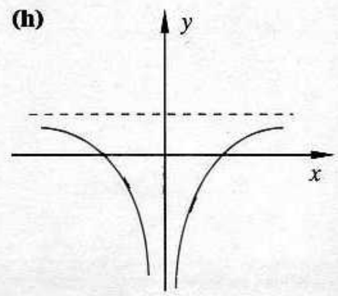


FIGURA 61

(i)

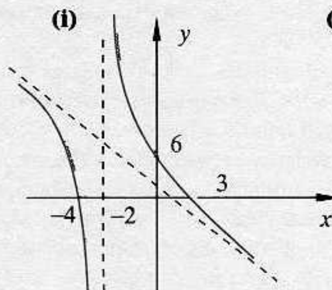


FIGURA 62

(j)

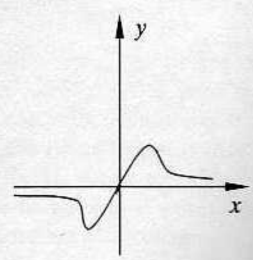


FIGURA 63

En los problemas 51 y 52, grafique la función racional dada. Halle los intersectos y las asíntotas.

51. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x-4}$

52. $f(x)=\dfrac{16-2x^2-x^3}{x^2}$

5

Funciones exponenciales y logarítmicas

John Napier

En este capítulo consideraremos dos tipos de funciones muy utilizadas en las aplicaciones: exponencial y logarítmica.

John Napier (1550-1617), gran polemista político y religioso inglés, se recuerda hoy principalmente por una de sus invenciones matemáticas; el logaritmo. Veremos en la sección 5.2 que los logaritmos son en esencia exponentes, y que hay dos clases importantes. Se ha atribuido a Napier la invención del *logaritmo natural*. Su amigo y colaborador, el matemático inglés Henry Briggs (1561-1631) ideó la base diez o *logaritmo común*. La palabra "logaritmo" viene de dos términos griegos; *logos* que significa razonar o calcular, y *arithmos* que quiere decir número. Logaritmo significa entonces "número calculador". Por varios cientos de años, los logaritmos fueron básicamente una ayuda para realizar cálculos aritméticos complejos y tediosos. La calculadora análoga de nuestros días y la regla de cálculo (anticuada hoy), se basan en las propiedades de los logaritmos. El uso de los logaritmos como un recurso manual para el cálculo, realmente ha desaparecido debido a la calculadora electrónica.

Para éste y los siguientes capítulos, usted deberá contar con una calculadora que tenga funciones científicas.

5.1 Funciones exponenciales

EXPONENTES IRRACIONALES

En la sección 1.5 definimos b^r para cualquier base positiva b y cualquier exponente *racional* r; por ejemplo:

$$3^{1/5} = \sqrt[5]{3} \quad \text{y} \quad 3^{1.4} = 3^{14/10} = 3^{7/5} = (\sqrt[5]{3})^7$$

Para cualquier número *irracional* r, b^r puede definirse, pero una definición más precisa va más allá del alcance de este texto. Sin embargo, podemos insinuar un procedimiento posible para definir un número como $3^{\sqrt{2}}$. Ya que

$$\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$$

los números racionales

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ \ldots$$

dan en orden sucesivo mejores aproximaciones a $\sqrt{2}$. Esto indica que los números

$$3^1,\ 3^{1.4},\ 3^{1.41},\ 3^{1.414},\ 3^{1.4142},\ 3^{1.41421},\ \ldots$$

dan en orden sucesivo mejores aproximaciones al valor de $3^{\sqrt{2}}$. De hecho esto puede demostrarse con una definición precisa de b^r para un r irracional. Utilizando la tecla $\boxed{y^x}$ de una calculadora científica, encontramos que la aproximación con nueve cifras decimales para $3^{\sqrt{2}}$ es 4.728804386.

Aceptaremos la siguiente formulación como un hecho:

> Para $b > 0$ y cualquier número real r, la expresión b^r representa un único número real, además, las leyes de los exponentes son válidas para todos los exponentes reales.

FUNCION EXPONENCIAL

Ahora podemos dar una definición de una **función exponencial.**

DEFINICION 1

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, la **función exponencial con base b** es

$$f(x) = b^x \tag{1}$$

En la definición 1 la base b se limita a los números positivos así que b^x siempre será un número real. Con esta restricción una expresión como $(-4)^{1/2}$ no es posible. Cuando $b = 1$, simplemente obtenemos la función constante $f(x) = 1^x = 1$.

En los siguientes dos ejemplos graficamos las funciones exponenciales con bases 3 y $\frac{1}{3}$, respectivamente.

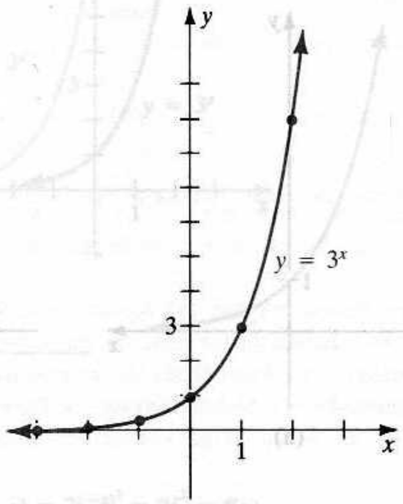
EJEMPLO 1

Grafique la función $f(x = 3^x$

Solución. Primero obtenemos una tabla de valores para $y = 3^x$. Como se indica en la figura 1, marcamos los puntos que se obtienen de la tabla y los unimos con una curva uniforme.

Nótese que la gráfica de $f(x) = 3^x$ es una función creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

x	$f(x)$
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9



$f(x) = 3^x$

1) $f(1) = 3^1 = 3$

$f(1/3) = 3^{1/3} = -1$

$(\sqrt[3]{3})^1$

FIGURA 1

EJEMPLO 2

Grafique la función $f(x) = (\frac{1}{3})^x$.

Solución. Obtenemos la gráfica de esta función marcando los puntos cuyas coordenadas se enumeran en la tabla anexa.

Como se aprecia en la figura 2, $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ es una función decreciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

x	$f(x)$
-2	9
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{27}$

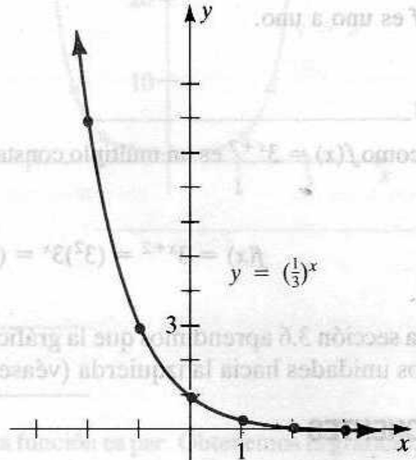


FIGURA 2

Nótese que la gráfica de la función $f(x) = 3^{-x}$ es exactamente la misma gráfica de la figura 2 ya que $3^{-x} = (\frac{1}{3})^x$.

Como los dos ejemplos anteriores indican, la gráfica de una función exponencial $f(x) = b^x$ puede tener dos formas, dependiendo de si $0 < b < 1$ o $b > 1$. En la figura 3 vemos el bosquejo de las gráficas para cada uno de estos casos.

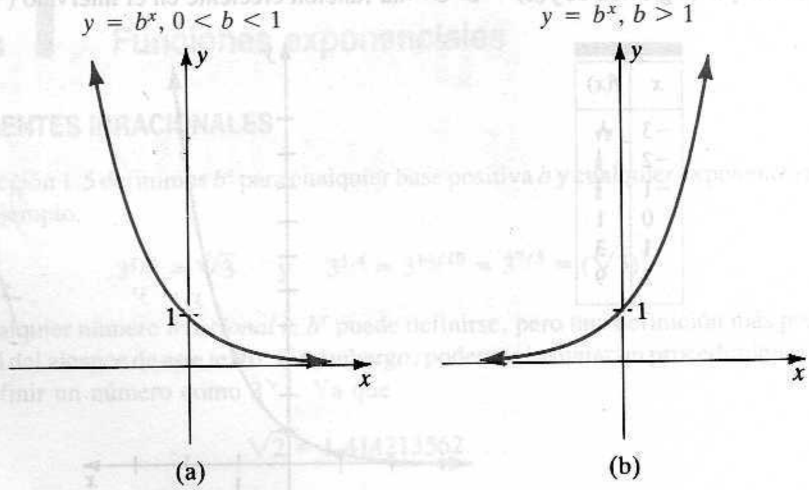


FIGURA 3

PROPIEDADES DE LA FUNCION EXPONENCIAL

En los bocetos de la figura 3 observamos las siguientes propiedades de la función exponencial f con base b.

- El dominio de f es el conjunto de los números reales.
- El rango de f es el conjunto de los números reales positivos.
- El intersecto en y para la gráfica de f es 1. La gráfica de f no tiene intersectos en x.
- El eje x es una asíntota horizontal para la gráfica de f.
- La función f es creciente si $b > 1$ y decreciente si $0 < b < 1$.
- la función f es uno a uno.

EJEMPLO 3

Una función como $f(x) = 3^{x+2}$ es un múltiplo constante de una función exponencial (1) ya que

Capítulo 5
Página 240

$$f(x) = 3^{x+2} = (3^2)3^x = (9)3^x$$

Además, en la sección 3.6 aprendimos que la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$ es la gráfica de $y = 3^x$ trasladada dos unidades hacia la izquierda (véase figura 4).

OTROS EXPONENTES

Como se indica en los siguientes dos ejemplos, cuando el exponente de la base b es una expresión algebraica que contiene x, la gráfica de la función no se parece a las que muestra la figura 3.

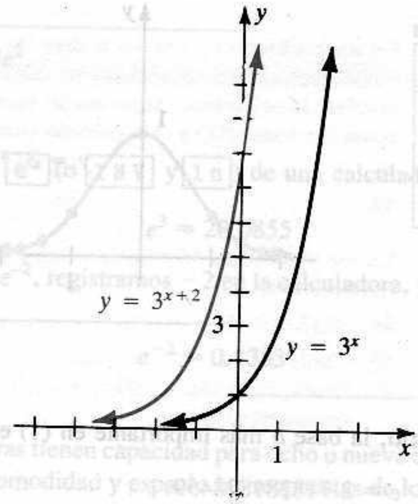


FIGURA 4

EJEMPLO 4

Grafique la función $f(x) = 3^{x^2}$.

Solución. Observamos que

$$f(-x) = 3^{(-x)^2} = 3^{x^2} = f(x)$$

implica que f es una función par. En consecuencia su gráfica es simétrica con respecto al eje y. El intersecto en y de la gráfica es $f(0) = 3^0 = 1$.

Utilizando esta información y marcando los puntos que resultan de la tabla anexa podemos graficar la función como se muestra en la figura 5.

x	$f(x)$
1	3
$\sqrt{2}$	9
$\sqrt{3}$	27

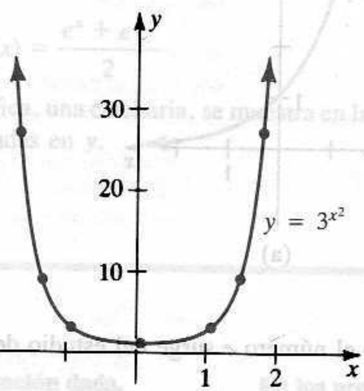


FIGURA 5

EJEMPLO 5

Grafique la función $f(x) = 3^{-x^2}$.

Solución. Como en el ejemplo 4, esta función es par. Obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 6 usando la simetría y marcando los puntos cuyas coordenadas se indican en la tabla adjunta. Nótese que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Esto significa que la recta $y = 0$, es decir, el eje x es una asíntota horizontal.

x	$f(x)$
0	1
1	$\frac{1}{3}$
$\sqrt{2}$	$\frac{1}{9}$
$\sqrt{3}$	$\frac{1}{27}$

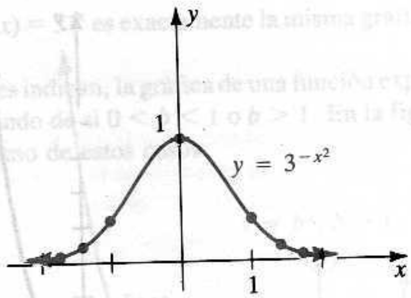


FIGURA 6

EL NUMERO *e*

Aunque no podemos probarlo, la base b más importante en (1) es el número irracional

$$e = 2.718281828459. . .$$

Debido a su importancia, muchas calculadoras con funciones científicas tienen una tecla $\boxed{e^x}$ que nos permite calcular e^x directamente (en lugar de utilizar $\boxed{y^x}$) para cualquier número real x. En algunas calculadoras e^x se calcula utilizando a cambio, las teclas $\boxed{\text{INV}}$ y $\boxed{\text{ln}}$. Veremos el porqué en la sección 5.2. Ya que $b = 1/e < 1$ y $b = e > 1$, las gráficas de $f(x) = e^{-x}$ y $f(x) = e^x$ son similares a las que se muestran en las figuras 3(a) y (b) respectivamente. Véase figura 7.

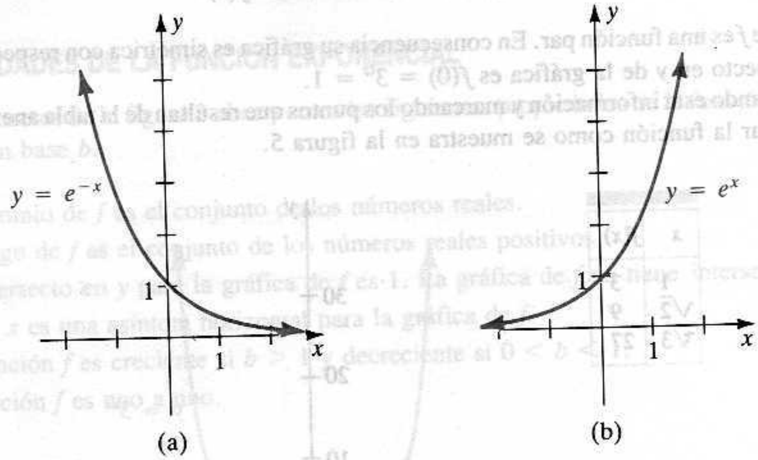


FIGURA 7

En cálculo el número e surge del estudio de la función f definida por

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

en donde n es un entero positivo. Puede probarse que los valores funcionales $f(n)$ se acercan al número e, a medida que n aumenta sin límite, es decir,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \text{ cuando } n \to \infty \qquad (2)$$

(Véase problema 67).

EJEMPLO 6

Calcule **(a)** e^3 y **(b)** $1/e^2$.

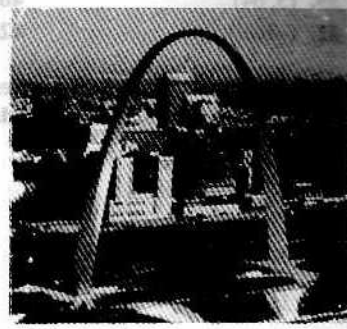
Solución

(a) Utilizando la tecla $\boxed{e^x}$ (o $\boxed{\mathtt{INV}}$ y $\boxed{\mathtt{ln}}$) de una calculadora, encontramos

$$e^3 \approx 20.0855$$

(b) Primero $1/e^2$ como e^{-2}, registramos -2 en la calculadora, y luego presionamos la tecla $\boxed{e^x}$:

$$e^{-2} \approx 0.1353$$



Muchas calculadoras tienen capacidad para ocho o nueve cifras decimales. Sin embargo, en este texto, por comodidad y espacio las respuestas de los cálculos se redondearán a cuatro cifras decimales.

La curva adoptada por un cable telefónico o una cuerda larga que cuelga sobre su propio peso entre dos soportes fijos se llama **catenaria**. La palabra "catenaria" viene del término en latín para cadena, *catena*. La forma del famoso arco de entrada en San Louis, Missouri, es una catenaria invertida. Puede probarse que bajo ciertas condiciones un cable colgante asume la forma de la gráfica de la función

$$f(x) = c\,\frac{e^{x/c} + e^{-x/c}}{2} \tag{3}$$

donde c es una constante positiva que depende de las características físicas del cable. Las funciones como (3) constan de ciertas combinaciones de e^x y e^{-x}, y aparecen en tantas aplicaciones que los matemáticos les han dado nombres. En particular, si $c = 1$ en (3), la función f definida por

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

se llama el **coseno hiperbólico**. Su gráfica, una catenaria, se muestra en la figura 8 y puede obtenerse con la suma de las coordenadas en y.

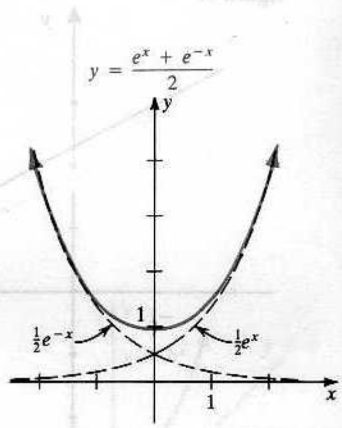


FIGURA 8

EJERCICIO 5.1

En los problemas 1 al 20, grafique la función dada.

1. $f(x) = 3^x$
2. $f(x) = 3^{-x}$
3. $f(x) = -3^x$
4. $f(x) = -3^{-x}$
5. $f(x) = 3^{x+1}$
6. $f(x) = 3^{2-x}$
7. $f(x) = 2 \cdot 3^x$
8. $f(x) = 3^{x^2}$
9. $f(x) = (3^x)^2$
10. $f(x) = 3^{(x-1)^2}$
11. $f(x) = 3^{-x^2}$
12. $f(x) = x\,3^x$
13. $f(x) = 3^{|x|}$
14. $f(x) = 3^{-|x|}$
15. $f(x) = (2/3)^x$
16. $f(x) = (3/2)^x$
17. $f(x) = 5^x - 5$
18. $f(x) = 5^{-x} + 1$
19. $f(x) = 5^{-x+1}$
20. $f(x) = 5^x + 5^{-x}$

En los problemas 21 al 38, conteste verdadero o falso.

21. $3^{2x} = 9^x$ _____
22. $3^{-x} = (1/3)^x$ _____
23. $3^{x-1} = (1/3)(3^x)$ _____
24. $3^{-x} = (3^x)^{-1}$ _____
25. $3^x \cdot 3^y = 9^{x+y}$ _____
26. $2^x \cdot 3^x = 6^x$ _____
27. $3^{2x} \cdot 3^{4x} = 3^{6x}$ _____
28. $3^{-x^2} = (1/3^x)^2$ _____
29. $3^x + 3^{-x} = (3 + 3^{-1})^x$ _____
30. $(5/3)^x = 5^x \cdot 3^{-x}$ _____
31. $3^{x^2} = (3^x)^2$ _____
32. $9^{x/2} = 3^x$ _____
33. $\dfrac{3^{x^2}}{3^x} = 3^x$ _____
34. $3^{-x} = 3^{1/x}$ _____
35. $3^{x-1} = (3^x)^{-1}$ _____
36. $3^{|x|} = |3^x|$ _____
37. $3^{2+2x} = 9^{1+x}$ _____
38. $e^x + e^{-x} = e^0$ _____

En los problemas 39 al 42, la gráfica de una función exponencial $f(x) = a^x$ pasa por el punto dado. Encuentre f.

39. $(3, 64)$ **40.** $(-1, 0.2)$

41. $(-1, e^3)$ **42.** $(3, e)$

En los problemas 43 al 48, encuentre los intersectos en x y en y de la gráfica de la función dada. No grafique.

43. $f(x)=3^x-9$

44. $f(x)=2^{3x}+8$

45. $f(x)=3xe^x+e^{x+2}$

46. $f(x)=x^2 3^x-3^{x+2}$

47. $f(x)=x^3 4^x-5x^2 4^x+6x4^x$

48. $f(x)=\dfrac{2^x-6+2^{3-x}}{x+8}$

49. Encuentre una ecuación de la recta que se muestra en la figura 9.

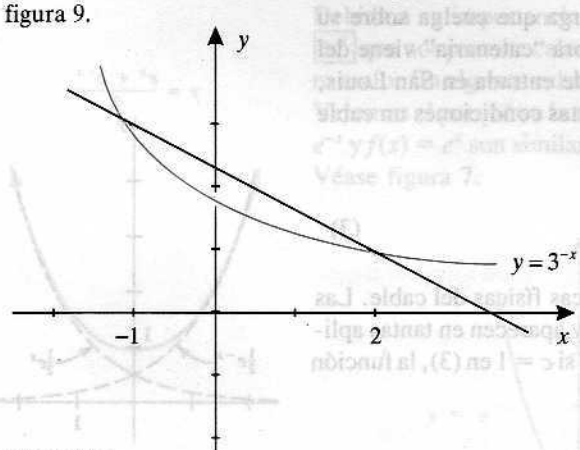


FIGURA 9

50. Encuentre el área de la región sombreada en la figura 10.

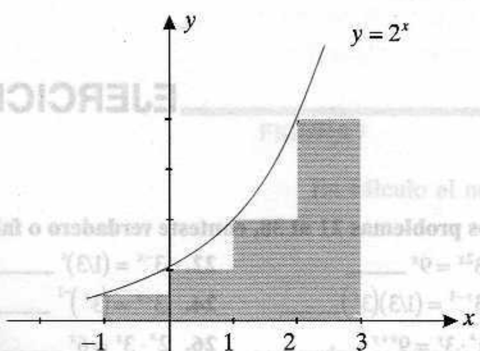


FIGURA 10

En los problemas 51 al 54, utilice las gráficas para determinar el número de soluciones de cada ecuación. No trate de resolver la ecuación. [*Sugerencia*: tome el lado derecho de la ecuación como $f(x)$ y el izquierdo como $g(x)$].

51. $3^x=2-x^2$ **52.** $9^{-x}=3-x$

53. $2^x=x$ **54.** $e^{x^2}=e^{-x}+3$

En los problemas 55 y 56 determine el rango o imagen de la función dada.

55. $f(x)=10+5^{-x}$

56. $f(x)=9-3^{-x}$

57. Grafique la función $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$. La función f se llama **coseno hiperbólico.**

58. La gráfica de la función

$$f(x)=ae^{-be^{-cx}}$$

se llama **curva de Gompertz** y se presenta en algunos estudios empresariales y de población. Diseñe una gráfica de f en cada uno de los siguientes casos:

(a) $a = 20,\quad b = 1,\quad c = 1$

(b) $a = 20,\quad b = 1,\quad c = -1$

En los problemas 59 al 67, utilice una calculadora para expresar en forma decimal un número aproximado al dado, con cuatro cifras decimales exactas.

59. **(a)** $3^{3.1}$ **(b)** $3^{3.14}$ **(c)** $3^{3.141}$ **(d)** $3^{3.1418}$ **(e)** 3^{π}

60. **(a)** $3^{2.7}$ **(b)** $3^{2.71}$ **(c)** $3^{2.718}$ **(d)** $3^{2.7182}$ **(e)** 3^{e}

61. **(a)** $3^{1.7}$ **(b)** $3^{1.73}$ **(c)** $3^{1.732}$ **(d)** $3^{1.7321}$ **(e)** $3^{\sqrt{3}}$

62. $4^{\sqrt{3}}$ **63.** $5^{-\sqrt{2}}$

64. $\sqrt{3+\sqrt{3}}$ **65.** $\left(3+\sqrt{3}\right)^{2/\sqrt{3}}$

66. $e^{-0.2038}$ **67.** $\left(\sqrt{e}\right)^{e^{0.21}}$

68. Sea f la función definida por

$$f(n)=(1+1/n)^n$$

para todo entero positivo n. Llene la siguiente tabla y compare los valores $f(n)$ obtenidos con e. ¿Qué debe esperar si $f(n) \to e$ cuando $n \to \infty$?

n	$f(n)$
1	2.0000000
10	2.5937425
100	
1,000	
10,000	
100,000	
1,000,000	
10,000,000	

5.2 Funciones logarítmicas

Ya que la función exponencial $y = b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$) es uno a uno, tiene en consecuencia una función inversa. Para encontrarla, utilizamos la alternativa que se discute en la sección 3.7: intercambiamos las variables x y y para obtener $x = b^y$. Esta fórmula define y como una función de x:

y es el exponente al que se eleva la base b para obtener x. **(4)**

Remplazando la palabra **"exponente"** por la palabra **"logaritmo"** podemos reformular (4) así:

y es el logaritmo en la base b de x

y abreviarla utilizando la fórmula $y = \log_b x$. Es decir,

$$y = \log_b x \text{ equivale a } x = b^y \tag{5}$$

Tenemos la siguiente definición:

DEFINICION 2

> **La función logarítmica con base b,**
>
> $$f(x) = \log_b x$$
>
> es la inversa de la función exponencial con base b.

Recordemos de la sección 3.7 que la gráfica de una función inversa puede obtenerse reflejando la gráfica de la función original en la recta $y = x$. Esta técnica se utiliza en la figura 11(a) para obtener la gráfica de $y = \log_b x$ para $b > 1$. La gráfica de $y = \log_b x$ para $0 < b < 1$ se muestra en la figura 11(b).

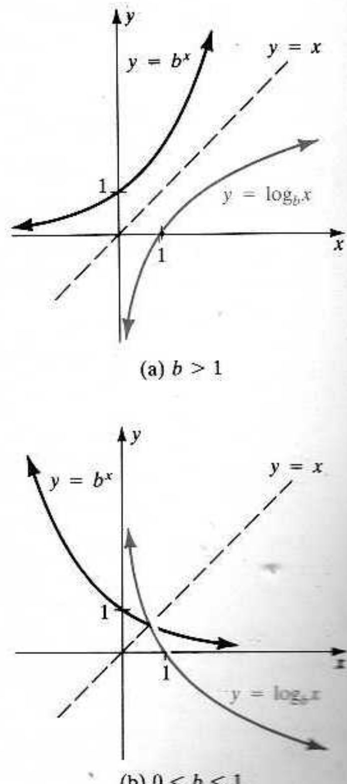


FIGURA 11

PROPIEDADES DE LA FUNCION LOGARITMICA

Como se ve en la figura 11, la función logarítmica f con base b tiene las siguientes propiedades:

- El dominio de f es el conjunto de los números reales positivos.
- El rango de f es el conjunto de los números reales.
- El intersecto en x para la gráfica de f es 1. La gráfica de f no tiene intersecto en y.
- El eje y es una asíntota vertical de la gráfica de f.
- La función f es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ si $b > 1$ y decreciente en el intervalo $(0, \infty)$ si $0 < b < 1$.
- La función f es uno a uno.

Ya que las dos ecuaciones $y = \log_b x$ y $b^y = x$ son equivalentes, podemos utilizar la que sea más conveniente. La siguiente tabla enumera varios ejemplos de enunciados exponenciales y logarítmicos equivalentes.

FORMA LOGARITMICA	FORMA EXPONENCIAL EQUIVALENTE
$\log_3 9 = 2$	$9 = 3^2$
$\log_{10} 0.0001 = -4$	$0.0001 = 10^{-4}$
$\log_8 4 = \frac{2}{3}$	$4 = 8^{2/3}$

De (5) se deduce que

$$\log_b b = 1 \tag{6}$$

y

$$\log_b 1 = 0 \tag{7}$$

ya que $b^1 = b$ y $b^0 = 1$, respectivamente. También debe notarse que $\log_b x$ no tiene sentido para $x \leq 0$, pues no hay exponente y para el que $b^y \leq 0$. El resultado en (7) confirma que 1 es el intersecto en x de la gráfica de una función logarítmica $f(x) = \log_b x$.

EJEMPLO 1

Despeje las incógnitas.

(a) $\log_2 8 = y$ **(b)** $\log_4 x = -\frac{1}{2}$ **(c)** $\log_b 25 = 2$

Solución. En cada caso utilizamos la forma exponencial equivalente dada en (5):

(a) $\log_2 8 = y$ es equivalente a

$$2^y = 8$$
$$= 2^3$$

Así concluimos que $y = 3$.

(b) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$ es equivalente a

$$4^{-1/2} = x$$

así que $x = 1/4^{1/2} = \frac{1}{2}$.

(c) $\log_b 25 = 2$ es equivalente a

$$b^2 = 25$$
$$= 5^2$$

y así encontramos que $b = 5$.

Remplazando $y = \log_b x$ por la ecuación equivalente $x = b^y$, obtenemos una importante identidad:

$$x = b^{\log_b x} \tag{8}$$

EJEMPLO 2

(a) $3^{\log_3 7} = 7$ **(b)** $10^{\log_{10} 5^2} = 5^2$

LEYES DE LOS LOGARITMOS

Las siguientes tres propiedades o **leyes de los logaritmos** son, simplemente, una reformulación de las leyes de los exponentes.

Leyes de los logaritmos

Para cualquier par de números reales positivos M y N:

(i) $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

(ii) $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

(iii) $\log_b N^c = c \log_b N$, para cualquier número real c

Para verificar estas leyes utilizamos la identidad (8) para escribir dos números positivos cualesquiera M y N como

$$M = b^{\log_b M} \quad \text{y} \quad N = b^{\log_b N}$$

de forma que

$$MN = b^{\log_b M} \cdot b^{\log_b N}$$

o

$$MN = b^{\log_b M + \log_b N}$$

De (5) vemos que el último enunciado exponencial es equivalente al enunciado logarítmico

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

que es la ley (i).

Similarmente,

$$\frac{M}{N} = \frac{b^{\log_b M}}{b^{\log_b N}} = b^{\log_b M - \log_b N}$$

y

$$N^c = (b^{\log_b N})^c = b^{c \log_b N}$$

son equivalentes a las leyes (ii) y (iii), respectivamente.

EJEMPLO 3

Simplificar $\frac{1}{2} \log_9 36 + 2 \log_9 4 - \log_9 4$.

Solución. Hay varias formas para resolver este problema. Nótese, por ejemplo, que el segundo y tercer términos pueden combinarse así:

$$2 \log_9 4 - \log_9 4 = \log_9 4$$

De manera alterna, podemos utilizar la ley (iii) seguida por la ley (ii) para combinar estos términos:

$$\begin{aligned} 2 \log_9 4 - \log_9 4 &= \log_9 4^2 - \log_9 4 \\ &= \log_9 16 - \log_9 4 \\ &= \log_9 \tfrac{16}{4} \\ &= \log_9 4 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \log_9 36 + 2 \log_9 4 - \log_9 4 &= \log_9 (36)^{1/2} + \log_9 4 \quad \textbf{Por (iii)} \\ &= \log_9 6 + \log_9 4 \\ &= \log_9 24. \quad \textbf{Por (i)} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

Si $\log_b 2 = 0.3010$ y $\log_b 3 = 0.4771$, halle el valor de:

(a) $\log_b 6$ **(b)** $\log_b \dfrac{2}{3}$

(c) $\dfrac{\log_b 2}{\log_b 3}$ **(d)** $\log_b 64$

(e) $\log_b \sqrt[3]{18}$

Solución. Utilizamos las leyes (i) a la (iii) para escribir cada uno de los logaritmos dados en términos de $\log_b 2$ y $\log_b 3$.

(a)
$$\begin{aligned}\log_b 6 &= \log_b (3 \cdot 2)\\ &= \log_b 3 + \log_b 2 && \text{Por (i)}\\ &= 0.4771 + 0.3010\\ &= 0.7781\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\log_b \tfrac{2}{3} &= \log_b 2 - \log_b 3 && \text{Por (ii)}\\ &= 0.3010 - 0.4771\\ &= -0.1761\end{aligned}$$

(c) Dividiendo

$$\frac{\log_b 2}{\log_b 3} = \frac{0.3010}{0.4771} \approx 0.6309.$$

(d)
$$\begin{aligned}\log_b 64 &= \log_b 2^6\\ &= 6 \log_b 2 && \text{Por (iii)}\\ &= 6(0.3010)\\ &= 1.8060\end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned}\log_b \sqrt[3]{18} &= \log_b (18)^{1/3}\\ &= \tfrac{1}{3} \log_b 18 && \text{Por (iii)}\\ &= \tfrac{1}{3} \log_b (2 \cdot 3^2)\\ &= \tfrac{1}{3}[\log_b 2 + \log_b 3^2] && \text{Por (i)}\\ &= \tfrac{1}{3}[\log_b 2 + 2 \log_b 3] && \text{Por (iii)}\\ &= \tfrac{1}{3}[0.3010 + 2(0.4771)]\\ &= 0.4184\end{aligned}$$

Nota de advertencia: observe que la ley (ii) de los logaritmos *no* se puede aplicar en la parte (c) del ejemplo 4. En otras palabras, *un cociente de logaritmos no es la diferencia de los logaritmos*. También debe tenerse en cuenta que

$$\log_b (M + N) \neq \log_b M + \log_b N$$

En general, no hay forma de expresar $\log_b (M + N)$ en términos de $\log_b M$ y $\log_b N$.

GRAFICAS

En los siguientes tres ejemplos examinaremos las gráficas de algunas funciones que tienen que ver con logaritmos de base 10.

EJEMPLO 5

Graficar $f(x) = \log_{10} x$

Solución. La siguiente tabla muestra los valores correspondientes de y para valores escogidos de x. Utilizando los puntos (1, 0), (10, 1) y (100, 2) y el conocimiento de la forma básica de la gráfica de un logaritmo como en la figura 11(a), obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 12.

x	$f(x)$
0.001	−3
0.01	−2
0.1	−1
1	0
10	1
100	2
1000	3

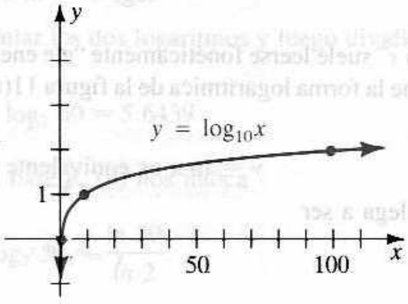


FIGURA 12

EJEMPLO 6

Grafique $f(x) = \log_{10}(x + 10)$

Solución. El dominio de esta función está determinado por la condición de que $x + 10 > 0$, ó $x > -10$. También por la sección 3.6 sabemos que la gráfica de la función es la de la figura 12 trasladada diez unidades hacia la izquierda. Con esta información y la tabla anexa obtenemos la gráfica de la figura 13.

x	$f(x)$
−9	0
0	1
90	2

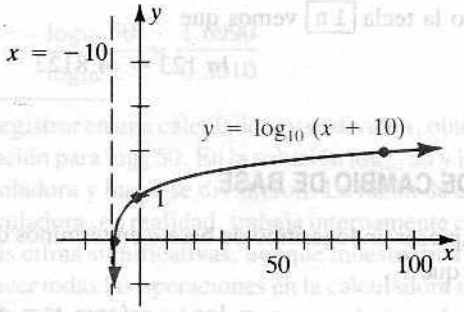


FIGURA 13

EJEMPLO 7

Grafique $f(x) = \log_{10} |x|$.

Solución. Ya que $|x| > 0$ para $x \neq 0$, el valor absoluto amplía el dominio de la función logarítmica dada a todos los números reales con excepción de $x = 0$. Además, ya que

$$f(-x) = \log_{10} |-x| = \log_{10} |x| = f(x)$$

vemos que f es una función par; en consecuencia, su gráfica es simétrica con respecto al eje y. Ahora la parte de la gráfica de f para $x > 0$ es idéntica a la gráfica de la figura 12. Obtenemos una parte de la gráfica de f para $x < 0$ por simetría. (Véase figura 14).

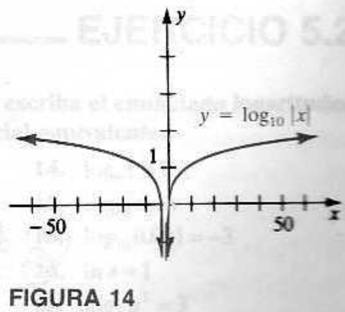


FIGURA 14

LOGARITMOS COMUNES Y NATURALES

Como vimos en la definición 2, la base b de una función logarítmica puede ser cualquier número real positivo diferente de 1. En la práctica, sin embargo, dos de las bases más importantes son $b = 10$ y $b = e = 2.718281828459\ldots$ Los logaritmos con $b = 10$ se conocen como **logaritmos comunes** y los logaritmos con $b = e$ se llaman **logaritmos naturales.** Es usual además escribir el logaritmo natural

$$\log_e x \text{ así } \ln x$$

El símbolo "$\ln x$" suele leerse fonéticamente "ele ene de x". Ya que $b = e > 1$, la gráfica de $f(x) = \ln x$ tiene la forma logarítmica de la figura 11(a) (véase figura 15). Para la base e, (5) llega a ser

$$y = \ln x \text{ es equivalente a } x = e^y$$

También (8) llega a ser

$$x = e^{\ln x}$$

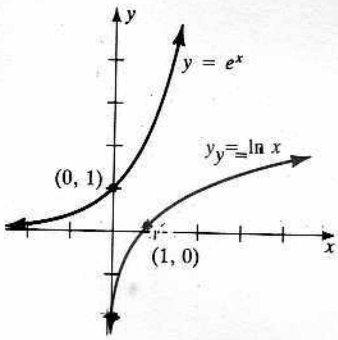


FIGURA 15

Para calcular $f(x) = \log_{10} x$ y $f(x) = \ln x$, utilizamos las teclas $\boxed{\log}$ y $\boxed{\ln}$, respectivamente, en una calculadora científica. Consulte el manual si su calculadora no tiene estas teclas.

EJEMPLO 8

Encuentre los valores de **(a)** $\log_{10} 647$ y **(b)** $\ln 123$.

Solución

(a) Después de teclear 647, presionamos $\boxed{\log}$ para obtener

$$\log_{10} 647 \approx 2.8109$$

(b) Utilizando la tecla $\boxed{\ln}$ vemos que

$$\ln 123 \approx 4.8122$$

FORMULA DE CAMBIO DE BASE

Es posible expresar un logaritmo de base a en términos de logaritmos de base b. Para ello, supongamos que

$$y = \log_a x \text{ así que } x = a^y$$

Tomando el logaritmo de base b de ambos lados de la última ecuación vemos que

$$\log_b x = \log_b a^y$$

$$= y \log_b a$$

o

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Pero ya que $y = \log_a x$ obtenemos la **fórmula de cambio de base:**

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{9}$$

EJEMPLO 9

Encuentre el valor de $\log_2 50$.

Solución. Podemos utilizar la fórmula de cambio de base para convertir el logaritmo dado a base 10 o a base e. Si escogemos la base 10, (9) nos indica

$$\log_2 50 = \frac{\log_{10} 50}{\log_{10} 2}$$

Utilizando la tecla $\boxed{\texttt{log}}$ para calcular los dos logaritmos y luego dividiendo, tenemos la aproximación

$$\log_2 50 \approx 5.6439$$

Solución alterna. Si escogemos base e, (9) nos indica

$$\log_2 50 = \frac{\ln 50}{\ln 2}$$

y utilizando la tecla $\boxed{\texttt{ln}}$ encontramos

$$\log_2 50 \approx 5.6439$$

Podemos verificar la respuesta del ejemplo 9 en una calculadora utilizando la tecla $\boxed{y^x}$. Registramos $y = 2$ y $x = 5.6439$ para obtener

$$2^{5.6439} \approx 50$$

USO DE LA CALCULADORA

En el ejemplo 9 suponemos que $\log_{10} 50$ y $\log_{10} 2$ se calculan en cuatro cifras decimales con los siguientes resultados *escritos*:

$$\frac{\log_{10} 50}{\log_{10} 2} \approx \frac{1.6990}{0.3010}$$

Si estos números se vuelven a registrar en una calculadora y se dividen, obtenemos 5.6445 y no 5.6439, como una aproximación para $\log_2 50$. En la solución $\log_{10} 50$ y $\log_{10} 2$ se computaron y almacenaron en la calculadora y luego se dividieron. La razón de esta diferencia en las dos respuestas es que la calculadora, en realidad, trabaja internamente con los valores de los logaritmos hasta ocho o más cifras significativas, aunque muestre una cantidad menor. En otras palabras, es posible hacer todas las operaciones en la calculadora sin estar tomando nota de los resultados intermedios. Usted logrará una mayor precisión en la respuesta de esta manera.

EJERCICIO 5.2

En los problemas 1 al 12, escriba el enunciado exponencial dado en la forma logarítmica equivalente.

1. $9^{-1/2} = 1/3$ **2.** $8^{-1/3} = 1/2$
3. $4^0 = 1$ **4.** $(2^3)^{-2} = 1/64$
5. $5^y = x$ b **6.** $u^{-t} = s$
7. $(1/81)^{-2} = 9$ **8.** $3^x \cdot 3^y = 3^{x+y}$
9. $25^{-3/2} = 1/125$ **10.** $10^{-4} = 0.0001$
11. $27^{2/3} = 9$ **12.** $a^1 = a$

En los problemas 13 al 24, escriba el enunciado logarítmico dado en la forma exponencial equivalente.

a **13.** $\log_4 1/2 = -1/2$ **14.** $\log_9 1 = 0$
15. $\log_t v = -s$ **16.** $\log_{10} x = y$
17. $\log_{36} 1/216 = -3/2$ b **18.** $\log_{10} 0.001 = -3$
19. $\log_8 4 = 2/3$ c **20.** $\ln e = 1$
21. $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$ **22.** $\log_a a^3 = 3$
23. $\log_a b = c$ d **24.** $\ln(1/e^2) = -2$

En los problemas 25 al 36, encuentre el valor de los logaritmos dados sin utilizar calculadora.

25. $\log_{10} 0.0001$
26. $\log_2 1/64$
27. $\log_3 \left(3^2 \cdot 3^3\right)$
28. $\log_5 \sqrt[3]{25}$
29. $\log_{32} 1/64$
30. $\log_{\sqrt{5}} 25$
31. $\log_{1/2} 4$
32. $\log_8 1/16$
33. $\log_{3/5} 125/27$
34. $\log_{\sqrt[3]{6}} 216$
35. $\ln\left(e^2 \cdot e^3 \cdot e^4\right)^e$
36. $\ln\left(e^e e^{2e}\right)$

En los problemas 37 al 48, despeje las incógnitas.

37. $\log_a 64 = 3$
38. $\log_{10} n = -3$
39. $\log_7 1/x = -3$
40. $\log_6 36^c = 18$
41. $3\log_{27} N = 1$
42. $\log_a 8 = -1$
43. $\log_2 8^x = 6$
44. $\log_2 x^{-3} = 3$
45. $\log_3 y^{-2} = 2$
46. $\sqrt{\log_{10} N} = 2$
47. $\sqrt[3]{\ln z} = 2$
48. $\ln x/3 = 1$

En los problemas 49 al 52, encuentre el número dado sin usar calculadora.

49. $5^{\log_5 3^2}$
50. $100^{\log_{10} 4}$
51. $e^{-\ln 5}$
52. $\left(\sqrt[3]{e}\right)^{\ln 27}$

En los problemas 53 al 64, utilice $\log_a 8 = 0.6021$ y $\log_a 9 = 0.6990$ para evaluar el logaritmo dado.

53. $\log_a 2$
54. $\log_a 3$
55. $\log_a 18$
56. $\log_a 54$
57. $\log_a \sqrt[3]{9}$
58. $\log_a 9/8$
59. $\log_a 6^3$
60. $\log_8 a$
61. $\log_3 a$
62. $\log_9 (9a)$
63. $\log_4 a$
64. $\log_{72} a^3$

En los problemas 65 al 70, simplifique y reduzca la expresión a un solo logaritmo.

65. $\log_6 3 + \log_6 2$
66. $1/3\log_3 64 - 1/2\log_3 25 + 20\log_3 1$
67. $\ln\left(x^4 - 1\right) - \ln\left(x^2 + 1\right)$
68. $\ln(a/b) - 3\ln a^2 + \ln b^{-2}$
69. $\log_3 7 + \log_3 7^2 + \log_3 7^3 - \log_3 7^6$
70. $3\log_{10} 5 + 2\log_{10} 3 - 4\log_{10} 2$

En los problemas 71 al 84, grafique la función dada y encuentre su dominio.

71. $f(x) = \log_3 x$
72. $f(x) = \log_3 (-x)$
73. $f(x) = \log_{1/3} x$
74. $f(x) = \log_{1/3} (-x)$
75. $f(x) = \log_3 |x|$
76. $f(x) = \log_3 |x+1|$
77. $f(x) = \log_{1/3} |x|$
78. $f(x) = \log_{1/3} |x+1|$
79. $f(x) = \log_3 (x+2)$
80. $f(x) = \log_{1/3} (x+2)$
81. $f(x) = \log_3 x + 2$
82. $f(x) = \log_{1/3} x - 2$
83. $f(x) = -2 + \log_3 (x+3)$
84. $f(x) = -2 + \log_{1/3} (x+3)$

En los problemas 85 al 88, use la fórmula de cambio de base cuando haga falta y la tecla $\boxed{\log}$ para encontrar el valor de los logaritmos dados.

85. $\log_5 27$
86. $\log_{10} 285$
87. $3\ln 5$
88. $\log_{2/5} 43$

En los problemas 89 al 92, use la fórmula de cambio de base cuando haga falta y la tecla de $\boxed{\ln}$ para encontrar el valor de los logaritmos dados. Compare sus resultados con los obtenidos en los problemas 85-88.

89. $\log_5 27$
90. $\log_{10} 285$
91. $3\ln 5$
92. $\log_{2/5} 43$
93. El logaritmo desarrollado por John Napier fue en realidad

$$10^7 \log_{1/e}\left(\frac{x}{10^7}\right)$$

Utilice la fórmula de cambio de base para expresar este logaritmo:

(a) En términos del logaritmo natural.

(b) En términos del logaritmo en base 10.

94. Demuestre que $(\log_y x)(\log_x y) = 1$
95. Cuál de las siguientes ecuaciones determina la gráfica que se indica en la figura 16?

(a) $y = 2x + 1$ **(b)** $y = 2x^2$
(c) $y = 3(x-1)$ **(d)** $x^2y = 2$
(e) $y = 2 + x^2$

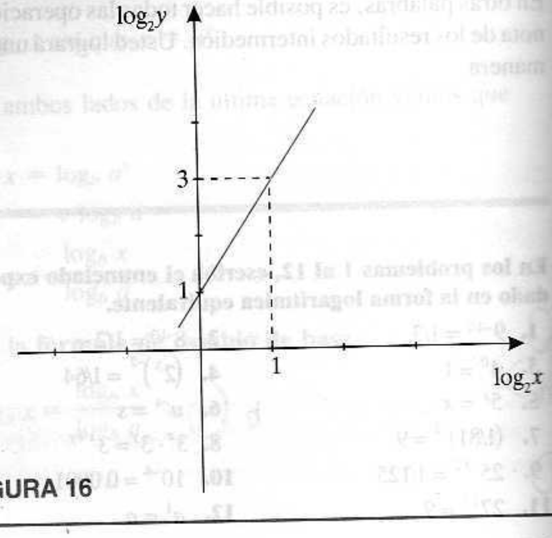


FIGURA 16

5.3 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

ECUACIONES EXPONENCIALES

Consideremos la función $P(t) = 1{,}000(\frac{3}{2})$. Cuando $t = 1$, vemos que $P(1) = 1{,}500$. Supongamos que ahora cambiamos el problema: para un valor dado de P, encontremos el valor correspondiente de t. Por ejemplo si $P = 2{,}250$, debemos resolver la ecuación exponencial

$$2{,}250 = 1{,}000(\tfrac{3}{2})^t, \quad \text{o} \quad (\tfrac{3}{2})^t = 2.25$$

para encontrar el valor de la variable t. Escribiendo la última ecuación en una forma logarítmica equivalente, tenemos

$$\begin{aligned} t &= \log_{3/2} 2.25 \\ &= \log_{3/2} \tfrac{9}{4} \\ &= \log_{3/2} (\tfrac{3}{2})^2 \\ &= 2 \log_{3/2} (\tfrac{3}{2}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$\boxed{\log_4 \frac{1}{2} = x^2 - 1}$

$4^x = \frac{1}{2}$

$4^x = 2^{-1}$

$2^{2x} = 2^{-1}$

$2x = -1$

$\boxed{x = -\frac{1}{2}}$

$-\frac{1}{2} = x^2 - 1$

$1 - \frac{1}{2} = x^2$

$\frac{1}{2} = x^2$

$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

EJEMPLO 1

Resuelva $4^{x^2-1} = \frac{1}{2}$.

Solución. Si escribimos la ecuación dada en forma logarítmica, tenemos

$$x^2 - 1 = \log_4 \tfrac{1}{2}$$

Pero $\log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, ya que $4^{-1/2} = \frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= -\tfrac{1}{2} \\ x^2 &= \tfrac{1}{2} \\ x &= \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\log 100 = 2$

Prueba: $4^{(\sqrt{1/2})^2-1} = 4^{-1/2} = \frac{1}{2}$ y $4^{(-\sqrt{1/2})^2-1} = 4^{-1/2} = \frac{1}{2}$.

$10^{x^2-1} = 4^{\frac{1}{2}}.$

EJEMPLO 2

Resuelva $4^x = 69$.

Solución. Escrita en forma logarítmica, la ecuación tiene la siguiente solución

$$x = \log_4 69$$

Ya que las calculadoras científicas sólo usan logaritmos comunes y naturales, entonces no podemos dar un valor numérico inmediato para $\log_4 69$. Sin embargo, podemos salir de este pequeño dilema utilizando logaritmos de base 10 y la fórmula de cambio de base (9):

$$x = \log_4 69 = \frac{\log_{10} 69}{\log_{10} 4}.$$

Ahora podemos obtener con la calculadora: $x \approx 3.0543$.

Solución alterna. Tomando el logaritmo de base 10 de ambos lados de la ecuación $4^x = 69$, vemos que

$$\log_{10} 4^x = \log_{10} 69$$
$$x \log_{10} 4 = \log_{10} 69$$
$$x = \frac{\log_{10} 69}{\log_{10} 4} \approx 3.0543$$

EJEMPLO 3

Resuelva $5x - 5^{-x} = 2$

Solución. Ya que $5^{-x} = 1/5^x$, la ecuación es

$$5^x - \frac{1}{5^x} = 2$$

Multiplicando ambos lados por 5^x tenemos

$$(5^x)^2 - 1 = 2(5^x)$$

o

$$(5^x)^2 - 2(5^x) - 1 = 0$$

Esta última ecuación puede interpretarse como una ecuación de segundo grado en 5^x. Utilizando la fórmula de segundo grado para resolver para 5^x, tenemos

$$5^x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2}$$
$$= 1 \pm \sqrt{2}$$

Pero como 5^x siempre es positivo, debemos rechazar el número negativo $1 - \sqrt{2}$. En consecuencia,

$$5^x = 1 + \sqrt{2}. \tag{10}$$

Tomando el logaritmo de base 10 de ambos lados, tenemos

$$\log_{10} 5^x = \log_{10} (1 + \sqrt{2})$$
$$x \log_{10} 5 = \log_{10} (1 + \sqrt{2})$$
$$x = \frac{\log_{10} (1 + \sqrt{2})}{\log_{10} 5}$$
$$x \approx 0.5476 \tag{11}$$

En los ejemplos 2 y 3 pudimos utilizar el logaritmo natural en lugar del logaritmo común para hallar x. Por ejemplo, tomando el logaritmo natural de ambos lados de (10), tenemos

$$x = \frac{\ln (1 + \sqrt{2})}{\ln 5}$$

Usted debe verificar en una calculadora que el resultado sea el mismo del obtenido en (11).

EJEMPLO 4

Resuelva $e^{4t} = 23$.

Solución. Tenemos

$$4t = \ln 23$$

$$t = \tfrac{1}{4} \ln 23$$

Utilizando una calculadora encontramos

$$t \approx 0.7839$$

Como una función exponencial $f(x) = b^x$ es uno a uno, una ecuación como

$$b^{x_1} = b^{x_2} \text{ implica que } x_1 = x_2 \qquad \textbf{(12)}$$

EJEMPLO 5

Resuelva $7^{2(x+1)} = 343$.

Solución. Observando que $343 = 7^3$, tenemos la misma base en ambos lados de la ecuación:

$$7^{2(x+1)} = 7^3$$

De esta forma basándonos en (12) podemos igualar exponentes:

$$2(x + 1) = 3$$

$$2x + 2 = 3$$

$$2x = 1$$

$$x = \tfrac{1}{2}$$

ECUACIONES LOGARITMICAS

Aprovechando el hecho de que los enunciados $b^y = x$ y $y = \log_b x$ son equivalentes, también podemos resolver ciertas cuestiones que tienen que ver con logaritmos.

EJEMPLO 6

$10^2 = 2x+50$

Resuelva $\log_{10} (2x + 50) = 2$.

Solución. La ecuación puede escribirse de manera equivalente así:

$$2x + 50 = 10^2$$

o

$$2x + 50 = 100$$

$$2x = 50$$

$$x = 25$$

Usted debe verificar esta solución.

EJEMPLO 7

Resuelva $\log_2 x + \log_2 (x-2) = 3$. **(13)**

Solucion. Basándonos en la ley (i) de la sección 5.2, podemos escribir la suma de logaritmos como un solo logaritmo:

$$\log_2 x(x-2) = 3$$

En consecuencia, tenemos

$$\begin{aligned} x(x-2) &= 2^3 \\ x^2 - 2x &= 8 \\ x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ (x-4)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Concluimos que x puede ser igual a 4 o a -2. Sin embargo, $x = -2$ debe desecharse ya que $\log_2 x$ en (13) no está definido para $x \leq 0$. De esta forma, la única solución de la ecuación es $x = 4$.

Prueba:

$$\begin{aligned} \log_2 4 + \log_2 2 &= \log_2 2^2 + \log_2 2 \\ &= 2 \log_2 2 + \log_2 2 \\ &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

EJEMPLO 8

Resuelva $\log_3 (7-x) - \log_3 (1-x) = 1$. **(14)**

Solución. Basándonos en la ley (ii) de la sección 5.2, podemos escribir la ecuación así:

$$\log_3 \frac{7-x}{1-x} = 1$$

de forma que

$$\frac{7-x}{1-x} = 3^1$$

Multiplicamos la última ecuación por $1 - x$ y despejamos x:

$$\begin{aligned} 7 - x &= 3(1-x) \\ 7 - x &= 3 - 3x \\ 2x &= -4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

En este momento *no* debemos concluir que $x = -2$ no es una solución de (14) simplemente porque es negativa. En realidad $x = -2$ sí es una solución, pues

$$\begin{aligned} \log_3 (7-(-2)) - \log_3 (1-(-2)) &= \log_3 9 - \log_3 3 \\ &= \log_3 \tfrac{9}{3} \\ &= \log_3 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Recordemos que $f(x) = \log_b x$ también es una función uno a uno. Así que

$$\log_b x_1 = \log_b x_2 \text{ implica que } x_1 = x_2 \qquad (15)$$

EJEMPLO 9

Resuelva $2 \log_2 x + 3 \log_2 2 = 3 \log_2 x - \log_2 \frac{1}{32}$.

Solución. Primero, reformulamos cada lado de la ecuación como un solo logaritmo:

$$\log_2 x^2 + \log_2 2^3 = \log_2 x^3 - \log_2 \tfrac{1}{32}$$

$$\log_2 2^3 x^2 = \log_2 \frac{x^3}{1/32}$$

$$\log_2 8x^2 = \log_2 32x^3$$

Entonces, resulta de (15) que:

$$8x^2 = 32x^3$$

$$8x^2 - 32x^3 = 0$$

$$8x^2(1 - 4x) = 0$$

$-4x = -1$

$4x = 1$

$x = 1/4$

de esa forma, x puede ser 0 ó $\frac{1}{4}$. Pero $\log_2 x$ no se define por $x = 0$, por tanto, la única solución posible es $x = \frac{1}{4}$.

Solución alterna: según el álgebra, la ecuación original puede escribirse así:

$$3 \log_2 2 + \log_2 \tfrac{1}{32} = \log_2 x,$$

ya que $3 \log_2 x - 2 \log_2 x = \log_2 x$. Luego encontramos

$$\log_2 8 + \log_2 \tfrac{1}{32} = \log_2 x$$

$$\log_2 \tfrac{8}{32} = \log_2 x$$

$$\log_2 \tfrac{1}{4} = \log_2 x.$$

$3^{-3x} = 3^{-4}$

$-3x = -4$

$\boxed{x = \frac{4}{3}}$

En este caso, (15) nos indica que $x = \frac{1}{4}$. Lo importante aquí es que dependiendo del método que se utilice, usted puede introducir soluciones extrañas

$10^{x-2} = 1$

EJERCICIO 5.3

En los problemas 1 al 22, resuelva la ecuación exponencial dada.

1. $10^{x-2} = 1$
2. $4^x = 6(4^{x^2})$
3. $3^{-3x} = 1/81$ $\boxed{4/3}$
4. $10^{-3x} = 1/(100{,}000)$
5. $5 - 5^{2s} = 0$
6. $5^{-x} = 10$
7. $e^{4x-8} = 16$
8. $9^{\log_3 x} = 36$
9. $3^x + 3^{-x} = 2$
10. $e^x - e^{-x} = -2$
11. $\dfrac{1}{2^{x^2}} = 8^{3-2x}$
12. $1/4(6^{-2x}) - 9(6^x) = 0$
13. $8(2^{-x+2}) = (2^{1-x})^3$
14. $5^{2t} - 6(5^t) + 5 = 0$
15. $1/5 = (2^{x^2-1} - 3)^{-1}$
16. $(1/2)^x = 4^{1-2x}$
17. $3^{|x|-1} = 9$
18. $(e^2)^{x^2} - \left[\dfrac{1}{e^{3x+2}}\right]^2 = 0$
19. $e^{2x} - 26(e^x) + 25 = 0$
20. $36^t - 10(6^t) + 16 = 0$
21. $3^x = 4^{2x+1}$
22. $5^{x+4} = 3^{x-16}$

En los problemas 23 al 42, resuelva la ecuación logarítmica dada.

23. $\log_7 4x = \log_7 60$
24. $\ln(7 + 2x) = \ln(1 + 4x)$

25. $\ln x = \ln 8 + \ln 2$
26. $3\log_{10} x = 2\log_{10} 6 + 3\log_{10} 3 - \log_{10} 9$
27. $\log_2 1/x^2 = 3$
28. $\log_7 6 - x = 1$
29. $\log_3(\log_2 4x) = 1$
30. $\log_4 \sqrt{x^2+25} = 2$
31. $\log_5 (25^x)^2 - \log_5 (5^x) = 4$
32. $(\ln x)^2 - 3\ln x = 2$
33. $\log_{10} \sqrt{x} = \log_{10} x - 1$
34. $\log_2 4 + \log_2(x-3) = \log_2(2x+1)$
35. $\log_2 x = 4 - \log_2(10-x)$
36. $\log_8 3x - \log_8(x+1) = 0$
37. $\log_6 x + \log_6 x^2 = 3$
38. $\log_5 54 - \log_5 2 = 2\log_5 x - \log_5 \sqrt{x}$
39. $\ln\sqrt{10x+5} - \ln 3 = \ln\sqrt{x+1}$
40. $\ln x^2 - \ln x^3 + \ln x^5 = \ln 16$
41. $\ln x^2 = (\ln x)^2$
42. $\dfrac{\ln e^{3x}}{\ln(1/e^2)} = 1/2$

En los problemas 43 y 44, resuelva la ecuación dada.

43. $y^{\ln y} = e^{16}$ **44.** $y^{\log_{10} y} = \dfrac{100{,}000}{y^4}$

En los problemas 45 al 50, grafique las funciones dadas. Determine la coordenada x (aproximada) de los puntos de intersección de sus gráficas.

45. $f(x) = 6e^x$, $g(x) = 4^{-x}$
46. $f(x) = 3^x$, $g(x) = 4 - 3^x$
47. $f(x) = 2^{x^2}$, $g(x) = 3(2^x)$
48. $f(x) = 1/2\, 3^{x^2}$, $g(x) = 3^{x^2} - 1$
49. $f(x) = \ln e/x$, $g(x) = \ln x$
50. $f(x) = \log_6 x/2$, $g(x) = \log_3 x$

51. Dada la masa (m) medida en kg y la altura (h) medida en cm de una persona, los investigadores médicos utilizan la fórmula empírica

$$\log_{10} A = -2.144 + 0.425 \log_{10} m + (0.725) \log_{10} h$$

para calcular el área (A) de la superficie de su cuerpo.

(a) Calcule el área A de la superficie del cuerpo de una persona cuyo peso es de 75 kg y mide 180 cm.

(b) Calcule el área de la superficie de su cuerpo.

52. Una fórmula empírica descubierta por DeGroot y Gebhard relaciona el diámetro d de la pupila del ojo (en milímetros) con la luminancia B de una fuente de luz (medida en miliambertz, mL):

$$\log_{10} d = 0.8558 - 0.000401(8.1 + \log_{10} B)^3$$

(Véase figura 17).

(a) El promedio de luminancia del cielo despejado es de aproximadamente 255 mL. Encuentre el correspondiente diámetro de la pupila.

(b) La luminancia del Sol varía de aproximadamente 190,000 mL al amanecer a 51,000,000 mL al mediodía. Encuentre los correspondientes diámetros de la pupila.

(c) Encuentre la correspondiente luminancia para una pupila de 6 mm de diámetro.

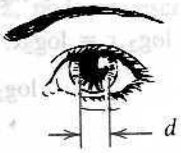


FIGURA 17

5.4 Aplicaciones

Una forma de la función exponencial dada por

$$f(t) = Cb^{kt} \tag{16}$$

donde C, b y k son constantes, juega un papel importante para describir muchos y diversos fenómenos en ciencia, ingeniería y en negocios.

CRECIMIENTO

En biología la fórmula (16) se utiliza con frecuencia como modelo matemático para describir el **crecimiento** de poblaciones de bacterias, de pequeños animales y, en algunas circunstancias, de humanos.

EJEMPLO 1

La población P en una comunidad después de t años se da por

$$P(t) = 1{,}000\left(\tfrac{3}{2}\right)^t$$

¿La población crece o decrece con el incremento del tiempo?, ¿cuál es la población inicial?, ¿cuál es la población después de 1, 2 y 5 años?

Solución. Podemos pensar en $P(t)$ como un múltiplo constante de $\left(\frac{3}{2}\right)^t$. Ya que $1{,}000 > 0$ y $b = \frac{3}{2} > 1$, la población aumenta a medida que lo hace el tiempo. La población inicial se da cuando $t = 0$:

$$P(0) = 1{,}000\left(\tfrac{3}{2}\right)^0 = 1{,}000$$

También

$$P(1) = 1{,}000\left(\tfrac{3}{2}\right)^1 = 1{,}500$$

$$P(2) = 1{,}000\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 = 1{,}000\left(\tfrac{9}{4}\right) = 2{,}250$$

$$P(5) = 1{,}000\left(\tfrac{3}{2}\right)^5 = 1{,}000\left(\tfrac{243}{32}\right) \approx 7{,}594$$

A comienzos del siglo XIX el religioso y economista inglés Thomas R. Malthus (1776-1834) utilizó la función $P(t) = P_0e^{kt}$, $k > 0$ como modelo matemático para pronosticar la población mundial. Para unos valores específicos de P_0 y k, los valores funcionales $P(t)$ eran, en realidad, aproximaciones razonables a la población mundial durante el siglo XVIII. Como $P(t)$ es una función creciente, Malthus predijo que el futuro crecimiento de la poblacion sobrepasaría la capacidad mundial para producir alimentos. En consecuencia, Malthus también predijo las guerras y hasta las hambrunas mundiales. Siendo más adivino que profeta, Malthus no pudo prever que el abastecimiento de alimentos igualaría el ritmo de crecimiento de la población, gracias a los avances simultáneos en ciencia y tecnología.

Un modelo más realista para predecir las poblaciones en pequeños países fue perfeccionado por el matemático y biólogo belga P.F. Verhulst en 1840. La llamada **función logística**

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}} \tag{17}$$

donde a, b y P_0 son constantes, también ha demostrado ser bastante certera para describir poblaciones de protozoos, bacterias, insectos de las frutas, insectos acuáticos y animales que viven en espacios limitados. Aunque (17) es una función creciente, la gráfica de P contiene asíntotas horizontales en $P = 0$ y $P = a/b$. De esta forma, en contraste con el modelo maltusiano, las poblaciones pronosticadas por (17) deben presentar un crecimiento limitado, es decir, no crecerán más allá de cierta cantidad. Este crecimiento inhibido podría ser causado por depredadores, superpoblación, competencia por el alimento, polución, planificación familiar, etc.

DESINTEGRACION

El elemento 88, mejor conocido como radio, es radiactivo. Esto significa que los átomos de radio se **desintegran** espontáneamente, emitiendo una radiación en forma de partículas alfa, beta o rayos gama. Cuando un átomo se desintegra de esta manera, su núcleo se transforma en el núcleo de otro elemento. El núcleo de un átomo de radio en desintegración se transforma en el núcleo de un átomo de radón. La función exponencial (16) también puede servir como modelo matemático para aproximar la cantidad que queda de un elemento en proceso de desintegración mediante la radiactividad.

EJEMPLO 2

Supongamos que hay 20 gramos de radio disponibles inicialmente. Después de t años la cantidad restante es dada por

$$A(t) = 20e^{-0.000418t}$$

Encuentre la cantidad de radio que queda después de 100 años. ¿Qué porcentaje de los 20 gramos se habrá desintegrado después de 100 años?

Solución. Utilizando una calculadora, encontramos que

$$\begin{aligned} A(100) &= 20e^{-0.000418(100)} \\ &\approx 19.1812 \text{ g} \end{aligned}$$

En otras palabras, después de 100 años sólo

$$\frac{20 - 19.182}{20} \times 100\% \approx 4.1\%$$

de la cantidad inicial se ha desintegrado.

VIDA MEDIA

La **vida media** de un elemento radiactivo se define por el tiempo que se tarda la mitad de cierta cantidad de ese elemento en desintegrarse y transformarse en un nuevo elemento. La vida media es la medida de la estabilidad del elemento, es decir, cuanto más corta sea la vida media, más inestable es el elemento. Por ejemplo, la vida media del altamente radiactivo estroncio 90, Sr-90, es de 29 días, mientras que la vida media del isótopo del uranio U-238 es de 4,560 millones de años. La vida media del californio, Cf-244, descubierto en 1950, es sólo de 45 minutos. El polonio, Po-213, tiene una vida media de 0.000001 de segundo.

EJEMPLO 3

Si hay A_0 gramos de radio inicialmente, entonces el número de gramos que quedan t años después es de

$$A(t) = A_0e^{-0.000418t}$$

Determine la vida media del radio.

Solución. Debemos encontrar el tiempo en que $A = A_0/2$, es decir, debemos resolver la ecuación

$$\frac{A_0}{2} = A_0e^{-0.000418t}$$

para t. Dividiendo por A_0 y reformulándola en términos logarítmicos:

$$-0.000418t = \ln\frac{1}{2}$$

o

$$t = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0.000418}$$

Utilizando la tecla $\boxed{\texttt{ln}}$ y luego dividiendo obtenemos el resultado de una calculadora:

$$t \approx 1{,}658 \text{ años}$$

Nótese en el ejemplo 3 que la cantidad inicial A_0 de radio no ha hecho parte del cálculo real de la vida media. Así, la vida media de 1 gramo, 20 gramos ó 10,000 gramos de radio es la misma. La mitad de *cualquier* cantidad de radio tarda 1,700 años para transformarse en radón.

CARBONO 14

La edad aproximada de los fósiles puede determinarse por un método conocido como **carbono 14**. Este método, inventado por el químico Willard Libby en 1950, se basa en el hecho de que los organismos vivos absorben carbono 14 radiactivo, C-14, a través de los procesos de alimentación y respiración, dejando de absorberlo al morir. Como se indica en el siguiente ejemplo, el procedimiento de carbono 14 se basa en que la vida media del C-14 es de 5,600 años. Libby ganó el Premio Nobel en Química en 1960 por este trabajo.

EJEMPLO 4

Se encontró un fósil con 1/1,000 de la cantidad de C-14 que el organismo contenía mientras vivió. Determine la edad aproximada del fósil.

Solución. Si había una cantidad inicial de A_0 g de C-14 en el organismo, entonces t años después de su muerte hay $A(t) = A_0e^{kt}$ gramos restantes. Cuando $t = 5{,}600$, $A(t) = A_0/2$, y así

$$\frac{A_0}{2} = A_0e^{5.600\,k}$$

Resolviendo la última ecuación para k tenemos

$$e^{5.600\,k} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{5600} = -0.000124$$

Así,

$$A(t) = A_0e^{-0.000124t}$$

Finalmente, para determinar la edad del fósil, despejamos t en la última ecuación cuando $A(t) = A_0/1{,}000$:

$$\frac{A_0}{1{,}000} = A_0e^{-0.000124t}$$

$$t = -\frac{\ln\frac{1}{1{,}000}}{0.000124} \approx 55{,}708 \text{ años}$$

CIRCUITOS

El **circuito en serie** que se muestra en la figura 18 consta de un voltaje constante E, una inductancia de L henrios y una resistencia de R ohmios. Puede demostrarse que la corriente I se da en cualquier momento por

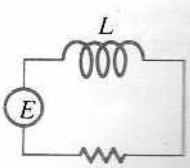


FIGURA 18

$$I = \frac{E}{R}[1 - e^{-(R/L)t}]. \qquad (18)$$

EJEMPLO 5

Despejar t según (18) en términos de la corriente I.

Solución. Según el álgebra, encontramos que

$$\frac{IR}{E} = 1 - e^{-(R/L)t}$$

$$e^{-(R/L)t} = 1 - \frac{IR}{E}$$

obteniendo

$$-\left(\frac{R}{L}\right)t = \ln\left(1 - \frac{IR}{E}\right)$$

$$t = -\frac{L}{R}\ln\left(1 - \frac{IR}{E}\right)$$

INTERES COMPUESTO

Las inversiones, tales como las cuentas de ahorros, pagan una tasa anual de interés que puede componerse anual, trimestral, semanal, diaria y así sucesivamente. En general, si una suma de C dólares se invierte con una tasa de interés anual r que se compone n veces al año, entonces la cantidad S incrementada al cabo de t años se da por

$$S = C\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad (19)$$

S es el **valor futuro** del capital C. Ahora, si el número de n crece sin límite, se dice que el interés se compone **continuamente.** Para encontrar el valor futuro de C en este caso, sea $m = n/r$. Entonces, $n = mr$ y

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mrt}$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}$$

A medida que n aumenta sin límite, m crece necesariamente sin límite, es decir, $n \to \infty$ implica que $m \to \infty$. De (2), sección 5.1 deducimos que cuando

$$C\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \to C[e]^{rt} \text{ cuando } m \to \infty$$

De esta manera, si una tasa anual r de interés se compone continuamente, el valor futuro S de un capital C en t años es de

$$S = Ce^{rt} \qquad (20)$$

EJEMPLO 6

Supongamos que una suma de US$1,000 se deposita en una cuenta de ahorros, cuya tasa de interés anual es 9%. Compare el valor futuro de esta suma en 5 años (**a**) si el interés se compone mensualmente y (**b**) si el interés se compone continuamente.

Solución

(**a**) Como el año tiene 12 meses, identificamos $n = 12$. Además con $C = 1{,}000$, $r = 0.09$ y $t = 5$, (19) llega a ser

$$C = 1{,}000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12(5)}$$
$$= 1{,}000(1.0075)^{60}$$

Utilizando la tecla $\boxed{y^x}$ en una calculadora, obtenemos US$1,565.68

$$C \approx \$1{,}565.68$$

(**b**) Ahora, según (20) tenemos

$$C = 1{,}000e^{(0.09)(5)}$$
$$= 1{,}000e^{0.45}$$
$$\approx \$1{,}568.31$$

Acumulando el interés continuo y no mensualmente, hemos ganado US$2.63 en cinco años.

En los siguientes dos ejemplos observaremos algunas aplicaciones del logaritmo común.

pH DE UNA SOLUCION

En química el potencial de hidrógeno o **pH** de una solución se define de la siguiente manera:

$$\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+] \qquad \textbf{(21)}$$

donde el símbolo $[\text{H}^+]$ denota la concentración de iones de hidrógeno en una solución medida en moles por litro. (La escala pH fue inventada en 1909 por el químico danés Soren Sorensen).

Las soluciones se clasifican de acuerdo con su valor de pH como *ácida, básica* o *neutras*. Cuando $0 < \text{pH} < 7$ la solución es *ácida*; cuando $\text{pH} > 7$ la solución es *básica* (o alcalina); y cuando $\text{pH} = 7$, la solución es *neutra*. El agua (no contaminada por otras soluciones o lluvia ácida) es un ejemplo de solución neutra, mientras que el jugo de limón no diluido es altamente ácido y tiene un pH en nivel $\text{pH} \leq 3$.

Como lo muestra el siguiente ejemplo, el pH suele calcularse en una cifra decimal.

EJEMPLO 7

La concentración de iones de hidrógeno en la sangre de una persona saludable suele ser $[\text{H}^+] = 3.98 \times 10^{-8}$ moles/litro. Encuentre el pH de la sangre.

Solución. Según (21) y las leyes de logaritmos, vemos que

$$\begin{aligned} pH &= -\log_{10}(3.98 \times 10^{-8}) \\ &= -[\log_{10} 3.98 + \log_{10} 10^{-8}] \\ &= -[\log_{10} 3.98 - 8 \log_{10} 10] \\ &= -[\log_{10} 3.98 - 8(1)]. \end{aligned}$$

Con la ayuda de la tecla $\boxed{\log}$ de una calculadora, encontramos que

$$\begin{aligned} pH &\approx -[0.5999 - 8] \\ &\approx 7.4 \end{aligned}$$

La sangre humana es casi siempre una solución básica. El pH de la sangre suele oscilar entre el estrecho nivel de $7.2 < pH < 7.6$ Una persona que tenga un pH en la sangre por fuera de estos límites puede sufrir enfermedades e, incluso, la muerte.

ESCALA RICHTER

Los terremotos de magnitud 6 o más se consideran potencialmente destructivos.

En 1935 el sismólogo norteamericano Charles F. Richter (1900-1985) ideó una escala para comparar la fuerza de los diferentes terremotos. En la **escala Richter** la magnitud R de un terremoto se define por:

$$R = \log_{10} \frac{A}{A_0} \tag{22}$$

donde A es la amplitud de la onda sísmica mayor del terremoto y A_0 es una amplitud de referencia que corresponde a la magnitud $R = 0$.

EJEMPLO 8

La magnitud del famoso terremoto de San Francisco de 1906 se ha calculado en 8.25 en la escala Richter. En 1979 un terremoto de magnitud 5.95 se dio en esta ciudad. ¿Cuántas veces más intenso fue el de 1906?

Solución. Según (22) tenemos

$$8.25 = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right)_{1906} \quad \text{y} \quad 5.95 = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right)_{1979}$$

Esto significa que

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{1906} = 10^{8.25} \quad \text{y} \quad \left(\frac{A}{A_0}\right)_{1979} = 10^{5.95}$$

Ahora, como $8.25 = 2.3 + 5.95$, se deduce de las leyes de exponentes que

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{A_0}\right)_{1906} &= 10^{8.25} \\ &= 10^{2.3} \cdot 10^{5.95} \\ &= 10^{2.3}\left(\frac{A}{A_0}\right)_{1979} \\ &\approx (199.5)\left(\frac{A}{A_0}\right)_{1979} \end{aligned}$$

Es decir, que el terremoto de 1906 fue aproximadamente 200 veces más intenso que el de 1979.

EJERCICIO 5.4

1. La población de una colonia de bacterias se incrementa con el modelo de crecimiento $N(t) = N_0 3^{t/20}$ (donde t se mide en minutos). ¿Cuánto tiempo tarda en crecer de 100 a 200 bacterias?, ¿de 100 a 300?

2. El número de bacterias presentes en un cultivo después de t horas se da por $N(t) = N_0 e^{0.368t}$, donde el tiempo t se mide en horas. Si la colonia comenzó con 200 bacterias, ¿cuántas habrá después de ocho horas?, ¿después de un día?

3. El número de bacterias existentes en un cultivo después de t horas se da por $N(t) = N_0 e^{kt}$.

(a) Encuentre k, si se sabe que después de dos horas la colonia ha extendido 1.5 veces su población inicial.

(b) Encuentre el tiempo que tarda para cuadruplicar su tamaño.

4. La población mundial en 1976, según el informe de un semanario, era de 4,000 millones de personas. Se estima que en 1986 era de 4,700 millones. ¿Cuál fue la tasa de crecimiento anual en esos diez años? ¿Cuál será la población mundial, de mantenerse esa tasa, en el año 2026?

5. La población de una pequeña comunidad después de t años es aproximadamente de $P(t) = 2{,}500e^{kt}$. Si después de diez años la población inicial aumentó en 40%, ¿cuál será la población aproximada después de otros diez años?

6. El plutonio Pu-239 es el isótopo utilizado en las bombas atómicas. La cantidad que queda de 80 gramos de esa sustancia radiactiva después de t años se da por $A(t) = 80e^{-0.0000287t}$. Después de 10,000 años, ¿qué porcentaje de plutonio habrá desaparecido? ¿Cuántos gramos quedarán?

7. Utilice el problema 6 para determinar la vida media del plutonio 239.

8. El neptunio –239 (239*Np*) tiene una vida media de 2.24 días. Determine el modelo de decaimiento para el neptunio. ¿Qué porcentaje de 80 gramos de neptunio habrá desaparecido al cabo de 20 días? ¿Cuántos gramos quedarán?

9. Determine la vida media del radio si su fórmula para el decaimiento radiactivo es de $A(t) = A_0 e^{-0.0004279t}$

10. Suponga que cierta sustancia radiactiva se desintegra a tal ritmo que, al final de cualquier día, sólo existe la tercera parte de la cantidad presente al comienzo del día.

(a) Si inicialmente hay 300 gramos de la sustancia, ¿cuánto quedará al final de t días?

(b) ¿Qué cantidad de la sustancia queda al final de una semana?

11. Un grupo de arqueólogos encontró un fósil y pudo determinar que en él se había desintegrado aproximadamente 80% del carbono 14 radiactivo; ¿cuál es la edad aproximada del fósil?

12. Si se estima que un fósil tiene 100,000 años, ¿qué porcentaje contiene de su carbono 14 original?

13. Suponga que se invierten US$5,000 a un interés anual de 8%; compare los valores futuros de esa cantidad en un año, completando la tabla.

INTERES COMPUESTO	n	VALOR FUTURO DE US$5,000 EN UN AÑO
Anual	1	5400
Semestral	2	5408
Trimestral	4	5412,16
Mensual	12	5415
Semanal	52	5416.10
Diario	365	5416.35
Cada hora	8,760	5416.43
Continuamente	$n \to \infty$	5416 44

14. ¿Cuánto dinero debe invertir al 8% compuesto de manera continua para obtener un rendimiento de un millón de dólares al cabo de 15 años?

15. Una tarjeta de crédito común carga un interés anual de 20.5% compuesto mensualmente. Si usted realiza una compra de US$800 con cargo a una tarjeta de crédito y no realiza pago alguno durante un año, ¿cuál será su deuda al final del año?

16. Si se depositan US$20,000 en una cuenta bancaria que paga una tasa de interés anual de 8.5% compuesta trimestralmente, ¿cuánto tiempo transcurre hasta que haya US$30,000 en la cuenta?

En los problemas 17 al 22, encuentre el pH de una solución con la concentración de iones de hidrógeno $[H^+]$

17. 10^{-8}

18. 3.8×10^{-7}

19. 4.7×10^{-6}

20. 8.7×10^{-4}

21. 7.4×10^{-5}

22. 5.3×10^{-3}

En los problemas 23 al 28, encuentre la concentración de iones de hidrógeno $[H^+]$ de una solución con el pH dado.

23. 3.8

24. 8.3

25. 9.7

26. 6.9

27. 5.6

28. 10.2

29. Debido a los efectos destructivos de la "lluvia ácida", causada principalmente por las emisiones de azufre, se revisan constantemente los niveles de pH en la lluvia o la nieve. Su concentración de iones de hidrógeno natural es de $[H^+] = 2.5 \times 10^{-6}$. Determine su pH natural.

30. ¿Cuál es la concentración de iones de hidrógeno de una muestra de lluvia que es 100 veces más ácida que la natural?

31. Las frutas requieren un suelo más ácido que los vegetales. Suponga que dos suelos tienen un pH de 4.8 y 6.5 respectivamente, ¿cuántas veces es más ácido el primer suelo que el segundo?

32. La serie mundial de 1989 fue interrumpida por el terremoto de Loma Prieta que registró 7.1 en la escala Richter. ¿Cuántas veces fue más intenso el terremoto de San Francisco de 1906?

33. La magnitud del terremoto de marzo de 1964 en Alaska fue de 8.5 en la escala de Richter. ¿Cuántas veces fue más intenso este terremoto comparado con el de Loma Prieta en 1989? ¿Comparado con el de Ciudad de México en 1985, de magnitud 7.8?

34. Suponga que tres terremotos T_1, T_2, T_3 registran magnitudes de 4, 6 y 8 en la escala de Richter, respectivamente. Compare las intensidades de los tres terremotos.

35. El **nivel de intensidad** b de un sonido medido en decibeles (dB) se define por

$$b = 10\log_{10}\frac{I}{I_0} \qquad (23)$$

donde I es la intensidad del sonido medida en vatios/cm² y I_0 = 10-16 vatios/cm² es la intensidad del sonido más débil que pueda oírse (0 dB). Complete la siguiente tabla:

SONIDO	INTENSIDAD VATIOS/CM²	NIVEL DE INTENSIDAD EN dB
Umbral de dolor del oído humano	10^{-4}	
Despegue de un jet	10^{-7}	
Alarma de fuego	10^{-9}	
Conversación	10^{-11}	
Susurro	10^{-14}	

36. La **intensidad del sonido** I es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d desde la fuente. Si d_1 y d_2 son las distancias desde una fuente de sonido, demuestre que los correspondientes niveles de intensidad se relacionan por

$$b_2 = b_1 + 20\log_{10}\frac{d_1}{d_2} \qquad (24)$$

37. El nivel de intensidad b_1 de un avión P_1 que pasa sobre un punto de la Tierra a una altitud de 1,800 pies, es de 65 dB. Encuentre el nivel de intensidad b_2 de otro avión P_2 que pasa sobre el mismo punto a una altitud de 3,000 pies.

38. A una distancia de 4 pies el nivel de intensidad de una conversación es de 50 dB. ¿Cuál es el nivel de intensidad a 10 pies?, ¿a 15 pies?

39. El brillo de las estrellas a simple vista se mide en unidades llamadas magnitudes. El astrónomo griego Ptolomeo estableció seis categorías; las estrellas más opacas tienen magnitud 6 y las más brillantes tienen magnitud 1. Si L es la luminosidad de una estrella de magnitud M, y L_0 la luminosidad mínima para que una estrella sea visible, se deduce la siguiente fórmula para la magnitud M

$$M = 6 - 2.5\log_{10}(L/L_0)$$

Demuestre que las magnitudes M_A y M_B de dos estrellas A y B se relacionan con sus luminosidades L_A y L_B mediante la ecuación

$$\frac{L_A}{L_B} = 10^{0.4(M_B - M_A)}$$

40. ¿En qué proporción es más intensa la luz de una estrella de cualquier magnitud en relación con una estrella de magnitud una unidad menor?

41. Si la magnitud absoluta de la estrella A es 4 y la luminosidad absoluta de la estrella B es 10 veces la luminosidad de A, determine la magnitud absoluta de la estrella B.

42. Un principio básico de enfriamiento en física, llamado la **ley de enfriamiento de Newton**, establece que si un objeto a temperatura T_0 se coloca en un medio ambiente de temperatura constante C, entonces la temperatura T del objeto después de t minutos está dada por:

$$T(t) = C + (T_0 - C)e^{-kt},$$

donde k es una constante que depende de cada objeto.

Si un pastel se saca del horno a una temperatura de 300°F para un cuarto con temperatura constante de 70°F, y al cabo de 10 minutos tiene una temperatura de 250°F, ¿cuál es la constante k del pastel? ¿Cuál será la temperatura del pastel al cabo de 30 minutos? ¿Qué tiempo tardará en tener una temperatura de 120°F?

43. Si se conoce que la constante k en la ley de enfriamiento de Newton para una botella de jugo de naranja es $k = 0.092$, determine la cantidad de minutos que se demora en alcanzar la temperatura de 55°F una botella de jugo de naranja que está a 70°F y se introduce en una nevera que mantiene una temperatura constante de 45°F.

44. Si la inflación tiene una tasa estable anual r en un periodo amplio, entonces el valor de D_0 dólares después de t años está dado por

$$D = D_0(1 - r)^t$$

Si se supone una tasa de inflación de 5.2%, ¿cuánto valdrán US$1,000 después de 10 años? ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que su valor sea de US$100?

45. Si la fórmula general para los pagos mensuales M, requeridos por una cantidad prestada C, con una tasa anual r durante t años es

$$M = \frac{Cr}{12[1-(1+r/12)^{-12t}]}$$

¿Cuáles son los pagos mensuales requeridos por un préstamo de US$30,000 a una tasa anual de 18% durante un periodo de 4 años? ¿Cuánto se habrá pagado para liquidar el préstamo?

46. Después de que un estudiante con un virus gripal regresa a un campo universitario aislado, de 3,000 estudiantes, el número N de estudiantes infectados después de t días se pronostica por

$$N(t) = \frac{3{,}000}{1+2999e^{-0.895t}}$$

¿Cuántos estudiantes estarán infectados después de 10 días? Después de un largo periodo, ¿cuántos estudiantes pronostica la función dada que estarán infectados?

CONCEPTOS IMPORTANTES

Función exponencial	Leyes de los logaritmos	Desintegración
base $b > 0$, $b \neq 1$	Inverso de la función exponencial	Vida media
decreciente, $0 < b < 1$	Logaritmo común	Carbono 14
creciente $b > 1$	Logaritmo natural	Composición continua del interés
Función logarítmica	Fórmula de cambio de base	pH de una solución
base $b > 0$, $b \neq 1$	El número e	Escala Richter
	Crecimiento	

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 20, llene los espacios, o conteste verdadero o falso.

1. La función exponencial $f(x) = (1/b)^x$ es una función decreciente para $b >$. ________

2. La función logarítmica $f(x) = \log_{1/3} x$ es una función decreciente en $(0, +\infty)$. ________

3. La base del logaritmo natural es el número ________.

4. $\log_b (M - N) = \log_b M \div \log_b N$. ________

5. $\dfrac{\ln(216)}{\ln(36)} =$ ________.

6. Si $\log_a N = 0$, entonces $N =$ ________.

7. Si $\log_{10} a = 0.6990$, entonces $a =$ ________.

8. El intersecto en x de la gráfica de la función $f(x) = \log_8 (x + 4)$ es ________.

9. El intersecto en y de la gráfica de la función $f(x) = \log_9 (x + 7)$ es ________.

10. La gráfica de $f(x) = \log_6 (x - 8)$ tiene la asíntota vertical $x = 8$. ________

11. $\log_6 \left(6^3 + 5 \cdot \left(6^3\right)\right) =$ ________.

12. Si $\log_b 4 = 0.6021$ y $\log_b 5 = 0.6990$, entonces $\log_b 80$ es igual a ________.

13. Si $\log_b 16 = 1.097$ y $\log_b 12 = 0.8021$, entonces $\log_b 27 =$ ________.

14. Si f es una función exponencial, entonces si $f(x_1) = f(x_2)$ se tiene que $x_1 = x_2$. ________

15. En términos de logaritmo natural $\log_7 8$ puede escribirse así: ________.

16. $\ln e^{28} =$ ________.

17. $e^{\ln 5.7} =$ ________.

18. Si se invierten US$8,500 a 6.5% anual compuesto diariamente, entonces el tiempo en duplicarse la cantidad es ____.

19. La concentración de iones de hidrógeno de una solución con un pH de 9.1 es ________.

20. Si $A(t) = A_0 e^{kt}$ representa la cantidad restante de una sustancia radiactiva después de t años, entonces su vida media se da por

$$t = \frac{\ln 1/2}{k}.$$ ________

En los problemas 21 al 26, $f(x) = 3^x$, $g(x) = 4^{-x}$ y $h(x) = 5^x$. Encuentre los valores indicados.

21. $g(3)$

22. $f(4)$

23. $f(h(1))$

24. $h(6f(-1))$

25. $\left[g(\sqrt{2})\right]^{\sqrt{2}}$

26. $G\left[\dfrac{f(1)+h(1)}{4}\right]$

En los problemas 27 y 28, redefina el enunciado exponencial dado como un enunciado logarítmico equivalente.

27. $25^{-1/2} = 0.2$

28. $\sqrt[3]{216} = 6$

En los problemas 29 y 30, redefina el enunciado logarítmico dado como un enunciado exponencial equivalente.

29. $\log_{36} 216 = 1.5$

30. $\log_9 (81)^{-1} = -2$

En los problemas 31 y 32, escriba la expresión dada como un solo logaritmo.

31. $2 \log_5 16 + 3 \log_5 4 - 4 \log_5 36 + 2 \log_5 9$

32. $\ln(x^2 + y^2) - \ln 2x - \ln 3y + \ln 6$

En los problemas 33 al 36, encuentre el dominio de la función dada.

33. $f(x) = \dfrac{1}{4^x - 2}$

34. $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$

35. $f(x) = \ln|2x - 5|$

36. $f(x) = \ln(9 - x^2)$

En los problemas 37 y 38, grafique las funciones dadas en el mismo sistema de coordenadas.

37. $\begin{cases} y = \log_3 x \\ y = 3^x \end{cases}$

38. $\begin{cases} y = (1/4)^x \\ y = \log_{1/4} x \end{cases}$

En los problemas 39 al 42, grafique la función dada.

39. $f(x) = 4(1/2)^x$

40. $f(x) = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

41. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

42. $f(x) = \log_{10}(x)$

En los problemas 43 al 54, resuelva la ecuación dada.

43. $(1/2)^x = 4^{1-2x}$

44. $9^{2-5x} = 3^{-1}$

45. $5^{3x+2} = 10$

46. $9x^2 = 3^x$

47. $\log_7 x = -2$

48. $\ln(x + 1) = \ln(2x - 15)$

49. $\log_3 (\ln 2x) = 0$

50. $\log_6 (\ln x) = 1/2$

51. $\log_{10} (2x - 3) + \log_{10} x = \log_{10} 5$

52. $4 \ln x - \ln(x + 2) = \ln x^2 + \ln 1$

53. $e^{-3x+1} = 16$

54. $(\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x = 4$

55. Aparee la letra de la gráfica de la figura 19 con la función apropiada.

$f(x) = a^x, a > 2$

$f(x) = a^x, 1 < a < 2$

$f(x) = a^x, 1/2 < a < 1$

$f(x) = a^x, 0 < a < 1/2$

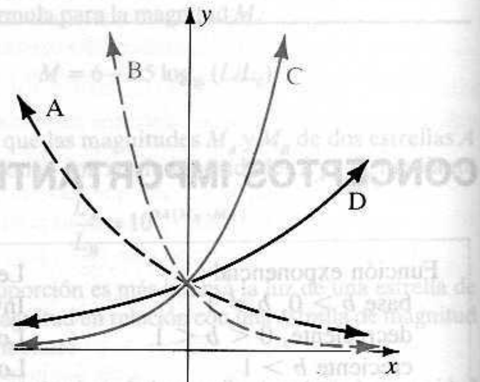


FIGURA 19

56. En la gráfica de la figura 20, llene los espacios en blanco para las coordenadas de los puntos en cada gráfica.

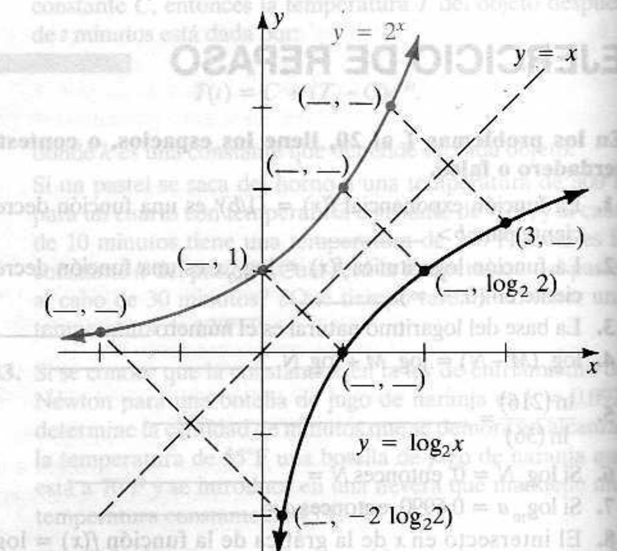


FIGURA 20

57. Utilice una gráfica para resolver la inecuación $\log_4 (2x + 3) > 0$.

58. Una suma de US\$20,000 se deposita en una cuenta de ahorros con un interés anual de 9% que se compone continuamente. ¿Cuál es el valor futuro en 5 años? ¿Cuánto tiempo se tardará en cuadruplicar la suma inicial?

59. Si un terremoto tiene una magnitud de 4.5 en la escala Richter, ¿cuál es la magnitud en la misma escala de uno que tiene una intensidad 20 veces mayor?

60. Un altímetro es un instrumento que mide la altitud; la mayoría de los aviones mide la altitud por medio de una escala que se calibra mediante la ecuación

$$h = (30t + 8000)\ \ln (p_0/p)$$

donde h es la altura en metros sobre el nivel del mar, t es la temperatura del aire en grados Celsius, p_0 es la presión atmosférica al nivel del mar, y P es la presión atmosférica a la altura h. La presión atmosférica se mide en centímetros de mercurio. Suponga que la presión atmosférica a cierta altura h es de 25.3 cm de mercurio siendo la temperatura –2°C. Si la presión atmosférica al nivel del mar es de 75 cm de mercurio, ¿cuál es la altitud del avión en pies?

61. El tritio, isótopo del hidrógeno, tiene una vida media de 12.5 años. ¿Cuánto quedará de la cantidad inicial al cabo de 25 años?

62. La cantidad restante de una sustancia radiactiva después de t años es dada por

$$A(t) = A_0 e^{-kt}, k > 0.$$

Demuestre que si

$$A(t_1) = A_1 \text{ y } A(t_2) = A_2 \text{ para } t_1 < t_2,$$

entonces la vida media del elemento es

$$t = \frac{(t_2 - t_1)\ln 2}{\ln\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)}$$

63. En 1947, un ganadero árabe entró a una gruta cerca de Qumran, a orillas del Mar Muerto, en busca de una cabra perdida y encontró lo que conocemos como los rollos del Mar Muerto. Se analizaron los escritos y se determinó que contenían el 76% de su carbono 14 original. Dé un estimado de la edad de los rollos.

64. El número $n!$ se define como el producto de los n primeros números

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

para cada entero positivo n. La fórmula de Stiring establece que $n!$ es aproximadamente igual a

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

para n grande. Utilice la fórmula para aproximar 30! y compare con el valor real.

65. Puede demostrarse que si en cierto año se consume una cantidad de A_0 de petróleo, y si existe una tasa de crecimiento anual de consumo r, entonces la cantidad A de petróleo consumido en los siguientes t años está dada por

$$A = \frac{A_0}{r}\left(e^{rt} - 1\right)$$

(a) Despeje t.

(b) En 1990 se estimó que las reservas de petróleo disponibles en el mundo eran de 983.4 miles de millones de barriles de petróleo y que en ese año se consumieron 21.3 miles de millones. Si existe una tasa anual de crecimiento del consumo de petróleo de 2.5%, estime el año que pronostica la fórmula anterior que se terminará la reserva de 1990.

66. Una pensión anual es un plan de ahorros en el que la misma cantidad de dinero P se deposita en una cuenta de ahorros en periodos iguales n (por ejemplo años). Si la tasa de interés anual r se compone continuamente, entonces la cantidad acumulada en la cuenta inmediatamente después del depósito n es:

$$S = P + Pe^r + Pe^{2r} + \ldots + Pe^{(n-1)r}$$

¿Cuál es el valor de dicha pensión en 20 años si P = US\$5,000 y la tasa de interés anual es de 8%?

6

Trigonometría del triángulo

Hiparco

La trigonometría se desarrolló a partir de los primeros esfuerzos hechos para avanzar en el estudio de la astronomía mediante la predicción de las rutas y posiciones de los cuerpos celestes y para mejorar la exactitud en la navegación y en el cálculo del tiempo y los calendarios.

El matemático y astrónomo griego Hiparco, quien vivió en el siglo II a. de C., fue uno de los principales desarrolladores de la trigonometría. Las tablas de "cuerdas" que construyó fueron las precursoras de las tablas de las funciones trigonométricas de la actualidad. La palabra trigonometría se deriva de dos raíces griegas: *trigon*, que significa triángulo y *metra*, que significa medida. Entonces, el nombre trigonometría se refiere a las varias relaciones entre los ángulos de un triángulo y sus lados.

Comenzamos este capítulo con un análisis sobre los ángulos, seguida de las definiciones de las funciones trigonométricas para los ángulos agudos en el triángulo rectángulo. Desarrollamos estas definiciones para aplicarlas a los ángulos en general y examinamos una amplia variedad de aplicaciones de la trigonometría triangular.

6.1 Angulos y su medición

Comenzamos el estudio de la trigonometría analizando los ángulos y los dos métodos utilizados para medirlos.

ANGULO

Un **ángulo** está formado por dos rayos que tienen un punto final en común llamado **vértice**. Designamos un rayo como **lado inicial** del ángulo y al otro lo llamamos **lado terminal**. Es conveniente considerar el ángulo como el resultado de una rotación desde el lado inicial hasta el lado terminal, como se muestra en la figura 1(a).

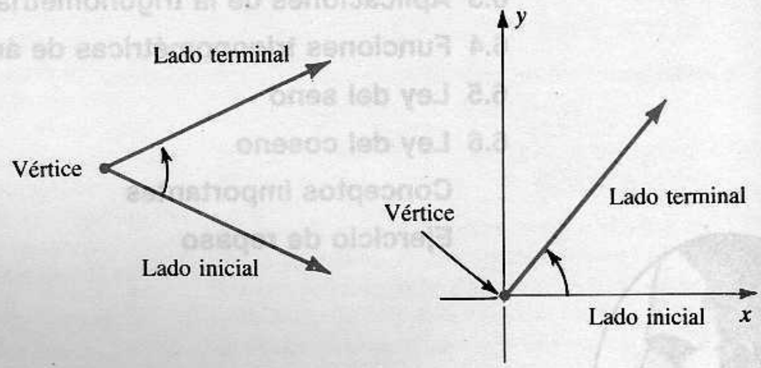


FIGURA 1 (a) (b)

$\frac{180}{270} = \frac{6}{9}\pi = \frac{3\pi}{2}$

$\frac{270}{180} = \frac{9}{6} \frac{3\pi}{2}$

POSICION NORMAL

Como se muestra en la figura 1(b), podemos situar el ángulo en un plano de coordenadas cartesianas con su vértice en el origen y su lado inicial coincidiendo con el lado positivo del eje x. Se dice que un ángulo de este tipo se encuentra en **posición normal**. En esta sección, consideramos todos los ángulos en posición normal.

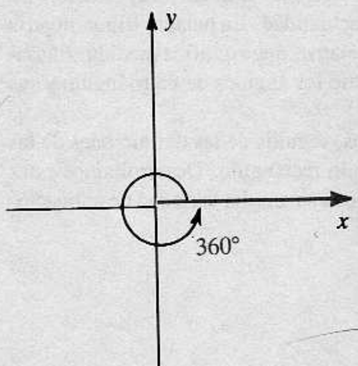


FIGURA 2

MEDIDA EN GRADOS

Las unidades comúnmente usadas para medir los ángulos son los **grados** y los **radianes**. La primera se basa en la asignación de 360 grados, que se escribe 360°, al ángulo que se forma mediante una rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 2. Los otros ángulos se miden, entonces, en términos de un ángulo de 360°. Si la rotación es en sentido contrario al de las manecillas del reloj, la medida será *positiva*; si la rotación es en sentido igual al de las manecillas del reloj, la medida será *negativa*. Por ejemplo, dos rotaciones en sentido contrario al de las manecillas del reloj resultarán en un ángulo de 720°; tres rotaciones en el sentido de las manecillas del reloj darán como resultado un ángulo de $-1{,}080°$. Véanse las figuras 3(a) y 3(b). Un ángulo

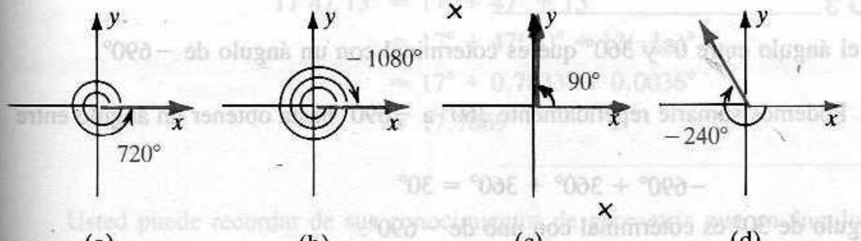
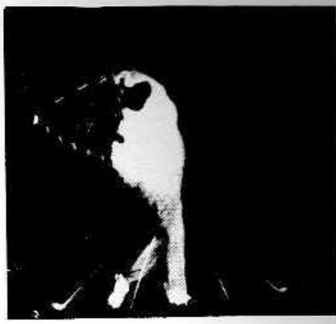


FIGURA 3



obtenido por un cuarto de rotación completa en sentido opuesto al de las manecillas del reloj sería:

$$\tfrac{1}{4}(360°) = 90°$$

pero si el ángulo se obtiene de dos tercios de una rotación en el mismo sentido de las manecillas del reloj, sería $-240°$. Véanse figuras 3(c) y 3(d). Un ángulo de 1° se forma por 1/360 de una rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

EJEMPLO 1

Dibuje un ángulo de 120°.

Solución. Como $120° = \tfrac{1}{3}(360°)$, este ángulo corresponde a un tercio de una rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como lo muestra la figura 4.

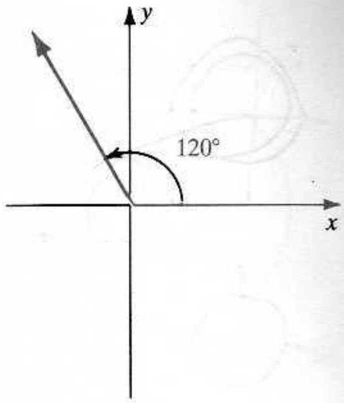


FIGURA 4

EJEMPLO 2

Localice el lado terminal de un ángulo de 960°. Dibuje el ángulo.

Solución. Primero hay que determinar la cantidad de rotaciones completas que puede haber al formarse este ángulo. Si dividimos 960 en 360, obtenemos un cociente de 2 y el residuo sería de 240; esto es,

$$960 = 2(360) + 240$$

Por consiguiente, este ángulo se forma haciendo dos rotaciones en sentido contrario al de las manecillas del reloj y a continuación

$$\tfrac{240}{360} = \tfrac{2}{3}$$

de otra rotación. Como lo ilustra la figura 5, el lado terminal se encuentra en el tercer cuadrante.

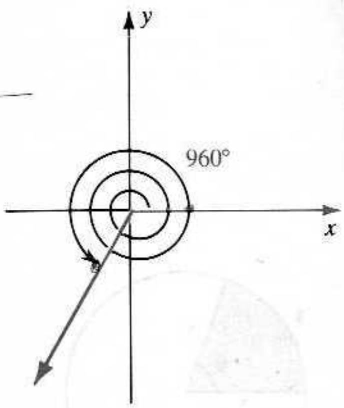


FIGURA 5

ANGULOS COTERMINALES

A partir del ejemplo 2 podemos ver que el lado terminal de un ángulo de 960° coincide con el lado terminal de un ángulo de 240°. Cuando dos ángulos en posición normal tienen el mismo lado terminal decimos que son **coterminales**. Por ejemplo, los ángulos θ, $\theta + 360°$, y $\theta - 360°$ que nos muestra la figura 6 son coterminales. Inclusive, la suma de cualquier múltiplo entero de 360° a un ángulo determinado resulta en un ángulo coterminal. Cualquier par de ángulos coterminales tienen medidas en grados que se diferencian por un múltiplo entero de 360°.

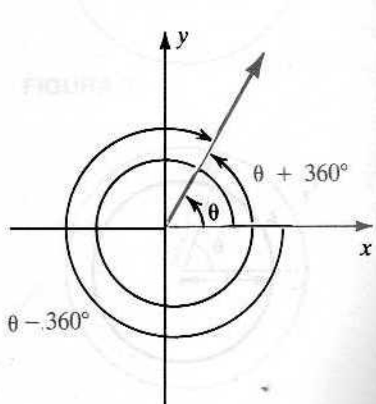


FIGURA 6

EJEMPLO 3

Encuentre el ángulo entre 0° y 360° que es coterminal con un ángulo de $-690°$.

Solución. Podemos sumarle repetidamente 360° a $-690°$ hasta obtener un ángulo entre 0° y 360°:

$$-690° + 360° + 360° = 30°$$

Así, un ángulo de 30° es coterminal con uno de $-690°$.

MINUTOS Y SEGUNDOS

Al utilizar las calculadoras es conveniente representar las fracciones de los grados con decimales, como 42.23°. Sin embargo, tradicionalmente, las fracciones de grados eran expresadas en **minutos** y **segundos**, donde

$$1° = 60 \text{ minutos (se escribe } 60')^*$$

y

$$1' = 60 \text{ segundos (se escribe } 60'')$$

Por ejemplo, un ángulo de 7 grados, 30 minutos, 5 segundos se expresa como 7°30′5″. La mayoría de las calculadoras científicas tienen una tecla especial $\boxed{°\ '\ ''}$ para convertir un ángulo dado en grados decimales a grados, minutos y segundos, y viceversa. Los siguientes ejemplos muestran cómo realizar estas conversiones manualmente.

EJEMPLO 4

Convierta 86.23° a grados, minutos y segundos.

Solución. Como 0.23° representa $\frac{23}{100}$ de 1°, y 1° = 60 minutos, tenemos:

$$\begin{aligned} 86.23 &= 86° + 0.23° \\ &= 86° + (0.23)(60') \\ &= 86° + 13.8' \end{aligned}$$

Ahora, $13.8' = 13' + 0.8'$, entonces, debemos convertir $0.8'$ a segundos. Como $0.8'$ representa $\frac{8}{10}$ de $1'$ y $1' = 60$ segundos, tenemos que

$$\begin{aligned} 86° + 13' + 0.8' &= 86° + 13' + (0.8)(60'') \\ &= 86° + 13' + 48'' \\ &= 86°13'48'' \end{aligned}$$

Entonces,
$$86.23° = 86°\ 13'\ 48''$$

EJEMPLO 5

Convierta 17°47′13″ a notación decimal.

Solución. Como $1° = 60'$, tenemos que $1' = (\frac{1}{60})°$. Así mismo, $1'' = (\frac{1}{60})' = (\frac{1}{3{,}600})°$. Entonces, tenemos que:

* La utilización del número 60 como **base** data de los babilonios. Otro ejemplo de la utilización de esta base en nuestra cultura es la medición del tiempo (1 hora = 60 minutos).

$$\begin{aligned} 17°47'13'' &= 17° + 47' + 13'' \\ &= 17° + 47(\tfrac{1}{60})° + 13(\tfrac{1}{3{,}600})° \\ &\approx 17° + 0.7833° + 0.0036° \\ &= 17.7869° \end{aligned}$$

Usted puede recordar de sus conocimientos de geometría que un ángulo de 90° se llama **ángulo recto**, y que un ángulo de 180° se denomina **ángulo plano** o **llano**. Un **ángulo agudo** mide entre 0° y 90° y un **ángulo obtuso** mide entre 90° y 180°. Dos ángulos agudos se consideran **complementarios** si su suma es 90°. Dos ángulos positivos son **suplementarios** si su suma es 180°. Un **ángulo terminal de cuadrante** es un ángulo cuyo lado terminal coincide con un eje coordenado cuando el ángulo se encuentra en posición normal. Por ejemplo: 0°, 90°, 180°, 270°, o 360°.

EJEMPLO 6

$13 \cdot \frac{1}{3600} =$

Encuentre el ángulo que es complementario al ángulo dado.

(a) $\alpha = 74.23°$
(b) $\beta = 34°15'$

Solución

(a) Como dos ángulos son complementarios si su suma es 90°, debemos encontrar $90° - \alpha$:

$$90° - \alpha = 90° - 74.23° = 15.77°$$

(b) Para realizar la resta $90° - \beta$, debemos ordenar la operación verticalmente y convertir 90° a 89°60′:

$$\begin{array}{rr} & 89°60' \Leftarrow \boxed{90°} \\ & -\,34°15' \\ \hline 90° - \beta = & 55°45' \end{array}$$

MEDIDA EN RADIANES

Otra manera de medir los ángulos es con radianes, los cuales se usan comúnmente en casi todas las aplicaciones trigonométricas que requieren el cálculo.

La medición de un ángulo θ en radianes se basa en la longitud de un arco de una circunferencia. Si situamos el vértice del ángulo θ en el centro de un círculo de radio r, entonces θ se denomina **ángulo central.** La región del círculo contenida dentro del ángulo central se denomina **sector.** Como lo muestra la figura 7, digamos que s denota la longitud del arco subtendido por θ. Entonces, la medida de θ en radianes se define así:

$$\theta = s/r$$

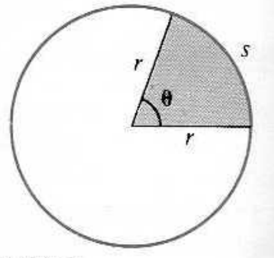


FIGURA 7

Esta definición no depende del tamaño de la circunferencia. Para observar esto, tomamos otra circunferencia centrada en el vértice de θ con radio r' y longitud de arco subtendido s'. Como podemos observar en la figura 8, los dos sectores circulares son similares y por eso las razones s/r y s'/r' son iguales. Por consiguiente, no importa cuál circunferencia utilicemos, vamos a obtener la misma medida en radianes para θ.

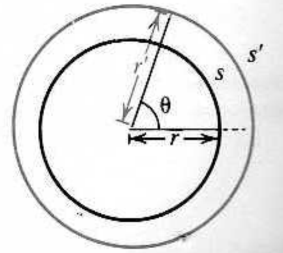


FIGURA 8

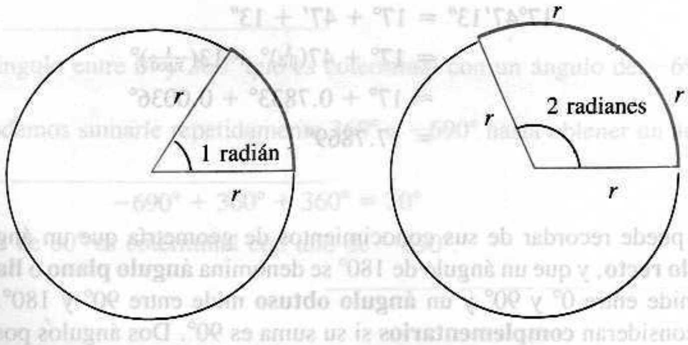


FIGURA 9 (a) (b)

La figura 9(a) ilustra un ángulo de un radián, puesto que subtiende un arco de longitud s igual al radio r de la circunferencia. El ángulo que se muestra en la figura 9(b) mide 2 radianes, ya que subtiende un arco de $2r$ de longitud, en la circunferencia de radio r centrada en el vértice.

s = circunferencia = $2\pi r$

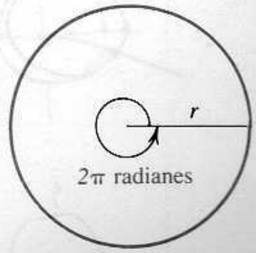


FIGURA 10

Una rotación completa subtiende un arco igual en longitud a la circunferencia del círculo $2\pi r$ (véase figura 10). Tenemos que:

$$\text{una rotación} = s/r = 2\pi r/r = 2\pi \text{ radianes}$$

Tenemos el mismo formalismo anterior: un ángulo formado por una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj se considera positivo, mientras que un ángulo formado por una rotación en el sentido de las manecillas del reloj se considera negativo. En la figura 11 se ilustran cuatro ángulos en posición normal de $\pi/2$, $-\pi/2$, π y 3π radianes, respectivamente. Nótese que el ángulo de $\pi/2$ radianes que se muestra en la figura 11(a) se obtiene por un cuarto de rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj; esto es,

$$\frac{1}{4}(2\pi \text{ radianes}) = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$$

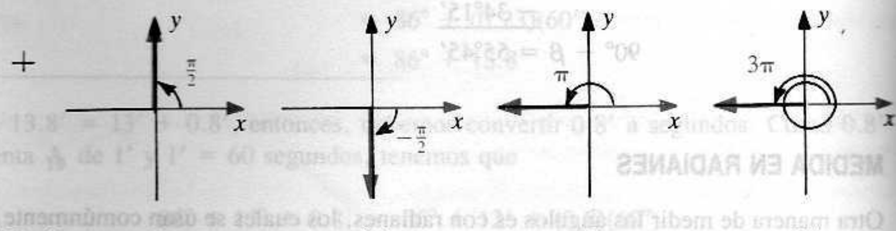


FIGURA 11 (a) (b) (c) (d)

El ángulo que se muestra en la figura 11(b), obtenido de un cuarto de rotación completa en el sentido de las manecillas del reloj, es $-\pi/2$ radianes. El ángulo de la figura 11(c) es coterminal con el ángulo de la figura 11(d). En general, dos ángulos medidos en radianes son coterminales si y sólo si su diferencia es múltiplo de 2π radianes.

FORMULAS DE CONVERSION

Como hay dos formas para medir ángulos, es bueno saber cómo hacer la conversión de la una a la otra. La medida en grados para el ángulo correspondiente a una rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj es 360°, mientras que la medida en radianes para el mismo ángulo es 2π radianes. Por tanto, $360° = 2\pi$ radianes,

o

$$180° = \pi \text{ radianes}* \tag{1}$$

De (1) obtenemos las siguientes fórmulas para convertir de grados a radianes y viceversa.

Fórmulas de conversión

(i) $1° = \dfrac{\pi}{180}$ radián

(ii) $1 \text{ radián} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

Si usamos una calculadora para realizar la división en (i) y (ii), encontramos que:

$$1° \approx 0.0174533 \text{ radianes}$$

y

$$1 \text{ radián} \approx 57.29578°$$

respectivamente.

La fórmula (i) nos permite convertir de grados a radianes y la (ii) nos permite convertir de radianes a grados. Una ayuda para recordar estas fórmulas es trabajar con la proporción:

$$\frac{\text{medida en radianes de } \theta}{\text{medida en grados de } \theta} = \frac{\pi \text{ radianes}}{180°} \tag{2}$$

EJEMPLO 7

Convierta 20° a radianes.

Solución. A partir de (2) con $\theta = 20°$, tenemos que:

$$\frac{\text{medida en radianes de } \theta}{20°} = \frac{\pi \text{ radianes}}{180°}$$

o

$$\text{medida en radianes de } \theta = 20°\left(\frac{\pi \text{ radianes}}{180°}\right) = \frac{\pi}{9} \text{ radián}$$

Ya que la medida en radianes de un ángulo es el cociente de dos longitudes, ésta no tiene dimensiones. Por esta razón la palabra "radián" se omite a menudo cuando los ángulos se miden en radianes. Cuando no se especifique unidad de medida, se sobreentiende que los ángulos se han medido en radianes.

EJEMPLO 8

Convierta el ángulo dado a grados.

(a) $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$ **(b)** $\beta = 2$

---

* Esto no significa que $180 = \pi$, al igual que 12 pulgadas = 1 pie no significa que 12 = 1. Más bien, significa que dos medidas del mismo ángulo son equivalentes.

Solución

(a) Como no nos ha sido dada ninguna unidad de la medida angular, sabemos que α se mide en radianes. A partir de la fórmula (ii) sabemos que el número de grados en 1 radián es $180/\pi$. Entonces la conversión sería:

$$\frac{7\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 210^{\circ}$$

(b) Similarmente, a partir de (ii) tenemos que:

$$2 = 2\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = \left(\frac{360}{\pi}\right)^{\circ} \approx 114.59^{\circ}$$

EJEMPLO 9

Convierta $153°40'$ a radianes.

Solución. Primero escribimos $153°40'$ en forma decimal:

$$\begin{aligned} 153°40' &= (153 + \tfrac{40}{60})^{\circ} \\ &= (153 + \tfrac{2}{3})^{\circ} \\ &\approx 153.67^{\circ} \end{aligned}$$

Después convertimos de grados a radianes usando la fórmula (i):

$$\begin{aligned} 153.67^{\circ} &= (153.67)\left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ radianes} \\ &\approx 0.85\pi \text{ radianes} \\ &\approx 2.68 \text{ radianes} \end{aligned}$$

EJEMPLO 10

Encuentre un ángulo entre 0 y 2π que sea coterminal con $\theta = 11\pi/4$. Dibuje el ángulo.

Solución. Como $2\pi < 11\pi/4 < 3\pi$, restamos una vuelta, ó 2π radianes para obtener:

$$\frac{11\pi}{4} - 2\pi = \frac{11\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Entonces, $3\pi/4$ es coterminal con $11\pi/4$, como lo muestra la figura 12.

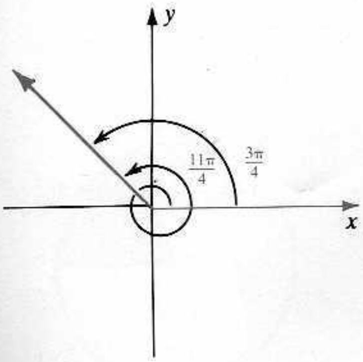


FIGURA 12

LONGITUD DEL ARCO

En muchas aplicaciones es necesario encontrar la longitud s del arco subtendido por el ángulo central θ en una circunferencia de radio r (véase figura 13). A partir de la definición de la medida en radianes,

$$\theta \text{ (en radianes)} = s/r$$

obtenemos la **fórmula de la longitud del arco**:

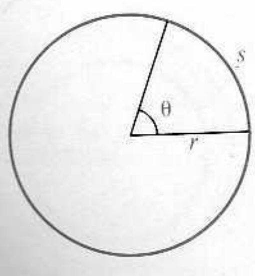


FIGURA 13

$$s = r\theta, \text{ donde } \theta \text{ se mide en radianes} \qquad \textbf{(3)}$$

EJEMPLO 11

Encontrar la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 2 radianes en una circunferencia de **(a)** radio 4 y **(b)** radio 6.

Solución

(a) A partir de la fórmula de la longitud del arco (3) con $\theta = 2$ y $r = 4$, tenemos que:

$$s = r\theta = (4)(2) = 8$$

(b) A partir de la fórmula de la longitud del arco (3) con $\theta = 2$ y $r = 6$, tenemos que,

$$s = r\theta = (6)(2) = 12$$

Nota de advertencia: los estudiantes aplican frecuentemente la fórmula de la longitud del arco $s = r\theta$ *incorrectamente*, al utilizar la medición en grados para θ. Hay que recordar que $s = r\theta$ es válida *solamente si θ se mide en radianes*.

EJERCICIO 6.1

En los problemas 1 al 18, dibuje el ángulo dado en posición normal.

1. $-60°$ **2.** $120°$
3. $-135°$ **4.** $-150°$
5. $510°$ **6.** $315°$
7. $240°$ **8.** $210°$
9. $-\pi/3$ **10.** $-7\pi/6$
11. $-5\pi/4$ **12.** $2\pi/3$
13. $\pi/6$ **14.** 3π
15. $-5\pi/2$ **16.** $-3\pi/4$
17. 2 **18.** 3.5

En los problemas 19 al 22, exprese el ángulo dado en notación decimal.

19. 15° 19' 28" **20.** 127° 5' 18"
21. 7° 12' **22.** 8° 24'

En los problemas 23 al 26, exprese el ángulo dado en términos de grados, minutos y segundos.

23. 150.63° **24.** 18.42°
25. 31.86° **26.** 215.7°

En los problemas 27 al 38, convierta de grados a radianes.

27. 15° **28.** 135°
29. 105° **30.** 0°
31. 2° **32.** 27° 30'
33. 33° 40' **34.** $-45°$
35. $-60°$ **36.** 48°
37. $-270°$ **38.** $-35.2°$

En los problemas 39 al 50, convierta de radianes a grados.

39. $3\pi/2$ **40.** $\pi/3$
41. 5π **42.** 3.7
43. $3\pi/4$ **44.** $17\pi/2$
45. 1.8 **46.** 0.17
47. 16 **48.** 15π
49. $5\pi/9$ **50.** $8\pi/5$

En los problemas 51 al 54, encuentre el ángulo entre 0° y 360°, coterminal con el ángulo dado.

51. 765° **52.** 480°
53. $-320°$ **54.** $-160°$

En los problemas 55 al 60, encuentre el ángulo entre 0 y 2π radianes que es coterminal con el ángulo dado.

55. $-3\pi/4$ **56.** $15\pi/2$
57. 6.2π **58.** $-11\pi/2$
59. -5 **60.** 6.5

En los problemas 61 al 64, encuentre el ángulo (a) complementario y (b) suplementario al ángulo dado o, si es necesario, diga por qué el ángulo no puede ser encontrado.

61. 41° 45' **62.** 93° 58'
63. 104.5° **64.** 59.06°

65. Encuentre las medidas en radianes y en grados del ángulo formado por:

(a) cinco doceavos de una rotación en dirección de las manecillas del reloj;

(b) cuatro y un quinto de una rotación en sentido contrario de las manecillas del reloj.

66. Encuentre las medidas en grados y en radianes del ángulo obtuso formado por las manecillas de un reloj:

(a) a las 7:00

(b) a las 4:00

(c) a las 5:30

67. Encuentre las medidas en grados y radianes del ángulo a través del cual la manecilla de la hora de un reloj rota en tres horas.

68. Conteste la misma pregunta del problema 67, pero para el minutero de un reloj.

69. La Tierra da una rotación completa cada 24 horas. ¿Cuánto se demora en rotar a un ángulo de:

(a) 225°

(b) $\pi/3$ radianes?

70. El planeta Mercurio completa una rotación cada 59 días. ¿A través de qué ángulo (medido en grados y en radianes) rota en:

(a) un mes (de 30 días)

(b) una semana (siete días)

(c) un año(365 días)?

71. Encuentre la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 2 radianes en una circunferencia de:

(a) radio 2

(b) radio 4

72. Encuentre la longitud del aro subtendida por un ángulo central de 60° en una circunferencia:

(a) de radio 3

(b) de radio 5.

73. Encuentre la medida de un ángulo central θ en una circunferencia de radio 4, si θ subtiende un arco cuya longitud es 6.75. Determine θ en:

(a) radianes

(b) grados

74. Encuentre la medida de un ángulo central θ en una circunferencia de radio 2, si θ subtiende un arco cuya longitud es $2\pi/3$. Determine θ en:

(a) radianes

(b) grados

75. Una rueda gira 700 vueltas por hora. En una hora:

(a) ¿Cuántos radianes gira la rueda?

(b) ¿Cuántos grados gira la rueda?

76. Considere un punto P en el borde de una rueda que tiene un diámetro de 30 pulgadas. Si la rueda da 80 revoluciones, ¿cuál es la distancia que recorre P?

77. Se hace girar una piedra amarrada al final de una cuerda de 100 cm de longitud.

(a) Si da 12 revoluciones en 8 segundos, encuentre la razón de sus vueltas (velocidad angular) en radianes por segundo.

(b) Encuentre la velocidad a la cual la piedra gira en centímetros por segundo (llamada velocidad lineal).

78. Si en la cuerda del problema 77 hay un nudo a 30 cm de la piedra, encuentre:

(a) la velocidad angular del nudo

(b) la velocidad lineal. ¿Cuál de estas velocidades es independiente del radio?

79. Un automóvil viaja a 65 km/h y el diámetro de sus llantas es de 54 cm.

(a) Encuentre el número de revoluciones por minuto a la que van sus ruedas.

(b) Encuentre la velocidad angular de sus ruedas en radianes por minuto.

80. Las ruedas de un automóvil giran a una velocidad de 85/3 revoluciones por segundo cuando éste se desplaza a 75 pies/seg. ¿Cuál es el diámetro de la rueda?

81. Un péndulo de 4 pies se balancea de un lado a otro. En su movimiento la punta del péndulo recorre un arco de 2 pies de longitud en cada balanceo. ¿Cuál es el número de grados que recorre el péndulo en un balanceo?

82. Pruebe que el área A de un sector circular formado por un ángulo central de θ radianes en un círculo de radio r está dada por $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$. [*Sugerencia*: use la propiedad de proporcionalidad de la geometría que dice que la razón del área A de un sector circular al área total πr^2 del círculo es igual a la razón del ángulo central θ a una revolución completa 2π].
¿Cuál es el área de un sector circular formado por un ángulo central de 15° en un círculo de diámetro 4 cm? ¿Cuál es el área de la banda circular formada por un ángulo de 45° y limitada por 2 círculos de radio 4 y 2 respectivamente?

83. Una milla marítima se define como la longitud del arco subtendido en la superficie de la Tierra por un ángulo que mide un minuto. El diámetro de la Tierra es aproximadamente 7,927 millas (terrestres). Encuentre la cantidad de millas (terrestres) que hay en una milla náutica.

6.2 Funciones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos

Como dijimos en la introducción de este capítulo, la palabra trigonometría se refiere a la medición de los triángulos. En esta sección definiremos las seis funciones trigonométricas: **seno, coseno, tangente, cosecante, secante** y **cotangente**, como las razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Los nombres de estas funciones se abrevian como **sen, cos, tan, csc, sec** y **cot**, respectivamente. En la sección 6.4 extenderemos las definiciones para ángulos generales.

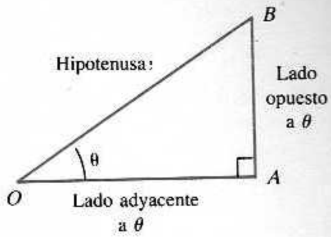


FIGURA 14

Como lo muestra la figura 14, si $\triangle OAB$ es un triángulo rectángulo, entonces el lado AB se denomina **opuesto** al ángulo θ. El lado OA se llama **adyacente** al ángulo θ. La **hipotenusa,** OB, es el lado opuesto al ángulo recto. Las longitudes de estos lados se demarcan por **op, ady** e **hip**, respectivamente.

DEFINICION 1

Las seis funciones trigonométricas de un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo se definen así:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}}, \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}, \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}, \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

El dominio de cada una de estas funciones trigonométricas es el conjunto de todos los ángulos agudos. En la sección 6.4 extenderemos este dominio para incluir otros ángulos distintos a los agudos. Después, en el capítulo 7 veremos cómo las funciones trigonométricas pueden definirse con un dominio que consta de números reales, en vez de ángulos. Los valores de las seis funciones trigonométricas dependen únicamente del tamaño del ángulo y no del tamaño del triángulo rectángulo. Esto lo podemos ver a continuación. Como lo muestra la figura 15, dos triángulos rectángulos con el mismo ángulo agudo θ son semejantes, y entonces las razones de los lados correspondientes son iguales. Por ejemplo, del triángulo más pequeño tenemos que:

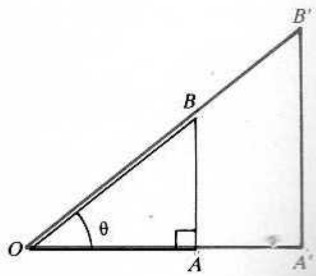


FIGURA 15

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$$

por otra parte, en el triángulo más grande tenemos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}$$

Pero como el triángulo AOB es semejante al triángulo $A'OB'$, tenemos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}$$

$\frac{AB}{OB} = \frac{A'B'}{OB'}$

Así encontramos el mismo valor para sen θ sin importar cuál sea el triángulo que utilicemos para calcularlo. Un argumento similar podría servir para las otras funciones trigonométricas.

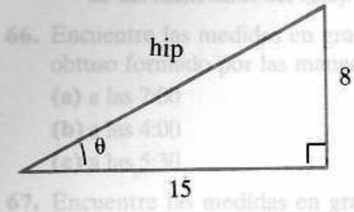


FIGURA 16

EJEMPLO 1

Encuentre el valor de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ que nos muestra la figura 16

Solución. A partir de la figura 18 podemos ver que para el ángulo θ, op = 8 y ady = 15. El valor de la hipotenusa puede ser hallado por el teorema de Pitágoras de la siguiente forma:

$$(\text{hip})^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$$
$$\text{hip} = \sqrt{289} = 17$$

Entonces, los valores de las seis funciones trigonométricas son:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{8}{17}, \quad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{17}{8}$$
$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{15}{17}, \quad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{17}{15}$$
$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{8}{15} \quad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{15}{8}$$

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Hay muchas relaciones importantes entre las funciones trigonométricas. Las básicas se denominan **identidades fundamentales**, y vale la pena memorizarlas. Las siguientes identidades se derivan fácilmente de las definiciones de las funciones trigonométricas.

Identidades de cociente

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades recíprocas

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Por ejemplo, la primera de las identidades de cociente se verifica de la siguiente manera:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{op/hip}}{\text{ady/hip}} = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \tan\theta$$

Las otras pueden ser verificadas de la misma manera (véanse problemas 51 al 54). Usando estas identidades podemos encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas, una vez sepamos los valores de sen θ y cos θ.

EJEMPLO 2

Dado que sen $\theta = \frac{4}{5}$ y cos $\theta = \frac{3}{5}$, encuentre los valores de las demás funciones trigonométricas.

Solución. De las identidades fundamentales, tenemos que:

$$\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}$$

Cosec = sen

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}$$

El siguiente ejemplo ilustra que si el valor de una función trigonométrica de un ángulo agudo nos es dado, es posible encontrar los valores de las otras cinco funciones trigonométricas, si dibujamos un triángulo apropiado.

EJEMPLO 3

Si θ es un ángulo agudo y el sen $\theta = \frac{2}{7}$, encuentre los valores de las demás funciones trigonométricas en θ.

Solución. Dibujaremos un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ de manera que sen $\theta = \frac{2}{7}$. Esto se logra si op = 2 e hip = 7, como lo muestra la figura 17 Encontramos ady por medio del teorema de Pitágoras:

$$2^2 + (\text{ady})^2 = 7^2$$

de manera que: $$(\text{ady})^2 = 7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45$$

Así, $$\text{ady} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

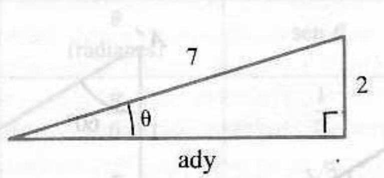


FIGURA 17

Los valores de las demás funciones trigonométricas son:

$$\cos \theta = \frac{3\sqrt{5}}{7} \qquad \sec \theta = \frac{7}{3\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{15}$$

$$\tan \theta = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15} \qquad \cot \theta = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\csc \theta = \frac{7}{2}$$

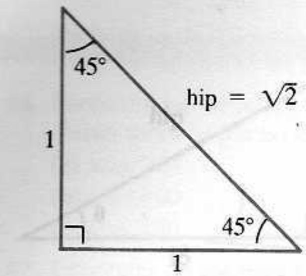


FIGURA 18

ANGULOS ESPECIALES

Los ángulos que miden 30° ($\pi/6$ radianes), 45° ($\pi/4$ radianes) y 60° ($\pi/3$ radianes) se dan frecuentemente en trigonometría. Podemos hallar los valores de las seis funciones trigonométricas de estos ángulos especiales usando algunos resultados de la geometría plana.

Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo de 45°, consideramos un triángulo rectángulo isósceles con dos lados iguales de longitud 1, como lo muestra la figura 18. De la geometría plana sabemos que los ángulos agudos de este triángulo son iguales; por esto, cada uno de los ángulos mide 45°. Con el teorema de Pitágoras podemos encontrar la longitud de la hipotenusa:

$$(\text{hip})^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2$$
$$\text{hip} = \sqrt{2}$$

Entonces, tenemos que:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \csc 45° = \sqrt{2}$$
$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sec 45° = \sqrt{2}$$
$$\tan 45° = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1, \qquad \cot 45° = 1$$

Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°, consideramos un triángulo equilátero AOB con lados de longitud 2, como lo muestra la figura 19(a). De la geometría plana sabemos que los tres ángulos de un triángulo equilátero miden 60° cada uno. Como lo muestra la figura 19(b), si hacemos una bisección del ángulo en O, entonces CO es la bisectriz perpendicular de AB. De lo cual se deduce que:

$$\angle AOC = \tfrac{1}{2}\angle AOB = \tfrac{1}{2}(60°) = 30°$$
$$\overline{AC} = \tfrac{1}{2}\,\overline{AB} = \tfrac{1}{2}(2) = 1$$

y

$$\angle ACO = 90°$$

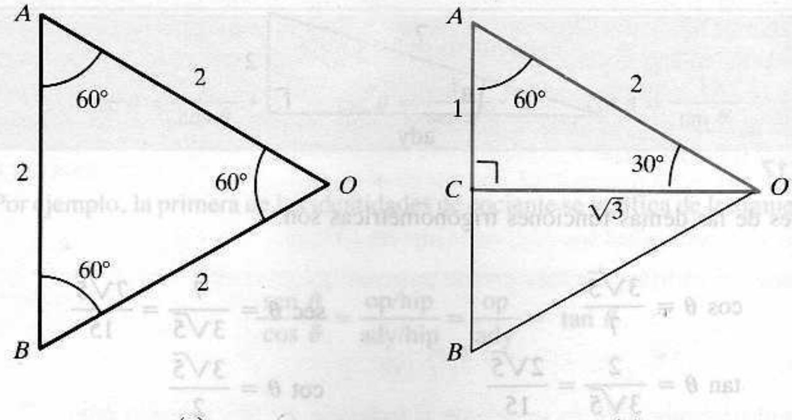


FIGURA 19

Si aplicamos el teorema de Pitágoras al ángulo recto ACO, obtendremos:

$$(\overline{CO})^2 + 1^2 = 2^2,$$

o

$$(\overline{CO})^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

de tal manera que

$$\overline{CO} = \sqrt{3}.$$

Así, del triángulo ACO de la figura 21(b), podemos obtener los siguientes valores:

$$\theta = 30°: \quad \text{sen } 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta = 60°: \quad \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \tan 60° = \sqrt{3}$$

Usando la misma figura o las identidades fundamentales, podemos calcular los valores restantes para los ángulos de 30° y 60°:

$$\theta = 30°: \quad \csc 30° = 2 \quad \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \cot 30° = \sqrt{3}$$

$$\theta = 60°: \quad \csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \sec 60° = 2 \quad \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La siguiente tabla sintetiza los valores de las funciones seno y coseno que acabamos de determinar para los ángulos especiales 30°, 45° y 60°. Estos son utilizados con tanta frecuencia, que deberían ser memorizados. Conociendo estos valores y las identidades fundamentales que vimos anteriormente, podremos determinar cualquiera de las funciones trigonométricas de los ángulos especiales.

θ (grados)	θ (radianes)	sen θ	cos θ
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\frac{30}{180} = \frac{\pi}{6}$

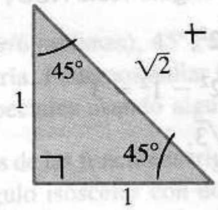
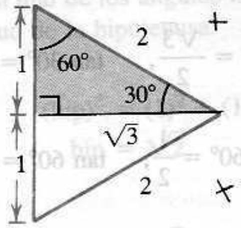
cos $\frac{\sqrt{3}}{2}$

sen $\frac{1}{2}$.

$\frac{\pi}{4}$ $\sqrt{2}/2$ $\sqrt{2}/2$

$\frac{\pi}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\sqrt{3}/2$

Podemos obtener los valores de la tabla anterior, si construimos primero los triángulos de 45° –45° –90° y 30° –60° –90°, como lo hicimos en las figuras 18 y 19. Después, podemos determinar los valores de las funciones a partir del triángulo. Esto se sintetiza en la siguiente tabla.

$\theta = 45° = \dfrac{\pi}{4}$		Triángulo rectángulo isósceles con lados iguales a 1 e hipotenusa = $\sqrt{2}$
$\theta = 30° = \dfrac{\pi}{6}$ o $\theta = 60° = \dfrac{\pi}{3}$		Triángulo equilátero con lados de longitud 2 y altura de longitud $\sqrt{3}$

UTILIZACION DE LA CALCULADORA

Las aproximaciones a los valores de las funciones trigonométricas se pueden obtener usando una calculadora científica.

Nota de advertencia: antes de utilizar una calculadora para hallar las funciones trigonométricas de los ángulos medidos en radianes, es necesario adaptar la calculadora en el modo de radianes. Si los ángulos son medidos en grados, entonces hay que poner la calculadora en el modo de grados, antes de hacer los cálculos. También, si los ángulos están dados en grados, minutos, y segundos, deben de ser convertidos primero a la forma decimal.

La mayoría de calculadoras científicas tienen teclas $\boxed{\texttt{sin}}$, $\boxed{\texttt{cos}}$ y $\boxed{\texttt{tan}}$ para computar los valores de estas funciones. Para obtener los valores de csc, sec o cot, utilizamos las teclas $\boxed{\texttt{sin}}$, $\boxed{\texttt{cos}}$ o $\boxed{\texttt{tan}}$, con la tecla recíproca $\boxed{\texttt{1/x}}$. El siguiente ejemplo ilustra el proceso.

EJEMPLO 4

Use la calculadora para aproximar cada uno de los siguientes datos:

(a) sen 45° **(b)** cos 8°15′ **(c)** tan 1.4

(d) sec 0.23 **(e)** cot $\dfrac{\pi}{7}$

Solución

(a) Primero nos aseguramos de que la calculadora esté en el modo de grados. Luego escribimos 45 y oprimimos la tecla $\boxed{\texttt{sin}}$ para obtener

$$\text{sen } 45° \approx 0.7071068$$

la cual es una aproximación de siete cifras decimales al valor exacto $\sqrt{2}/2$.

(b) Como el ángulo se nos da en grados y minutos, debemos convertirlo primero a la forma decimal:

$$8°15' = 8° + (\tfrac{15}{60})° = 8.25°$$

Ahora, con la calculadora en el *modo de grados*, escribimos 8.25 y oprimimos la tecla $\boxed{\texttt{cos}}$ para obtener:

$$\cos 8°15' = \cos 8.25° \approx 0.9896514$$

(c) Como los grados no están indicados, reconocemos que este ángulo está medido en radianes. Entonces adaptamos la calculadora en el *modo de radianes*; escribimos 1.4 y oprimimos $\boxed{\texttt{tan}}$ para obtener:

$$\tan 1.4 \approx 5.7978837$$

(d) Para evaluar sec 0.23, usamos la identidad fundamental

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

Con la calculadora en el modo de radianes, escribimos 0.23, oprimimos $\boxed{\texttt{cos}}$, y tomamos el recíproco del resultado oprimiendo $\boxed{\texttt{1/x}}$ y obtenemos

$$\sec 0.23 = \frac{1}{\cos 0.23} \approx 1.0270458$$

(e) Observamos que el ángulo está medido en radianes y que la calculadora está adaptada apropiadamente. Oprimimos $\boxed{\pi}$ o (3.141592654), dividimos por 7 y oprimimos primero $\boxed{\texttt{tan}}$ y luego $\boxed{\texttt{1/x}}$ para obtener:

$$\cot \frac{\pi}{7} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{7}} \approx 2.0765214$$

En muchas aplicaciones podemos determinar el valor de una de las funciones trigonométricas, digamos sen θ, y deseamos encontrar θ. Podemos lograrlo usando el inverso de las funciones trigonométricas, que veremos en detalle en la sección 7.9. Por ahora, podemos encontrar un ángulo agudo θ si nos dan sen θ (o alguna de las demás funciones trigonométricas de θ), utilizando la tecla del inverso $\boxed{\texttt{INV}}$ en la calculadora. Por ejemplo, si se nos da sen $\theta = 0.625$ y queremos hallar θ, escribimos 0.625, oprimimos $\boxed{\texttt{INV}}$ y luego $\boxed{\texttt{sin}}$. Si la calculadora está adaptada en el *modo de grados* obtenemos $\theta \approx 38.6821875°$. Sin embargo, si la calculadora está adaptada en el *modo de radianes* obtenemos $\theta \approx 0.6751315$.

Las funciones trigonométricas inversas se denotan por sen^{-1} o arcsen, $\cos^{-1}$ o arccos, $\tan^{-1}$ o arctan y así sucesivamente. Algunas calculadoras tienen teclas marcadas como $\boxed{\texttt{sin}^{-1}}$, $\boxed{\texttt{cos}^{-1}}$ y $\boxed{\texttt{tan}^{-1}}$ y no requieren la utilización de la tecla $\boxed{\texttt{INV}}$ (lea el manual de su calculadora si necesita una mayor explicación).

EJEMPLO 5

Use una calculadora para hallar el ángulo agudo en **(a)** grados y **(b)** radianes, para el cual $\cos \theta = 0.5$.

Solución

(a) Primero colocamos la calculadora en el modo de grados. Escribimos 0.5 y luego oprimimos $\boxed{\text{INV}}$ y $\boxed{\text{cos}}$. El resultado es 60. Por tanto, $\theta = 60°$.

(b) Con la calculadora adaptada en el modo de radianes, escribimos 0.5 y oprimimos $\boxed{\text{INV}}$ y seguidamente $\boxed{\text{cos}}$. El resultado es 1.0471976. Entonces $\cos\theta = 0.5$. $\theta \approx 1.0471976$ radianes. Note que 1.0471976 es una aproximación decimal de $\pi/3$.

TABLAS TRIGONOMETRICAS

Antes de que surgiera la calculadora científica, las tablas de los valores de las funciones trigonométricas eran esenciales para resolver problemas de trigonometría. Las tablas III y IV al final del libro, contienen aproximaciones de cuatro cifras decimales para sen θ, cos θ, tan θ y cot θ, para cualquier ángulo agudo θ, medido en grados y radianes, respectivamente. Véase el apéndice para leer las instrucciones sobre cómo utilizar estas tablas, si no tiene calculadora.

COFUNCIONES

El uso de la terminología seno y coseno, tangente y cotangente, secante y cosecante es resultado de la siguiente observación: como lo muestra la figura 20, si los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo ABC están demarcados como α y β, y a es la longitud del lado opuesto a α, b es la longitud del lado opuesto a β, y c es la longitud del lado opuesto al ángulo recto, entonces:

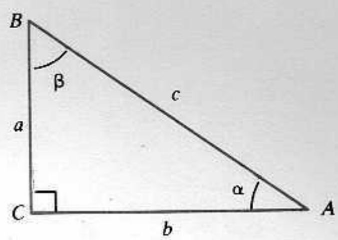


FIGURA 20

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta, \qquad \csc\alpha = \frac{c}{a} = \sec\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \operatorname{sen}\beta, \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b} = \csc\beta$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta, \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta$$

Así, el coseno de un ángulo agudo es igual al seno del ángulo complementario; la cotangente de un ángulo agudo es igual a la tangente del ángulo complementario; la cosecante de un ángulo agudo es igual a la secante del ángulo complementario y viceversa. Por esta razón decimos que el seno y el coseno, tangente y cotangente, y secante y cosecante son **cofunciones**. Como resultado, hemos rectificado las siguientes identidades para cualquier ángulo agudo θ.

θ (radianes)	θ (grados)
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$	$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$	$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$
$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$	$\sec(90° - \theta) = \csc\theta$

Como veremos en la sección 7.5 estas identidades sirven para todos los ángulos θ (no solamente para los agudos).

EJERCICIO 6.2

En los problemas 1 al 10, encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ señalado en cada triángulo.

1.

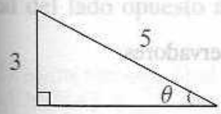


FIGURA 21

2.

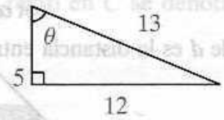


FIGURA 22

3.

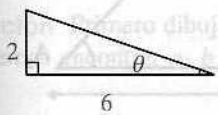


FIGURA 23

4.

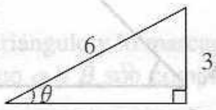


FIGURA 24

5.

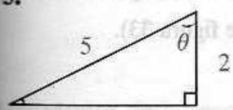


FIGURA 25

6.

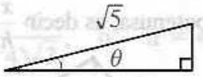


FIGURA 26

7.

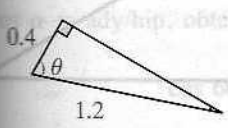


FIGURA 27

8.

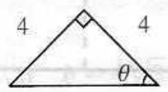


FIGURA 28

9.

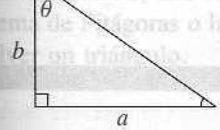


FIGURA 29

10.

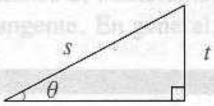


FIGURA 30

En los problemas 11 al 18, utilice las identidades fundamentales para encontrar los valores de las funciones trigonométricas que faltan para θ.

11. $\text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{12}}$, $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{11}{12}}$

12. $\text{sen}\,\theta = \dfrac{2}{5}$, $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{21}{5}}$

13. $\text{sen}\,\theta = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$, $\cos\theta = \dfrac{2}{7}$

14. $\text{sen}\,\theta = \dfrac{6\sqrt{2}}{9}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$

15. $\text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\tan\theta = \dfrac{1}{3}$

16. $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{5}$

17. $\cos\theta = \dfrac{7}{2}$, $\sec\theta = \dfrac{7\sqrt{5}}{15}$

18. $\text{sen}\,\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\cot\theta = \dfrac{2}{3}$

En los problemas 19 al 26, encuentre los valores de las funciones trigonométricas que faltan, dibujando un triángulo apropiado y suponiendo θ agudo.

19. $\text{sen}\,\theta = \dfrac{2}{7}$

20. $\cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$

21. $\sec\theta = \dfrac{5}{4}$

22. $\csc\theta = \dfrac{5}{3}$

23. $\tan\theta = \dfrac{1}{8}$

24. $\cot\theta = \dfrac{5}{2}$

25. $\text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $a^2+b^2 \neq 0, a \geq 0$

26. $\tan\theta = \dfrac{b}{a}, a \neq 0$

En los problemas 27 al 34, utilice una calculadora para encontrar los valores aproximados de las seis funciones trigonométricas para el ángulo dado.

27. 19° **28.** 78°

29. 12.5° **30.** 35° 42' 7"

31. $2\pi/5$ **32.** $3\pi/10$

33. 0.6523 **34.** 1.12

En los problemas 35 al 44, utilice una calculadora para aproximar el ángulo θ, medido en (a) radianes y (b) grados, para satisfacer la condición impuesta.

35. $\text{sen}\,\theta = 0.4765$ **36.** $\cos\theta = 0.7225$

37. $\tan\theta = 3.5$ **38.** $\text{sen}\,\theta = 0.8526$

39. $\cos\theta = 0.25$ **40.** $\tan\theta = 4.28$

41. $\text{sen}\,\theta = 2/3$ **42.** $\cos\theta = 1/5$

43. $\sec\theta = 13.18$ **44.** $\csc\theta = 2.41$

En los problemas 45 al 50, responda verdadero o falso.

45. $\cot 49^\circ = \dfrac{\text{sen } 49^\circ}{\cos 49^\circ}$ ——

46. $\csc 37^\circ = \dfrac{1}{\cos 37^\circ}$ ——

47. Si θ es medido en radianes $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ ——

48. $\cos 55^\circ = \text{sen } 35^\circ$——

49. $\cos \tfrac{1}{2} = 60^\circ$ ——

50. $\cos \pi/5 = \sec 5/\pi$ ——

En los problemas 51 al 54, use las definiciones de las funciones trigonométricas para verificar la identidad dada.

51. $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\text{sen }\theta}$

52. $\csc\theta = \dfrac{1}{\text{sen }\theta}$

53. $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

54. $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

55. Demuestre que si θ es un ángulo agudo, entonces $(\text{sen }\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$. Use un triángulo rectángulo como el de la figura 31.

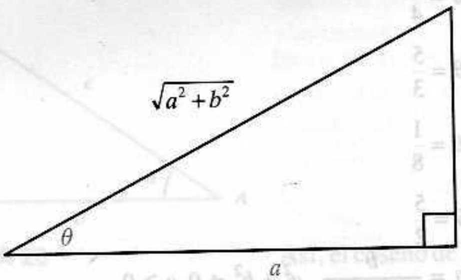


FIGURA 31

56. Si θ es un ángulo agudo, ¿es posible que $\text{sen }\theta = 3/2$? ¿Es posible que $\cos\theta = 5/3$? Explique su respuesta.

57. Como se muestra en la figura 32, dos personas situadas en los puntos A_1 y A_2 observan un edificio con ángulos de elevación α_1 y α_2 respectivamente. Demuestre que la altura h del edificio está dada por:

$$h = \frac{d}{\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2}$$

donde d es la distancia entre los observadores.

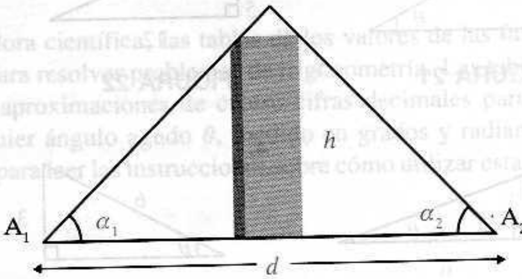


FIGURA 32

58. Pruebe que la altura h a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la media proporcional entre los segmentos de la hipotenusa, es decir $\dfrac{x}{h} = \dfrac{h}{y}$. (Véase figura 33).

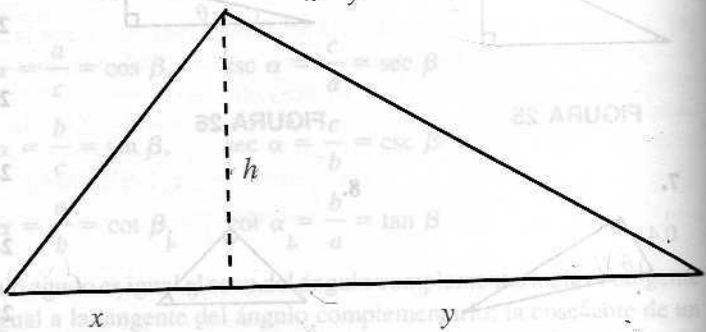


FIGURA 33

6.3 Aplicaciones de la trigonometría a triángulos rectángulos

RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS

Las aplicaciones de la trigonometría en campos como la topografía y la navegación requieren **resolver triángulos rectángulos**. La expresión "resolver un triángulo" significa encontrar la longitud de cada lado y la medida de cada ángulo del triángulo. En esta sección veremos que podemos resolver cualquier triángulo rectángulo si se nos da:

(i) o bien las longitudes de dos lados, o
(ii) la longitud de un lado y la medida de un ángulo agudo.

Como lo muestran los ejemplos más adelante, dibujar y demarcar el triángulo es parte fundamental del proceso de solución. Nuestra práctica general será dibujar y demarcar el triángulo como lo muestra la figura 34. Los tres vértices del triángulo se denotan como A, B y C con C en el vértice del ángulo recto. Denotamos los ángulos en A y B como α y β, y las longitudes de los lados opuestos a estos ángulos como a y b, respectivamente. La longitud del lado opuesto al ángulo recto en C se denota como c.

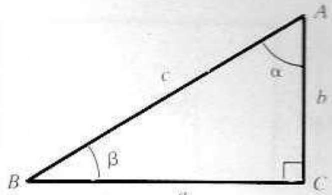


FIGURA 34

EJEMPLO 1

Resuelva el triángulo rectángulo con una hipotenusa de $4\sqrt{3}$ de longitud y un ángulo de $60°$.

Solución. Primero dibujamos un triángulo y lo marcamos como lo muestra la figura 35. Queremos encontrar a, b y β. Como α y β son complementarios,

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 60° = 30°$$

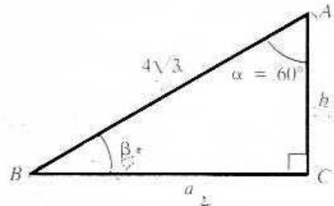


FIGURA 35

Conocemos la longitud de la *hipotenusa*. Para encontrar a el lado *opuesto* del ángulo de $60°$, seleccionamos la función seno. De sen α = op/hip obtenemos que:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{a}{4\sqrt{3}}, \quad \text{o} \quad a = 4\sqrt{3}\operatorname{sen} 60°$$

Recordemos de la sección 6.2 que sen $60° = \sqrt{3}/2$, entonces,

$$a = 4\sqrt{3}\operatorname{sen} 60° = 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6$$

Para encontrar b, el lado *adyacente* al ángulo de $60°$, seleccionamos la función coseno. De cos α = ady/hip, obtenemos que,

$$\cos 60° = \frac{b}{4\sqrt{3}}, \quad \text{o} \quad b = 4\sqrt{3}\cos 60°$$

Así, utilizando $\cos 60° = \frac{1}{2}$, tenemos que:

$$b = 4\sqrt{3}\cos 60° = 4\sqrt{3}(\tfrac{1}{2}) = 2\sqrt{3}$$

Como alternativa, una vez determinamos a, hubiéramos podido hallar b usando o bien el teorema de Pitágoras o la función tangente. En general, puede haber muchas maneras de resolver un triángulo.

Si hay ángulos distintos a los especiales 30°, 45° o 60° dentro del problema, se debe utilizar la calculadora o la tabla de funciones trigonométricas para hallar *aproximaciones* de los valores de las funciones trigonométricas deseadas. Para el resto de este capítulo, cuandoquiera que se use una aproximación, redondearemos los resultados finales a la centésima más cercana, a menos que el problema especifique otra cosa.

UTILIZACION DE LA CALCULADORA

En los siguientes ejemplos, los cómputos se hicieron con una calculadora científica. Sin embargo, si utilizamos la tabla IV para obtener los valores de las funciones trigonométricas, los resultados pueden ser algo diferentes de los que se muestran. Esto se debe a que la calculadora opera internamente con ocho o más dígitos, a pesar de que la tabla provee solamente cuatro dígitos significativos. Como se mencionó en la sección 5.2, para aprovechar al máximo la exactitud y la capacidad de la calculadora, los valores computados de las funciones trigonométricas deben ser retenidos o guardados en la memoria de la calculadora para uso posterior. Si, por el contrario, se escribe un valor completo y más tarde un valor redondeado en la calculadora, la exactitud del resultado final disminuirá.

EJEMPLO 2

Resuelva el triángulo rectángulo que tiene un ángulo de 57.5° y cuyo lado opuesto mide 10.

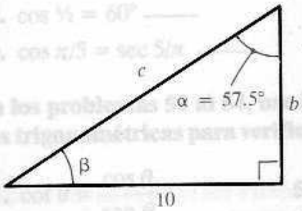


FIGURA 36

Solución. Primero dibujamos y marcamos el triángulo, como lo muestra la figura 36. A partir del dibujo podemos ver que debemos encontrar β, b y c. Como α y β son ángulos complementarios,

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 57.5° = 32.5°$$

Conocemos la longitud del lado *opuesto* α. Para hallar la longitud del lado *adyacente*, usamos la función tangente. De $\tan \alpha = \text{op/ady}$, tenemos que:

$$\tan 57.5° = \frac{10}{b}, \quad \text{o} \quad b = \frac{10}{\tan 57.5°}$$

Utilizando una calculadora, encontramos que $57.5° \approx 1.5696856$, de manera que

$$b \approx \frac{10}{1.5696856^*} \approx 6.37$$

(Para el cálculo anterior, la posible secuencia para escribir en una calculadora podría ser: adaptar la calculadora al modo de grados, escribir 57.5, oprimir la tecla $\boxed{\texttt{tan}}$, luego oprimir $\boxed{\texttt{1/x}}$ y finalmente multiplicar por 10).

Para hallar la *hipotenusa* c, usando $\text{sen}\ \alpha = \text{op/hip}$ obtenemos que:

$$\text{sen}\ 57.5° = \frac{10}{c}, \quad \text{o} \quad c = \frac{10}{\text{sen}\ 57.5°}$$

Así, $$c \approx \frac{10}{0.8433914} \approx 11.86$$

EJEMPLO 3

Resuelva el triángulo rectángulo con lados de 4 y 5 de longitud.

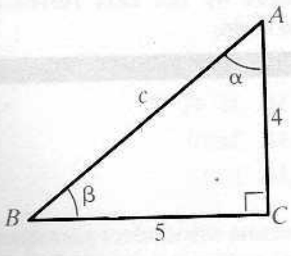


FIGURA 37

Solución. Después de haber dibujado y marcado el triángulo, como lo muestra la figura 37, vemos que debemos encontrar c, α y β. A partir del teorema de Pitágoras, la hipotenusa c se nos da por:

$$c = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \approx 6.40$$

Para encontrar β, usamos $\tan \beta = \text{op/ady}$. (Si trabajamos con las cantidades que se nos dan, evitaremos errores con aproximaciones previas). Entonces tenemos que:

* En este punto estamos mostrando el valor de la función trigonométrica para revisar su operación. Al trabajar con una calculadora, este paso no se escribiría. Continuaremos verificándolo en los subsiguientes ejemplos de esta sección.

$$\tan \beta = \tfrac{4}{5} = 0.8$$

Para hallar β con una calculadora en el modo de grados, escribimos 0.8, oprimimos $\boxed{\text{INV}}$, y luego $\boxed{\text{tan}}$. El resultado es:

$$\beta \approx 38.6598083° \approx 38.66°$$

Entonces, $$\alpha = 90° - \beta \approx 90° - 38.66° = 51.34°$$

EJEMPLO 4

Una cometa se queda atascada en las ramas más altas de un árbol. Si la cuerda de la cometa mide 90 pies y forma un ángulo de 22° con el suelo, estime la altura del árbol encontrando la distancia que hay entre la cometa y el suelo.

Solución. Sea h la altura de la cometa. A partir de la figura 38 vemos que:

$$\frac{h}{90} = \operatorname{sen} 22°, \quad \text{o} \quad h = 90 \operatorname{sen} 22°$$

Entonces, $$h \approx 90\ (0.3746066) \approx 33.71 \text{ pies}$$

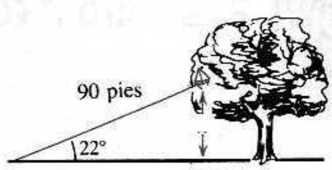


FIGURA 38

EJEMPLO 5

La distancia entre la Tierra y la Luna varía a medida que la Luna gira alrededor de la Tierra. A un tiempo determinado, un astrónomo principiante mide el ángulo de 1° que se muestra en la figura 39*. Calcule aproximando a cientos de millas la distancia entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna en este instante. Asuma que el radio de la Tierra es 3,963 millas.

Solución. Sea d la distancia entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna. A partir de la definición de la función seno, tenemos que:

$$\operatorname{sen} 1° = \frac{3{,}963}{d}, \quad \text{o} \quad d = \frac{3{,}963}{\operatorname{sen} 1°}$$

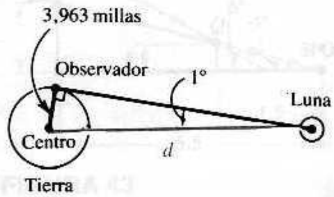


FIGURA 39

Con una calculadora encontramos lo siguiente:

$$d \approx \frac{3{,}963}{0.0174524} \approx 227{,}100 \text{ millas}$$

redondeando a cientos de millas.

EJEMPLO 6

Un carpintero corta el borde de un tablero de 4 pulgadas de largo con una inclinación de 25° de la vertical, empezando desde un punto situado a $1\frac{1}{2}$ pulgadas del borde del tablero. Encuentre las longitudes del corte diagonal y del lado restante. Véase figura 40.

* Este ángulo se conoce como **paralelo geocéntrico**. Su determinación depende de dos observaciones hechas desde la Tierra.

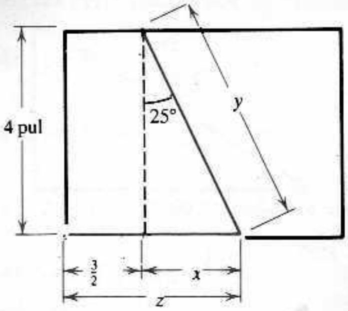


FIGURA 40

Solución. Sean x, y y z las dimensiones desconocidas, como lo marca la figura 40. De la definición de la función tangente tenemos que:

$$\tan 25° = \frac{x}{4}$$

Entonces,

$$x = 4 \tan 25° \approx 4(0.4663077) \approx 1.87 \text{ pulgadas}$$

Para encontrar y observamos que,

$$\frac{y}{4} = \sec 25°, \quad \text{o} \quad y = 4 \sec 25°$$

Con la calculadora como recurso (utilizando las teclas $\boxed{\cos}$ y $\boxed{1/x}$), obtenemos:

$$y \approx 4(1.1033779) \approx 4.41 \text{ pulgadas}$$

Como $z = \frac{3}{2} + x$ y $x \approx 1.87$ pulgadas, vemos que:

$$z \approx 1.5 + 1.87 \approx 3.37 \text{ pulgadas}$$

ANGULOS DE ELEVACION Y DEPRESION

El ángulo entre la línea de visibilidad de un observador y un objeto, y la línea horizontal recibe un nombre especial. Como lo ilustra la figura 41, si la línea de visibilidad y el objeto están por encima de la horizontal, el ángulo se denomina **ángulo de elevación**, mientras que si la línea de visibilidad y objeto están por debajo de la horizontal, el ángulo se denomina **ángulo de depresión.**

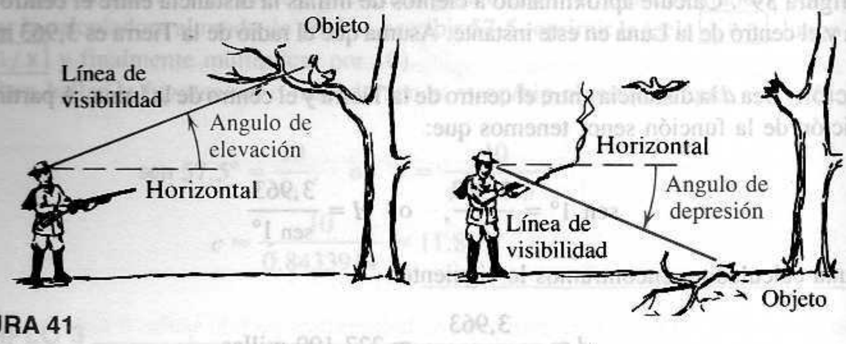


FIGURA 41

EJEMPLO 7

Un topógrafo utiliza un instrumento denominado teodolito para medir el ángulo de elevación entre la cima de la montaña y el nivel del suelo. En un punto, el ángulo de elevación mide 41°, medio kilómetro más lejos de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 37°. ¿Qué tan alta es la montaña?

FIGURA 42

Solución. h representa la altura. La figura 42 muestra que hay dos triángulos rectángulos que comparten el lado común h, entonces obtenemos dos ecuaciones con dos incógnitas z y h:

$$\frac{h}{z + 0.5} = \tan 37° \quad \text{y} \quad \frac{h}{z} = \tan 41°$$

Podemos resolver cada una de estas para h obteniendo:

$$h = (z + 0.5) \tan 37° \quad \text{y} \quad h = z \tan 41°$$

Igualando los dos últimos resultados obtenemos una ecuación a partir de la cual podemos determinar z

$$(z + 0.5) \tan 37° = z \tan 41°$$

Al despejar z obtenemos:

$$z = \frac{-0.5 \tan 37°}{\tan 37° - \tan 41°} \approx 3.2556$$

z tang 37 + tang 37 (0,5) =

Z

Ahora h puede ser hallada así:

$$h = z \tan 41° \approx 3.2556 \tan 41° \approx 2.83 \text{ km}$$

z tang 37° + tang 37° . 0,5 = z tang 41°

EJEMPLO 8

La mayoría de los aviones llegan al aeropuerto internacional de San Francisco (SFO) en una planeación recta de 3° empezando en un punto 5.5 millas (horizontales) del punto de aterrizaje. Usando una técnica experimental computarizada, llamada *acceso en dos segmentos*, un avión alcanza la pista en un planeo recto, empezando en un punto 5.5 millas (horizontales) del punto de aterrizaje, y luego cambia a un planeo de 3° a 1.5 mi (horizontales) del punto de aterrizaje. El propósito de este nuevo acceso es, por supuesto, el de reducir el ruido. ¿Cuál es la altura en pies de un avión P que utiliza el planeo experimental cuando cambia al planeo de 3°? Compare la altura de este avión con otro avión P' utilizando el acceso estándar de 3° cuando ambos aviones están a 5.5 millas del punto de aterrizaje.

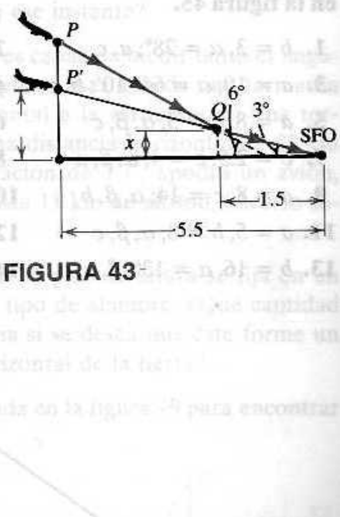


FIGURA 43

Solución. Para poder ilustrar más claramente, los ángulos y las distancias que se muestran en la figura 43 son un poco exagerados.

Sea x la altura del avión P en el punto Q 1.5 millas fuera de la pista, cuando el avión cambia al planeo de 3°. De la figura vemos que:

$$\frac{x}{1.5} = \tan 3°, \quad \text{o} \quad x = 1.5 \tan 3°$$

Entonces,

$$\begin{aligned} x &\approx 1.5(0.0524078) \\ &\approx 0.0786 \text{ millas} \\ &= 0.0786\,(5{,}280) \text{ pies} \\ &\approx 415 \text{ pies} \end{aligned}$$

Si y es la altura del avión P' en el acceso estándar de 3° cuando está a 5.5 millas fuera de la pista, entonces,

$$\frac{y}{5.5} = \tan 3°, \quad \text{o} \quad y = 5.5 \tan 3°$$

Así:

$$\begin{aligned} y &\approx 5.5(0.0524078) \\ &\approx 0.2882 \text{ millas} \\ &= 0.2882(5{,}280) \text{ pies} \\ &\approx 1{,}522 \text{ pies} \end{aligned}$$

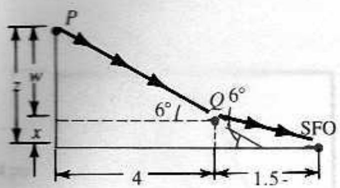


FIGURA 44

Ahora, como lo muestra la figura 44, la altura del aeroplano P a 5.5 millas por fuera, está dada por:

$$z = w + x$$

donde $\dfrac{w}{4} = \tan 6°$, o $w = 4 \tan 6°$

Entonces,

$$\begin{aligned} w &\approx 4(0.1051042) \\ &\approx 0.4204 \text{ millas} \\ &= 0.4204(5{,}280) \text{ pies} \\ &\approx 2{,}220 \text{ pies} \end{aligned}$$

Por consiguiente, la altura aproximada del avión P en un punto 5.5 millas fuera es:

$$z \approx 2{,}220 + 415 = 2{,}635 \text{ pies}$$

EJERCICIO 6.3

En los problemas 1 al 14, encuentre las incógnitas que se le piden. Cada problema se refiere al triángulo que se muestra en la figura 45.

1. $b = 3, \alpha = 28°; a, c$

2. $c = 12, \alpha = 47°; a, b$

3. $a = 10, \alpha = 64° 10'; b, c$

4. $c = 36, \alpha = 40°; a, b$

5. $a = 8, b = 3; \alpha, \beta, c$

6. $a = 5, \alpha = 37° 20'; b, c$

7. $b = 2.5, c = 4; \alpha, \beta, a$

8. $a = 6, \beta = 48°; b, c$

9. $a = 8, c = 14; \alpha, \beta, b$

10. $a = 8, b = 12; \alpha, \beta, c$

11. $a = 5, b = 8; \alpha, \beta, c$

12. $b = 12, \beta = 57.5°; \alpha, a, c$

13. $b = 16, \alpha = 13°; \beta, a, c$

14. $c = 16, \beta = 41° 35'; a, b$

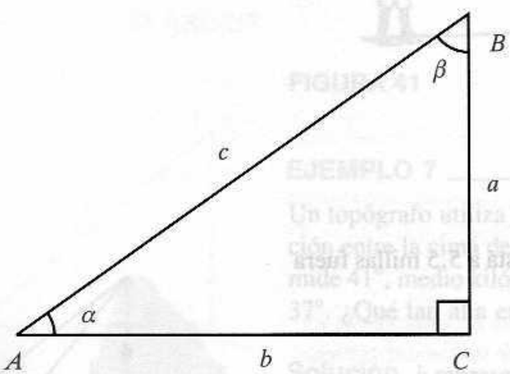


FIGURA 45

15. Una palma proyecta una sombra de 18 m de largo. Si el ángulo que se forma desde la punta de la sombra hasta el punto más alto de la palma es de 48°, ¿cuál es la altura de la palma?

16. Una escalera eléctrica debe transportar a una altura del piso de 20 pies, con un ángulo de elevación de 25°. ¿Qué longitud tendrá la escalera?

17. Se desea construir un puente que una los puntos P_1 y P_2 que están en las orillas opuestas de un río. Un árbol que está en la orilla de P_1 dista de él 100 m. El ángulo β que se forma entre las líneas que van del árbol a P_1 y a P_2 es de 31.5°. Si la línea del árbol a P_1 es perpendicular a la línea de P_1 a P_2, halle la longitud que debe tener el puente.

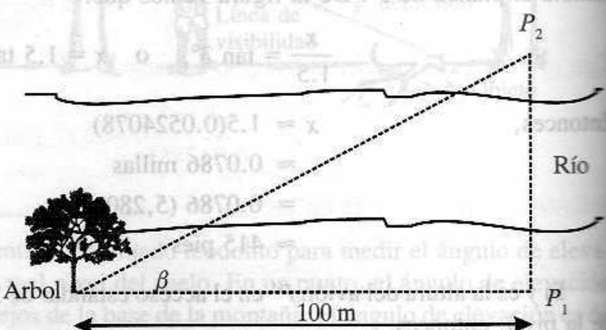


FIGURA 46

18. Un topógrafo utiliza un geodímetro para medir la distancia en línea recta desde un punto en el suelo hasta un punto en la cima de una montaña. Utilice la información que se da en la figura 47 para determinar la altura de la montaña.

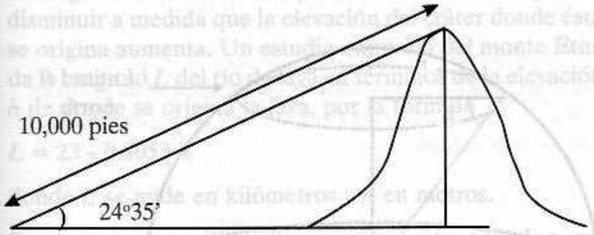


FIGURA 47

19. Un salvavidas se encuentra en una torre a 20 metros del nivel del mar. Descubre a una persona que necesita su ayuda a un ángulo de depresión de 35°. ¿A qué distancia de la base de la torre se encuentra esa persona?

20. Un helicóptero se mantiene a una altitud constante de 300 metros y pasa directamente por encima de un observador. Después de un minuto, el observador ve el helicóptero con un ángulo de elevación de 65°. Determine la velocidad del helicóptero en km por hora.

21. Un observador situado en una torre mide un ángulo de depresión de 29° entre la línea horizontal y la base de otra torre que está a 120 pies de la primera. El ángulo de elevación desde el mismo punto hasta otro observador que se encuentra en la segunda torre es de 38° 20'; ¿a qué altura se encuentra el observador de la segunda torre?

22. Hay satélites que son lanzados a una órbita geosincrónica, lo cual significa que la altitud del satélite con respecto a la Tierra permanece constante. Suponga que desde uno de estos satélites se observa un ángulo de 37.8° entre una línea que va del satélite al centro de la Tierra y otra línea del satélite a un punto de tangencia con la Tierra, como se muestra en la figura 48. Dado que el diámetro de la Tierra es aproximadamente 7,900 millas, determine la altitud del satélite.

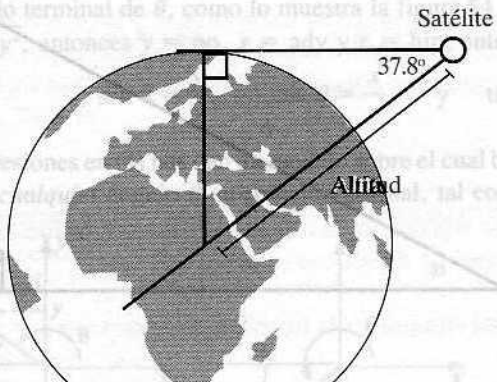


FIGURA 48

23. Un hombre de 6 pies, parado a 100 pies de la base de una casa de 30 pies de altura, mira hacia la antena de televisión localizada en el borde del techo. Si el ángulo entre su línea de visibilidad al borde del techo y su línea de visibilidad a la línea de la antena es de 8°, ¿cuál es la altura de la antena?

24. Una persona está conduciendo directamente hacia una presa de 215 metros de altura. Si se traslada en un camino nivelado desde el punto en que el ángulo de elevación a la punta de la presa es de 18° hasta un punto en que el ángulo de elevación es 32°, ¿cuál es la distancia que ha recorrido?

25. Si el Sol se encuentra a un ángulo de elevación de 58°, ¿qué largo tendrá la sombra de una persona de 6 pies?

26. Una lancha que viaja en forma paralela a una playa pasa a las 2 p.m. a media milla exactamente enfrente de un observador de la guardia costera que se encuentra en la orilla de una playa. Después de 5 minutos se observa la lancha a un ángulo de 37° de línea de visión del observador a las 2 p.m. Determine la velocidad de la lancha en millas por hora.

27. Un aeroplano que vuela a una altitud de 30,000 pies se aproxima a una estación de radar localizada en una colina de 2,500 pies de altura. En un instante, el ángulo entre el radar que apunta hacia el avión y la horizontal es de 62°; ¿cuál es la distancia en línea recta, en millas, entre el avión y la estación de radar en ese instante?

28. Un radar meteorológico es capaz de medir tanto el ángulo de elevación hasta el punto más alto de una tormenta como la distancia horizontal a la tormenta. Si una tormenta se encuentra a una distancia horizontal de 85 km tiene un ángulo de elevación de 3.7°; ¿podrá un avión, que es capaz de volar hasta 11 km de altitud, hacerlo sobre la tormenta?

29. Para soportar un poste a 35 pies de altura se fija en un punto en la tierra cierto tipo de alambre. ¿Qué cantidad de alambre será necesaria si se desea que éste forme un ángulo de 52° con la horizontal de la tierra?

30. Utilice la información dada en la figura 49 para encontrar la longitud $\overline{CD}$.

$\angle DAC = 8°$

$\overline{AB} = 40$ m, $\overline{BC} = 50$ m

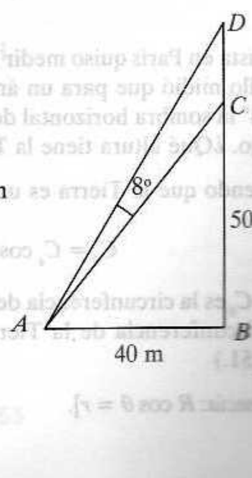


FIGURA 49

31. Un techo de nubes es la altitud más baja a la cual podemos encontrar una nube sólida. El techo de nubes en los aeropuertos debe estar suficientemente alto para que los despegues y los aterrizajes sean seguros. Durante la noche, el techo de nubes puede ser determinado si se ilumina su base con un proyector que apunte verticalmente hacia arriba. Si un observador se encuentra a 750 metros del proyector y el ángulo de elevación hasta la base de la nube iluminada es de 9°, encuentre el techo de nubes. (Véase figura 50).

Durante el día el techo de nubes se calcula generalmente mediante la simple observación. Sin embargo, si se requiere el cálculo exacto, se infla un globo de tal manera que se eleve a una razón constante determinada. Luego se suelta el globo y se cronometra hasta el momento en que éste desaparece dentro de la nube. El techo de nubes se determina multiplicando la razón por el tiempo de ascenso.

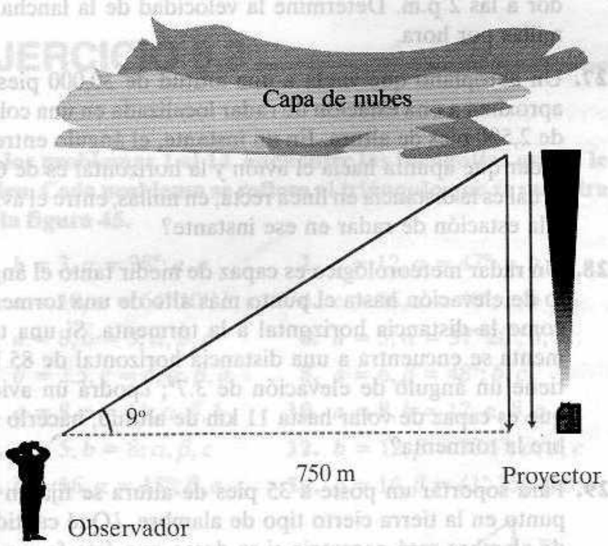


FIGURA 50

32. Un turista en París quiso medir la altura de la Torre Eiffel. Para ello midió que para un ángulo de elevación del Sol de 28.4° la sombra horizontal de la torre fue de 1,822 pies de largo. ¿Qué altura tiene la Torre Eiffel?

33. Asumiendo que la Tierra es una esfera, demuestre que

$$C_0 = C_e \cos\theta$$

donde C_0 es la circunferencia del paralelo de latitud θ y C_e es la circunferencia de la Tierra en el ecuador. (Véase figura 51.)

[*Sugerencia*: $R\cos\theta = r$].

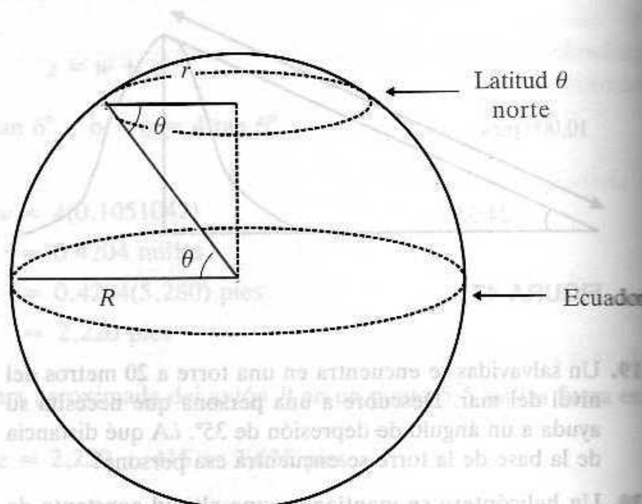


FIGURA 51

En los problemas 34 y 35, utilice el resultado del problema 33 (tome 6,400 km como el radio *R* de la Tierra).

34. Encuentre la circunferencia del paralelo de latitud θ en que vive.

35. Encuentre la distancia "alrededor del mundo" a una latitud constante de 54° 45' N.

36. Deduzca la fórmula $A = 1/2\ bc$ sen α para el área del triángulo que se muestra en la figura 52.

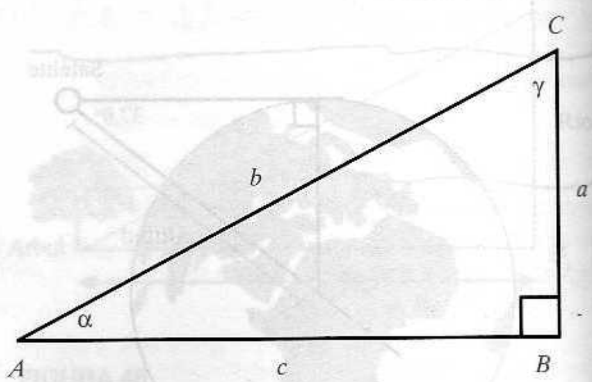


FIGURA 52

37. La longitud final de la lava que fluye de un volcán parece disminuir a medida que la elevación del cráter donde ésta se origina aumenta. Un estudio empírico del monte Etna da la longitud L del río de lava en términos de la elevación h de donde se origina la lava, por la fórmula

$L = 23 - 0.0053\,h,$

donde L se mide en kilómetros y h en metros.

Suponga que una villa siciliana se encuentra situada a una altura de 800 m sobre una pendiente con inclinación de 9°, directamente abajo de donde se origina la lava que tiene una altitud de 2,850 m. De acuerdo con la fórmula, ¿qué tan cerca de la aldea alcanzaría a llegar la lava?

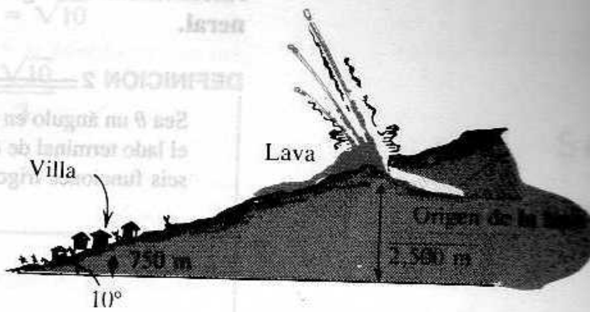


FIGURA 53

6.4 Funciones trigonométricas de ángulos generales

Hasta ahora hemos definido las funciones trigonométricas sólo para ángulos agudos. Sin embargo, muchas aplicaciones de la trigonometría incluyen ángulos que no son agudos. Como consecuencia, es necesario extender la definición de las seis funciones trigonométricas para los ángulos generales. Naturalmente, queremos extender la definición para estar de acuerdo con la definición anterior, cuando el ángulo sea agudo. Para lograr esto, procedemos como sigue.

Dejemos que θ sea un ángulo agudo en posición normal y escojamos un punto $P(x, y)$ en el lado terminal de θ, como lo muestra la figura 54. Si tomamos $r = d\,(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces $y = \text{op}$, $x = \text{ady}$ y $r = \text{hip}$, entonces tenemos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \tag{4}$$

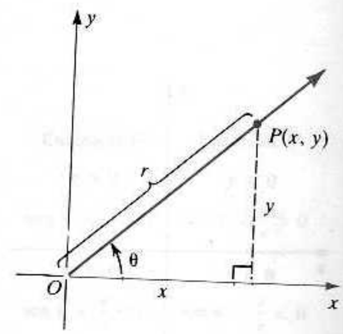
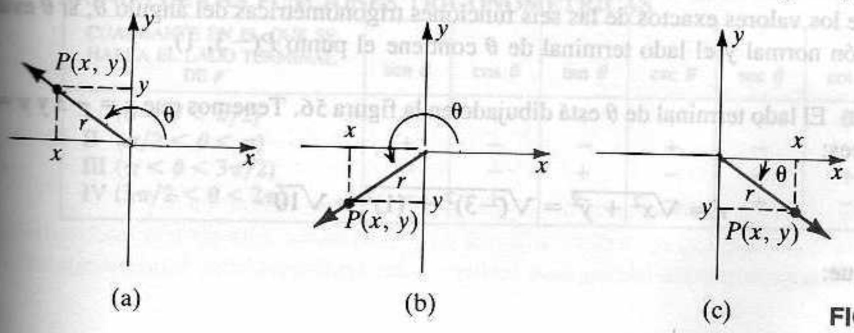


FIGURA 54

Las expresiones en (4) nos dan un modelo sobre el cual basamos nuestra definición extendida para *cualquier* ángulo θ en posición normal, tal como lo ilustra la figura 55.



(a) (b) (c) **FIGURA 55**

Ahora tenemos la siguiente definición de las **funciones trigonométricas de un ángulo general.**

DEFINICION 2

Sea θ un ángulo en posición normal, y sea $P(x, y)$ cualquier punto distinto de (0, 0) en el lado terminal de θ. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia entre (0, 0) y (x, y), entonces las seis funciones trigonométricas de θ se definen como:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}, \qquad \csc\theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sec\theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0, \qquad \cot\theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$

Se puede demostrar, utilizando triángulos semejantes, que los valores de las seis funciones trigonométricas dependen únicamente del ángulo θ y no del punto $P(x, y)$ que se escoja en el lado terminal de θ. (La justificación es como la que se hizo para los ángulos agudos en la página 281. Véase problema 65).

Las funciones trigonométricas serían indefinidas si los denominadores de sus fórmulas valieran cero. Como $P(x, y) \neq (0, 0)$ entonces $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ nunca es cero. Entonces, los dominios de las funciones trigonométricas seno y coseno constan de todos los ángulos θ. Sin embargo, las funciones tangente y secante son indefinidas si el ángulo θ tiene su lado terminal sobre el eje y, porque entonces $x = 0$. Entonces, los dominios de tan θ y sec θ constan de todos los ángulos θ, *excepto* aquellos medidos en radianes $\pm\ \pi/2$, $\pm\ 3\ \pi/2$, $\pm\ 5\ \pi/2$, y así sucesivamente. Utilizando la notación conjuntista, podemos escribir los dominios de las funciones tangente y secante como $\{\theta | \theta \neq (2n+1)\pi/2,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ o $\{\theta | \theta \neq (2n+1)90°,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Las funciones cotangente y cosecante no se definen para ángulos con lados terminales en el eje x porque entonces $y = 0$. Así, los dominios de cot θ y csc θ comprenden todos los ángulos θ, excepto aquellos cuya medida en radianes es $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$ y así sucesivamente; esto es: $\{\theta | \theta \neq n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ o $\{\theta | \theta \neq 180°n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, se sigue que $|x| \leq r$ y $|y| \leq r$. Entonces,

$$|\operatorname{sen}\theta| \leq 1, \qquad |\cos\theta| \leq 1, \qquad |\csc\theta| \geq 1, \quad \text{y} \quad |\sec\theta| \geq 1$$

para todo ángulo θ en el dominio de cada una de las funciones.

EJEMPLO 1

Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ, si θ está en posición normal y el lado terminal de θ contiene el punto $P(-3, 1)$.

FIGURA 56

Solución. El lado terminal de θ está dibujado en la figura 56. Tenemos que $x = -3$ y $y = 1$, entonces:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$$

De ahí que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{10}}{-3} = -\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}, \qquad \cot\theta = \frac{-3}{1} = -3$$

cos sen
$\frac{\pi}{2}$ 0 1
$-\frac{\pi}{2}$ -1

EJEMPLO 2

Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas de θ si $\theta = -\pi/2$.

Solución. Primero, colocamos θ en posición normal como lo muestra la figura 57. Según la definición, podemos escoger cualquier punto $P(x, y)$ en el lado terminal de θ. Por conveniencia, escogemos $P(0, -1)$, para que $x = 0$, $y = -1$, y $r = \sqrt{x^2+y^2} = 1$. Entonces,

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{1} = -1, \qquad \csc\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{1} = 0, \qquad \cot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{-1} = 0$$

Sin embargo, las expresiones $\tan\theta = y/x$ y $\sec\theta = r/x$, son indefinidas para $\theta = -\pi/2$ ya que $x = 0$.

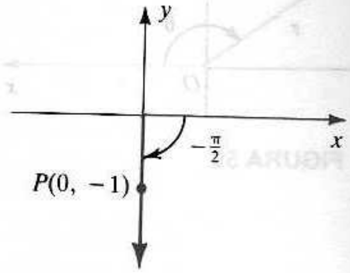


FIGURA 57

SIGNOS ALGEBRAICOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Dependiendo del cuadrante en que está el lado terminal de θ, una o ambas coordenadas de $P(x, y)$ pueden ser negativas. Como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ *siempre es positiva*, cada una de las seis funciones trigonométricas de θ tiene valores tanto negativos como positivos. Por ejemplo, como lo muestra la figura 58, $\operatorname{sen}\theta = y/r$ es positivo, si el lado terminal de θ está en los cuadrantes I ó II (donde y es positivo) y, y es negativo si el lado terminal de θ está en los cuadrantes III ó IV (donde y es negativo).

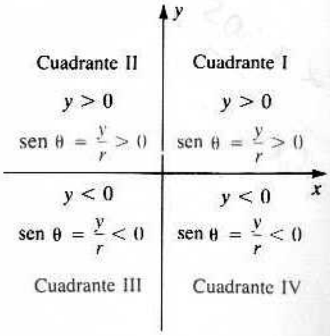


FIGURA 58

La siguiente tabla resume los signos algebraicos de las seis funciones trigonométricas. Por conveniencia, si el lado terminal de θ está en el segundo cuadrante, nos referiremos a θ como un ángulo del cuadrante II o diremos que θ está en el cuadrante II. Usaremos una terminología similar cuando nos refiramos a ángulos con sus lados terminales en los cuadrantes I, III ó IV.

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

CUADRANTE EN EL QUE SE HALLA EL LADO TERMINAL DE θ	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
I $(0 < \theta < \pi/2)$	+	+	+	+	+	+
II $(\pi/2 < \theta < \pi)$	+	−	−	+	−	−
III $(\pi < \theta < 3\pi/2)$	−	−	+	−	−	+
IV $(3\pi/2 < \theta < 2\pi)$	−	+	−	−	+	−

EJEMPLO 3

¿En qué cuadrante se encuentra el lado terminal de θ si sen $\theta > 0$ y tan $\theta < 0$?

Solución. Como la función seno es positiva para ángulos en los cuadrantes I y II y la función tangente es negativa en los cuadrantes II y IV, el lado terminal de θ debe estar en el cuadrante II.

IDENTIDADES PITAGORICAS

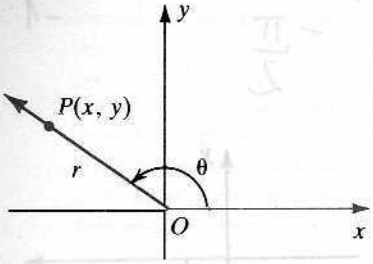


FIGURA 59

Las identidades recíprocas y de cociente para los ángulos agudos que dimos en la sección 6.2 también se utilizan para los ángulos generales. (Véase problema 66). A nuestra colección de identidades fundamentales agregamos tres identidades muy útiles denominadas **identidades pitagóricas**. Para obtener la primera de éstas, sea θ cualquier ángulo en posición normal. Como lo muestra la figura 59, sea $P(x, y)$ cualquier punto distinto del origen en el lado terminal de θ. Sea $r = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces tenemos que:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Si dividimos ambos lados por r^2 podemos escribir

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1, \quad \text{o} \quad \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

Reconociendo que $x/r = \cos\theta$ y $y/r = \text{sen}\ \theta$, obtenemos la identidad pitagórica básica:

$$(\cos\theta)^2 + (\text{sen}\ \theta)^2 = 1 \tag{5}$$

$x^2+y^2=r$

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha$

Es normal escribir $\cos^2\theta$, en lugar de $(\cos\theta)^2$, y $\text{sen}^2\theta$, en lugar de $(\text{sen}\ \theta)^2$. Una notación similar se utiliza para las otras funciones trigonométricas y para todas las potencias *excepto* -1. (Como lo reafirmamos en la sección 6.2, $\text{sen}^{-1}\theta$, $\cos^{-1}\theta$, y así sucesivamente, se refieren a la función inversa de la correspondiente función trigonométrica, la cual analizaremos en el capítulo 7).

Con esta nueva notación, (5) se vuelve:

$$\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1 \tag{6}$$

Si dividimos ambos lados de esta ecuación por $\cos^2\theta$ obtenemos,

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

o

$$1 + \left(\frac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2$$

Como $\tan\theta = \text{sen}\ \theta/\cos\theta$ y $\sec\theta = 1/\cos\theta$, esto se simplifica a:

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

La última identidad pitagórica es:

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

Se obtiene al dividir ambos lados de (6) por $\text{sen}^2\theta$. (Véase problema 67).

Para su conveniencia en la parte interior de la portada de este libro se encuentra un resumen de trigonometría básica, que incluye todas las identidades fundamentales.

$\frac{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1}{\cos^2\alpha \quad \cos^2\alpha \quad \cos^2\alpha}$

$1 + \operatorname{tang}^2\alpha = \sec^2$

$\frac{\cos^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = 1}{\operatorname{sen}^2\alpha \quad \operatorname{sen}^2\alpha \quad \operatorname{sen}^2}$

$\cot ag^2\alpha + 1 = \operatorname{cosec}$

EJEMPLO 4

Dado que $\cos\theta = \frac{1}{3}$ y que θ es un ángulo en el cuadrante IV, encuentre los valores exactos de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ.

Solución. Sustituyendo $\cos\theta = \frac{1}{3}$ por $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$ resulta que:

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \tfrac{1}{9} = \tfrac{8}{9}$$

Como el lado terminal de θ está en el cuadrante IV, $\operatorname{sen}\theta$ es negativo. Por lo que *debemos* elegir la raíz cuadrada negativa de $\frac{8}{9}$:

$$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Se sigue que:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{-2\sqrt{2}/3}{1/3} = -2\sqrt{2}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{1/3} = 3, \quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{-2\sqrt{2}/3} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

EJEMPLO 5

Dado que $\tan\theta = -2$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$, encuentre los valores exactos de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ.

Solución. Tomando $\tan\theta =. -2$ en la identidad $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ encontramos que:

$$\sec^2\theta = 1 + (-2)^2 = 5$$

Como $\tan\theta$ es negativa en los cuadrantes II y IV y $\operatorname{sen}\theta$ es positivo en los cuadrantes I y II, el lado terminal de θ debe estar en el cuadrante II. Entonces, debemos tomar:

$$\sec\theta = -\sqrt{5}$$

De $\sec\theta = 1/\cos\theta$, se deduce que:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{-\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Luego, usando $\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$, obtenemos,

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta\tan\theta = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)(-2) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Luego, $$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{2\sqrt{5}/5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

y $$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

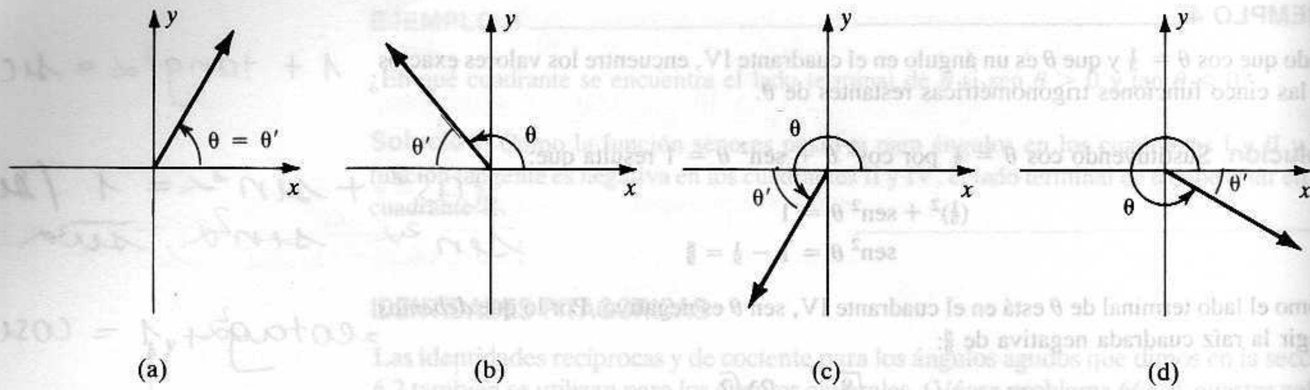


FIGURA 60

En la sección 6.2 encontramos valores exactos para las seis funciones trigonométricas de los ángulos especiales de 30°, 45° y 60° (o $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$, medidos en radianes).

Estos valores se pueden utilizar para determinar los valores exactos de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos, no agudos, mediante el **ángulo de referencia.**

DEFINICION 3

> Tomemos θ como un ángulo en posición normal de manera que su lado terminal no esté en un eje coordenado. El **ángulo de referencia** θ' para θ se define como el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x.

La figura 60 ilustra esta definición para ángulos con lados terminales en cada uno de los cuatro cuadrantes.

EJEMPLO 6

Encuentre el ángulo de referencia θ' para cada ángulo θ.

(a) $\theta = 40°$ **(b)** $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ **(c)** $\theta = 210°$ **(d)** $\theta = -\dfrac{9\pi}{4}$

Solución

(a) A partir de la figura 61(a) vemos que $\theta' = 40°$

(b) A partir de la figura 61(b), $\theta' = \pi - \theta = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$

(c) A partir de la figura 61(c), $\theta' = \theta - 180° = 210° - 180° = 30°$

(d) Como $\theta = -9\pi/4$ es coterminal con:

$$-\frac{9\pi}{4} + 2\pi = -\frac{\pi}{4}$$

encontramos que $\theta' = \pi/4$ (véase figura 61(d)).

La utilidad de los ángulos de referencia al evaluar las funciones trigonométricas es resultado de la siguiente propiedad.

> **Propiedad de los ángulos de referencia**
>
> El valor absoluto de cualquier función trigonométrica de un ángulo θ es igual al valor de esa función para el ángulo de referencia θ'.

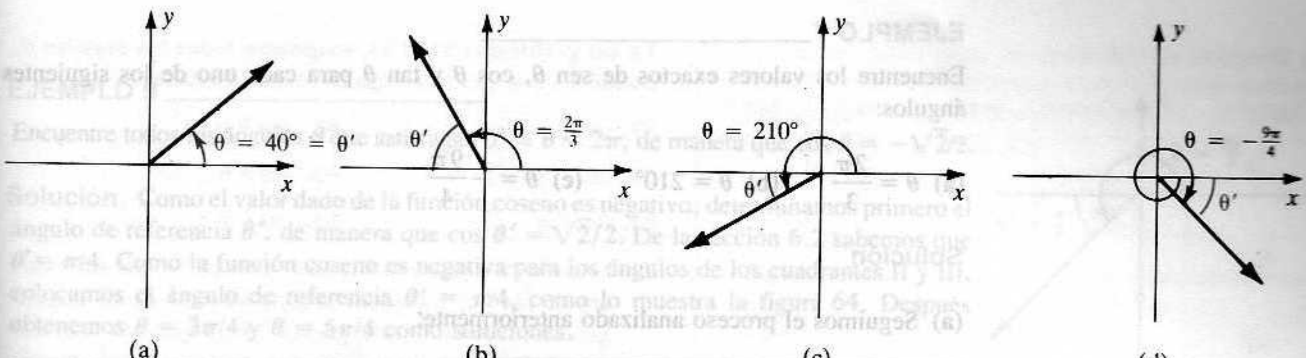


FIGURA 61

Por ejemplo,

$$|\text{sen } \theta| = \text{sen } \theta', \quad |\cos \theta| = \cos \theta'$$

y así sucesivamente.

Verificamos la propiedad para la función seno y dejamos los casos restantes como un ejercicio. Si el lado terminal de θ está en el cuadrante I, entonces $\theta = \theta'$ y el seno θ es positivo, por tanto,

$$\text{sen } \theta' = \text{sen } \theta = |\text{sen } \theta|$$

De la figura 62, vemos que si θ es un ángulo de los cuadrantes II, III o IV entonces tenemos que:

$$\text{sen } \theta' = \frac{|y|}{r} = \left|\frac{y}{r}\right| = |\text{sen } \theta|$$

donde $P(x, y)$ es cualquier punto, en el lado terminal de θ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

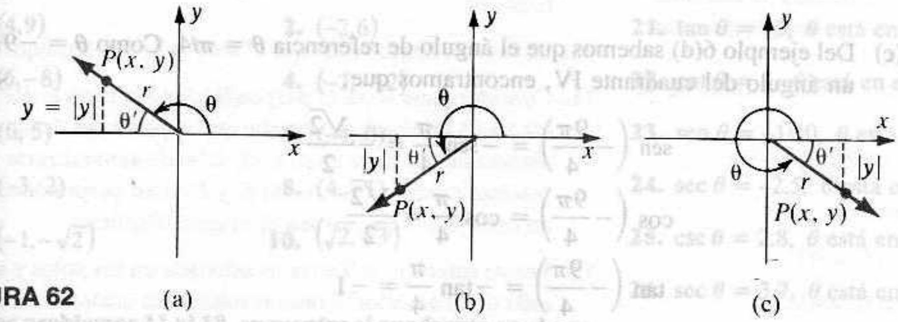


FIGURA 62

Ahora podemos describir un procedimiento paso a paso para determinar el valor de una función trigonométrica para cualquier ángulo θ.

Para encontrar el valor de una función trigonométrica de un ángulo θ

1. Encuentre el ángulo de referencia θ'.
2. Determine el valor de la función trigonométrica para θ'.
3. Seleccione el signo algebraico correcto, considerando el cuadrante en el que se encuentre el lado terminal del ángulo θ.

EJEMPLO 7

Encuentre los valores exactos de sen θ, cos θ y tan θ para cada uno de los siguientes ángulos:

(a) $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ **(b)** $\theta = 210°$ **(c)** $\theta = -\dfrac{9\pi}{4}$

Solución

(a) Seguimos el proceso analizado anteriormente.

1. En el ejemplo 6(b) hallamos que el ángulo de referencia para $\theta = 2\pi/3$ es $\theta' = \theta/3$.
2. De la sección 6.2 sabemos que sen $(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, cos $(\pi/3) = 1/2$ y tan $(\pi/3) = \sqrt{3}$.
3. Como $\theta = 2\pi/3$ es un ángulo del cuadrante II, donde el seno es positivo, pero el coseno y la tangente son negativos, tenemos que:

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \text{y} \quad \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

(b) Refiriéndonos al ejemplo 6(c), vemos que el ángulo de referencia $\theta' = 30°$. Usando la propiedad de los ángulos de referencia y el hecho de que el lado terminal de $\theta = 210°$ está en el cuadrante III, obtenemos:

$$\operatorname{sen} 210° = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$$
$$\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 210° = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(c) Del ejemplo 6(d) sabemos que el ángulo de referencia $\theta = \pi/4$. Como $\theta = -9\pi/4$ es un ángulo del cuadrante IV, encontramos que,

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

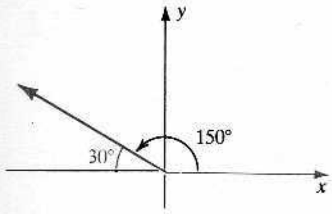
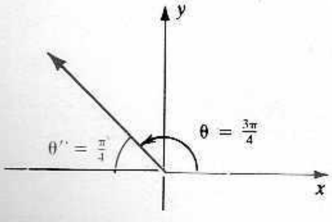


FIGURA 63

EJEMPLO 8

Encuentre todos los ángulos que se encuentren entre $0° \leq \theta < 360°$ de manera que sen $\theta = \frac{1}{2}$.

Solución. De lo que sabemos acerca de los ángulos especiales 30°, 60° y 90°, tenemos que $\theta = 30°$ es una solución. Usando 30° como ángulo de referencia en el segundo cuadrante, como lo muestra la figura 63, encontramos $\theta = 150°$ como una segunda solución. Como la función seno es negativa en los cuadrantes III y IV, no hay soluciones adicionales que satisfagan $0° \leq \theta < 360°$.

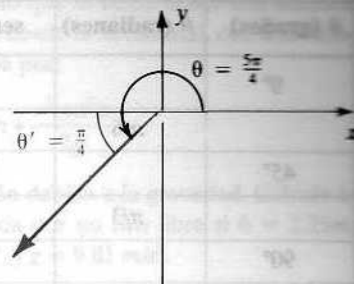


(a)

EJEMPLO 9

Encuentre todos los ángulos θ que satisfagan $0° \leqslant \theta < 2\pi$, de manera que $\cos\theta = -\sqrt{2}/2$.

Solución. Como el valor dado de la función coseno es negativo, determinamos primero el ángulo de referencia θ', de manera que $\cos\theta' = \sqrt{2}/2$. De la sección 6.2 sabemos que $\theta' = \pi/4$. Como la función coseno es negativa para los ángulos de los cuadrantes II y III, colocamos el ángulo de referencia $\theta' = \pi/4$, como lo muestra la figura 64. Después obtenemos $\theta = 3\pi/4$ y $\theta = 5\pi/4$ como soluciones.



(b)

FIGURA 64

Nota de advertencia: en esta sección hemos evitado intencionalmente la utilización de calculadoras. Para un completo entendimiento de la trigonometría, es fundamental que usted domine los conceptos y sea capaz de resolver *sin calculadora* los cálculos y las simplificaciones que hemos visto. Los siguientes ejercicios deben ser resueltos sin tabla y sin calculadora.

EJERCICIO 6.4

(No utilice tablas ni calculadoras para resolver los siguientes problemas.)

En los problemas 1 al 10, evalúe las seis funciones trigonométricas del ángulo θ, si θ está en posición normal y su lado terminal contiene el punto dado.

1. $(4,9)$ **2.** $(-2,6)$

3. $(6,-8)$ **4.** $(-7,-12)$

5. $(0,5)$ **6.** $(-4,0)$

7. $(-3,2)$ **8.** $(4,-1)$

9. $(-1,-\sqrt{2})$ **10.** $(\sqrt{2},\sqrt{3})$

En los problemas 11 al 18, encuentre el cuadrante en el que se encuentra el lado terminal de θ, si θ satisface las siguientes condiciones.

11. $\operatorname{sen}\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$ **12.** $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cos\theta < 0$

13. $\tan\theta > 0$ y $\sec\theta < 0$ **14.** $\sec\theta > 0$ y $\csc\theta < 0$

15. $\cot\theta < 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$ **16.** $\sec\theta > 0$ y $\cot\theta < 0$

17. $\sec\theta < 0$ y $\tan\theta < 0$ **18.** $\tan\theta > 0$ y $\csc\theta < 0$

En los problemas 19 al 28 se da el valor de una de las funciones trigonométricas del ángulo θ. Con este valor y la información adicional, determine los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ.

19. $\csc\theta = 4$, θ está en el cuadrante II.

20. $\cos\theta = -1/5$, θ está en el cuadrante III.

21. $\tan\theta = -3$, θ está en el cuadrante II.

22. $\cot\theta = 5$, θ está en el cuadrante III.

23. $\operatorname{sen}\theta = -1/10$, θ está en el cuadrante IV.

24. $\sec\theta = -2.5$, θ está en el cuadrante II.

25. $\csc\theta = 2.8$, θ está en el cuadrante II.

26. $\sec\theta = 3.7$, θ está en el cuadrante IV.

27. $\tan\theta = 7$, θ está en el cuadrante III.

28. $\cos\theta = 0.84$, θ está en el cuadrante IV.

29. Si $\operatorname{sen}\theta = 7/10$, halle todos los posibles valores de $\cos\theta$.

30. Si $\cos\theta = -3/8$, halle todos los posibles valores de $\operatorname{sen}\theta$.

31. Si $3\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta = 0$, halle todos los posibles valores de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

32. Si $\tan\theta = 3/4$, halle todos los posibles valores de $\csc\theta$.

33. Si $\csc\theta = -4$, halle todos los posibles valores de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

34. Complete la siguiente tabla:

θ (grados)	θ (radianes)	sen θ	cos θ	tan θ
0°				
	$\pi/6$			
45°				
	$\pi/3$			
90°				
	$2\pi/3$			
135°				
	$5\pi/6$			
180°				
	$7\pi/6$			
225°				
	$4\pi/3$			
270°				
	$5\pi/3$			
315°				
	$11\pi/6$			
360°				

35. Si $5 \cos \theta = \text{sen}\, \theta$, halle todos los posibles valores de tan θ y csc θ.

36. Complete una tabla similar a la del problema 34 sustituyendo sen θ, cos θ, tan θ por csc θ, sec θ y cot θ respectivamente.

En los problemas 37 al 52, encuentre el valor exacto en la expresión.

37. $\cos 7\pi$
38. $\text{sen}\,(13\pi/6)$
39. $\csc(-7\pi/6)$
40. $\cot 9\pi/4$
41. $\cos(-4\pi/3)$
42. $\text{sen}\,(25\pi/4)$
43. $\sec(-\pi/6)$
44. $\tan(25\pi/4)$
45. $\sec(-150°)$
46. $\cos(495°)$
47. $\text{sen}\,(-120°)$
48. $\sec(-45°)$
49. $\tan(-405°)$
50. $\cos(315°)$
51. $\tan(-720°)$
52. $\cot(-300°)$

En los problemas 53 al 58, encuentre todos los ángulos θ que satisfagan la condición dada y donde $0° \le \theta < 360°$.

53. $\cot \theta = \sqrt{3}$
54. $\cos \theta = -1/2$
55. $\text{sen}\,\theta = -\sqrt{2}/2$
56. $\csc \theta = 2\sqrt{3}/3$
57. $\sec \theta = -1$
58. $\tan \theta = -1/\sqrt{3}$

En los problemas 59 al 64, encuentre todos los ángulos θ, donde $0 \le \theta < 2\pi$; satisfaga la condición dada.

59. $\cos \theta = 0$
60. $\text{sen}\,\theta = -1$
61. $\csc \theta = -\sqrt{2}$
62. $\sec \theta = 2$
63. $\tan \theta = -\sqrt{3}$
64. $\cot \theta = 1$

65. Usando triángulos semejantes demuestre que los valores de las seis funciones trigonométricas de un ángulo general, definido en la página 300, dependen sólo del ángulo θ, no del punto $P(x, y)$ escogido en el lado terminal de θ.

66. Si θ es cualquier ángulo para el cual las funciones están definidas, pruebe que:

$$\csc \theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta},\ \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta},\ \text{y}\ \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos \theta},\ \text{y}\ \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\text{sen}\,\theta}$$

67. Pruebe que $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$ es una identidad.

68. Sea L una recta no vertical que pasa por el origen y forma un ángulo θ medido en sentido contrario a las manecillas del reloj, desde el semieje ox positivo. Pruebe que la pendiente de L es tan θ. ¿Puede generalizarse este resultado para cualquier recta L no vertical aunque no pase por el origen? Explique.

69. ¿Es posible que $\cos \theta = 3/2$? ¿Es posible que $\text{sen}\,\theta = -5/4$? Explique.

70. ¿Existe un ángulo θ tal que $3 \sec \theta - 2 = 0$? Explique.

71. Considere una recta L' perpendicular a la recta L del problema 68 en el origen. Pruebe que el producto de las pendientes de L y L' es igual a -1. ¿Puede generalizarse este resultado aunque las rectas L y L' sean perpendiculares en otro punto que no sea el origen? Explique.

72. Por su rotación, la Tierra es achatada en los polos y abultada en el ecuador. Como resultado, la aceleración debida a la gravedad varía con la latitud θ. Estudios de satélite han demostrado que la aceleración debida a la gravedad g_{sat} es aproximada por la función.

$$g_{sat} = 978.0309 + 5.18552\ \text{sen}^2\,\theta - 0.00570\ \text{sen}^2\, 2\theta$$

(a) Encuentre g_{sat} en la latitud en que vive.

(b) Encuentre g_{sat} en el ecuador ($\theta = 0°$).

(c) Encuentre g_{sat} en el polo norte.

73. La figura 65 representa un triángulo rectángulo con un semicírculo pegado a su hipotenusa. Exprese el área de la figura como función del diámetro d del semicírculo.

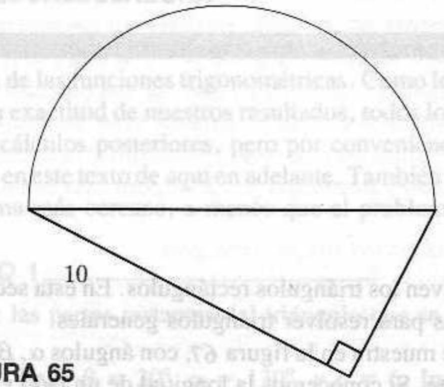


FIGURA 65

74. Dada la figura 66, exprese $|RQ|$ como función de θ.

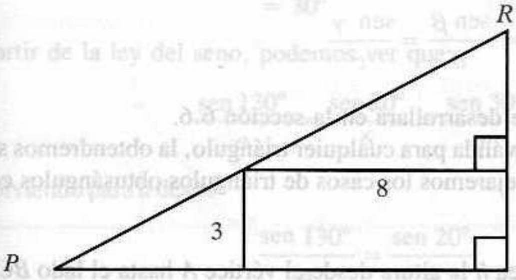


FIGURA 66

75. En ciertas condiciones, la altura máxima alcanzada por una pelota de baloncesto que se lanza desde una altura h en un ángulo α medido desde la horizontal, con una velocidad inicial v, está dada por:

$$y = h + \frac{v^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Calcule la máxima altura alcanzada por un tiro libre si $h = 2.25m$, $v = 8.5\ m/s$, $\alpha = 65°\ 30'$, y $g = 9.81\ m/s^2$.

76. El alcance de un lanzamiento desde una altura h por encima del piso, con una velocidad inicial v, en un ángulo α con la horizontal puede ser aproximadamente:

$$R = \frac{v \cos^2 \alpha}{g}\left[v \operatorname{sen} \alpha + \sqrt{v^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2gh}\right]$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Compare los alcances logrados para las alturas desde donde se hicieron los lanzamientos:

(a) $h = 1.85$ m,

(b) $h = 2.1$ m,

(c) $h = 2.5$ m si $v = 13.8$ m/s y $\alpha = 46°$. Tome $g = 9.81$ m/s^2.

(d) Explique por qué un incremento en h produce un incremento en R, si los otros parámetros se mantienen fijos.

(e) ¿Qué implicaciones tiene esto sobre las ventajas que pueda tener un jugador alto?

6.5 Ley del seno

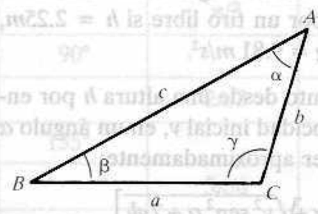


FIGURA 67

En la sección 6.3 vimos cómo se resuelven los triángulos rectángulos. En esta sección y en la próxima consideraremos las técnicas para resolver triángulos generales.

Considere el triángulo ABC que se muestra en la figura 67, con ángulos α, β y γ y con lados opuestos a, b y c, respectivamente. Si conocemos la longitud de un lado y otras dos partes del triángulo, podemos encontrar las tres partes restantes. Esto se puede lograr, o bien usando la **ley del seno:**

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \tag{7}$$

o aplicando la ley del coseno, que se desarrollará en la sección 6.6.

A pesar de que la ley del seno es válida para cualquier triángulo, la obtendremos solamente de triángulos acutángulos* y dejaremos los casos de triángulos obtusángulos como ejercicio (véase problema 37).

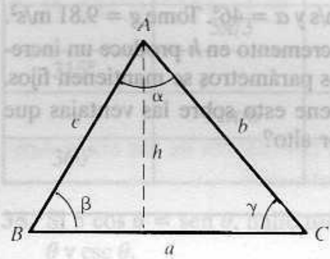


FIGURA 68

Como lo muestra la figura 68, sea h la altura desde el vértice A hasta el lado BC. Se sigue que:

$$\frac{h}{c}=\operatorname{sen}\beta$$

o

$$h=c\operatorname{sen}\beta \tag{8}$$

Similarmente,

$$\frac{h}{b}=\operatorname{sen}\gamma$$

o

$$h=b\operatorname{sen}\gamma \tag{9}$$

Igualando las expresiones (8) y (9) tenemos que:

$$c\operatorname{sen}\beta=b\operatorname{sen}\gamma$$

de manera que

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \tag{10}$$

De manera similar podemos probar que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \tag{11}$$

(véase problema 36). Combinando (10) y (11) obtenemos que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

* Un triángulo acutángulo es un triángulo cuyos tres ángulos miden menos de 90°.

USO DE LA CALCULADORA

A partir de este momento usaremos una calculadora científica para hallar aproximaciones de los valores de las funciones trigonométricas. Como lo mencionamos en la sección 5.2, para asegurar la exactitud de nuestros resultados, todos los dígitos serán retenidos en la calculadora para cálculos posteriores, pero por conveniencia sólo cuatro cifras decimales serán mostradas en este texto de aquí en adelante. También redondearemos los resultados finales a la centésima más cercana, a menos que el problema especifique otra cosa.

EJEMPLO 1

Determine las partes restantes del triángulo que se muestra en la figura 69.

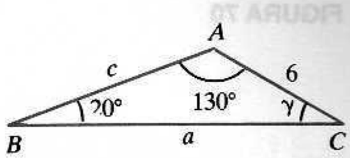


FIGURA 69

Solución. Sean $\beta = 20°$, $\alpha = 130°$, y $b = 6$. Inmediatamente se sigue que

$$\gamma = 180° - 20° - 130° = 30°$$

A partir de la ley del seno, podemos ver que:

$$\frac{\text{sen } 130°}{a} = \frac{\text{sen } 20°}{6} = \frac{\text{sen } 30°}{c}$$

Resolviendo para a desde

$$\frac{\text{sen } 130°}{a} = \frac{\text{sen } 20°}{6}$$

obtenemos que:

$$a = 6\left(\frac{\text{sen } 130°}{\text{sen } 20°}\right) \approx 6\left(\frac{0.7660}{0.3420}\right) \approx 13.44$$

Resolviendo para c, usamos:

$$\frac{\text{sen } 20°}{6} = \frac{\text{sen } 30°}{c}$$

de manera que

$$c = 6\left(\frac{\text{sen } 30°}{\text{sen } 20°}\right) \approx 6\left(\frac{0.5000}{0.3420}\right) \approx 8.77$$

Nota de advertencia: los resultados son generalmente más exactos si los valores dados son utilizados en lugar de los calculados, para calcular valores desconocidos. Así, en el ejemplo 1 utilizamos $(\text{sen } 20°)/6 = (\text{sen } 30°)/c$ para calcular c en lugar de $(\text{sen } 130°)/a = (\text{sen } 30°)/c$ y el valor calculado $a = 13.44$.

RESOLUCION DE TRIANGULOS: CUATRO CASOS

En general, podemos usar la ley del seno para resolver triángulos para los cuales sabemos: (i) dos ángulos y cualquiera de los lados, (ii) dos lados y un ángulo opuesto a alguno de estos lados. Aquellos triángulos para los cuales sabemos (iii) tres lados, o (iv) dos lados y el ángulo comprendido no pueden ser resueltos directamente aplicando la ley del seno. En la siguiente sección consideraremos un método para resolver los últimos dos casos.

En el ejemplo 1, donde se nos dieron dos ángulos y un lado (caso (i)), el triángulo tenía sólo una solución. Sin embargo, esto puede no ser cierto en todos los casos, como el (ii), donde conocemos dos lados y un ángulo opuesto a alguno de estos lados. Por ejemplo, supongamos que los lados b y c y el ángulo β del triángulo ABC se nos especifican. Como lo muestra la figura 70, dibujamos el ángulo β y el lado c para localizar los vértices A y B. El tercer vértice C se localiza en la base dibujando el arco de un círculo de radio b con centro A. Como lo ilustra la figura 71, hay cuatro resultados posibles para esta construcción:

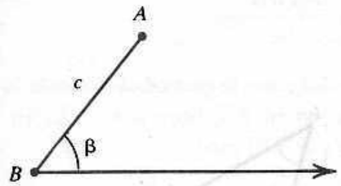


FIGURA 70

(a) El arco no interseca la base y no se forma ningún triángulo.
(b) El arco interseca la base en dos puntos distintos C_1 y C_2 y se forman dos triángulos.
(c) El arco interseca la base en un punto y se forma un triángulo.
(d) El arco es tangente a la base, y se forma un triángulo *rectángulo*.

Al existir esta variedad de posibilidades, el caso (ii) se denomina **caso ambiguo.** Los siguientes tres ejemplos ilustran resultados de dos soluciones, una solución, y de no solución para resultados de casos ambiguos.

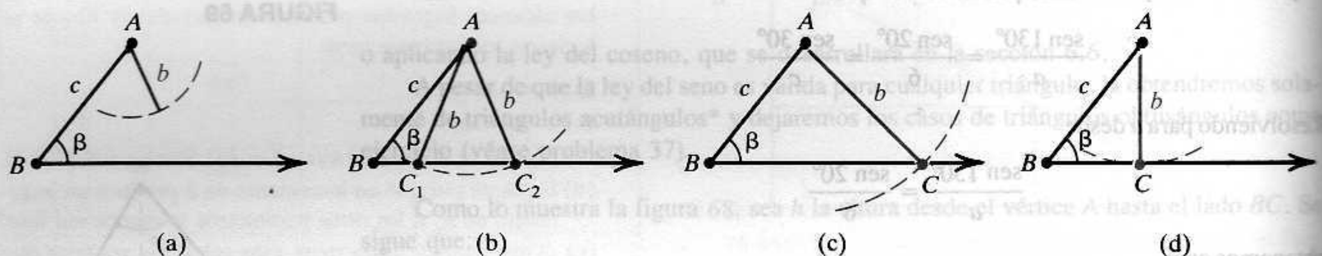


FIGURA 71

EJEMPLO 2

Encuentre las partes restantes de un triángulo con $\beta = 50°$, $b = 5$ y $c = 6$.

Solución. A partir de la ley del seno tenemos que:

$$\frac{\text{sen } 50°}{5} = \frac{\text{sen } \gamma}{6}$$

o
$$\text{sen } \gamma = 6\left(\frac{\text{sen } 50°}{5}\right) \approx 6\left(\frac{0.7660}{5}\right) \approx 0.9193$$

De una calculadora adaptada al modo de grados, obtenemos $\gamma \approx 66.82°$. En este punto de la solución es esencial recordar de la sección 6.4 que la función seno es positiva también para los ángulos del cuadrante II. Hay otro ángulo que satisface $0° \leq \gamma \leq 180°$ para el cual $\text{sen } \gamma \approx 0.9193$. Utilizando $66.82°$ como ángulo de referencia, encontramos el ángulo en el cuadrante II:

$$180° - 66.82° = 113.18°$$

Como consecuencia, las dos posibilidades para γ son:

$$\gamma_1 \approx 66.82° \quad \text{y} \quad \gamma_2 \approx 113.18°$$

Entonces, como lo muestra la figura 72, hay dos triángulos posibles: ABC_1 y ABC_2, que satisfacen las condiciones dadas.

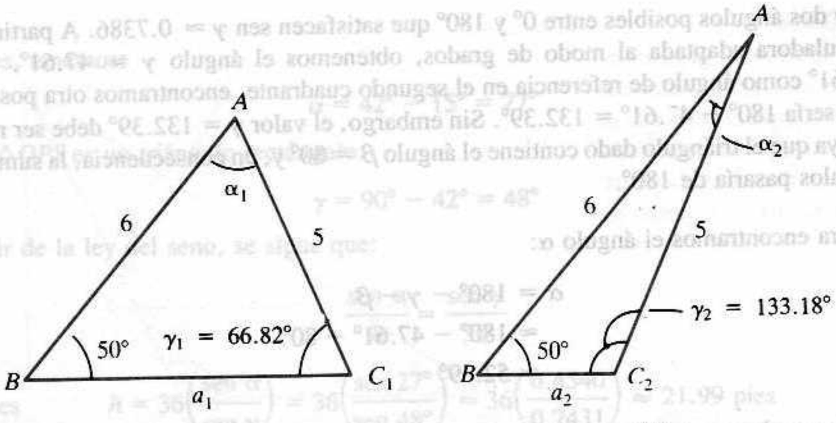


FIGURA 72 (a) (b)

Para completar la solución del triángulo ABC_1 que se muestra en la figura 72 (a), primero encontramos α_1:

$$\alpha_1 = 180° - \gamma_1 - \beta$$
$$\approx 180° - 66.82° - 50° = 63.18°$$

Para encontrar a_1, utilizamos

$$\frac{\text{sen } 63.18°}{a_1} = \frac{\text{sen } 50°}{5}$$

lo cual nos da

$$a_1 = 5\left(\frac{\text{sen } 63.18°}{\text{sen } 50°}\right) \approx 5\left(\frac{0.8925°}{0.7660}\right) \approx 5.83$$

Completamos la solución para el triángulo ABC_2 que se muestra en la figura 72 (b) de manera similar. Como $\gamma_2 \approx 113.18°$,

$$\alpha_2 \approx 180° - 113.18° - 50° = 16.82°$$

Encontramos a_2 a partir de la ley del seno:

$$\frac{\text{sen } 16.82°}{a_2} = \frac{\text{sen } 50°}{5}$$

$$a_2 = 5\left(\frac{\text{sen} 16.82°}{\text{sen } 50°}\right) \approx 5\left(\frac{0.2894}{0.7660}\right) \approx 1.89$$

EJEMPLO 3

Determine las partes restantes del triángulo de la figura 73.

Solución. Sea $\beta = 80°$, $b = 4$ y $c = 3$. A partir de la ley del seno, se sigue que,

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } 80°}{4} = \frac{\text{sen } \gamma}{3} \qquad \textbf{(12)}$$

y entonces,

$$\frac{\text{sen } 80°}{4} = \frac{\text{sen } \gamma}{3}$$

$$\text{sen } \gamma \approx \frac{3}{4}(0{,}9848) = 0{,}7386$$

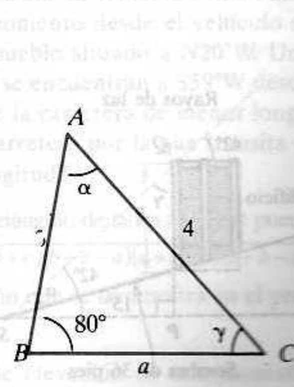


FIGURA 73

Hay dos ángulos posibles entre 0° y 180° que satisfacen sen $\gamma \approx 0.7386$. A partir de una calculadora adaptada al modo de grados, obtenemos el ángulo $\gamma \approx 47.61°$. Usando 47.61° como ángulo de referencia en el segundo cuadrante, encontramos otra posibilidad que sería $180° - 47.61° = 132.39°$. Sin embargo, el valor $\gamma = 132.39°$ debe ser rechazado, ya que el triángulo dado contiene el ángulo $\beta = 80°$ y, en consecuencia, la suma de los ángulos pasaría de 180°.

Ahora encontramos el ángulo α:

$$\begin{aligned}\alpha &= 180° - \gamma - \beta \\ &\approx 180° - 47.61° - 80° \\ &\approx 52.39°\end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en (12) tenemos:

$$\frac{\text{sen } 52.39°}{a} = \frac{\text{sen } 80°}{4}$$

o

$$a = 4\left(\frac{\text{sen } 52.39°}{\text{sen } 80°}\right) \approx 4\left(\frac{0.7922}{0.9848}\right) \approx 3.22$$

EJEMPLO 4

Encuentre las partes restantes del triángulo con $\gamma = 40°$, $b = 9$ y $c = 5$.

Solución. A partir de la ley del seno, tenemos que:

$$\frac{\text{sen } \beta}{9} = \frac{\text{sen } 40°}{5}$$

o

$$\text{sen } \beta = 9\left(\frac{\text{sen } 40°}{5}\right) \approx 9\left(\frac{0.6428}{5}\right) \approx 1.1570$$

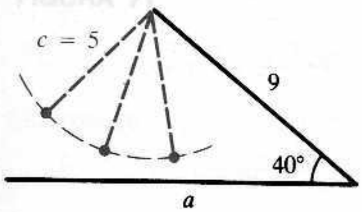


FIGURA 74

Sin embargo, sabemos que el seno de cualquier ángulo debe estar entre -1 y 1. Entonces, sen $\beta = 1.1570$ es imposible y, por tanto, este triángulo no tiene solución. Como lo muestra la figura 74, no hay solución porque el lado c no es lo suficientemente largo para alcanzar al lado a.

De los cuatro casos para resolver los triángulos que describimos en la página 311, sólo el caso ambiguo (ii) puede tener más de una solución y sólo los casos (ii) y (iii) pueden no tener solución. Para analizar mejor esto, véanse problemas 38 al 43.

EJEMPLO 5

Un edificio está situado en el lado de una colina con una pendiente de 15° de inclinación. El Sol está sobre el edificio con un ángulo de elevación de 42°. Encuentre la altura del edificio si éste proyecta una sombra de 36 pies de largo.

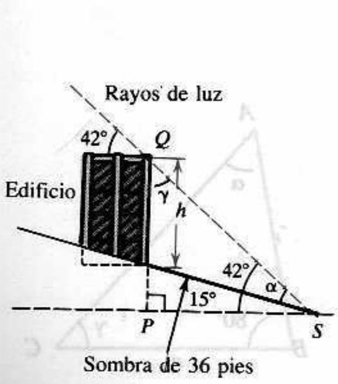


FIGURA 75

Solución. Sea h la altura del edificio que está sobre la pendiente y construya el triángulo rectángulo QPS como lo muestra la figura 75. Ahora

$$\alpha + 15° = 42°$$

entonces, tenemos:

$$\alpha = 42° - 15° = 27°$$

Como $\triangle QPS$ es un triángulo rectángulo.

$$\gamma = 90° - 42° = 48°$$

A partir de la ley del seno, se sigue que:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{h} = \frac{\text{sen } \gamma}{36}$$

entonces $$h = 36\left(\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma}\right) = 36\left(\frac{\text{sen } 27°}{\text{sen } 48°}\right) \approx 36\left(\frac{0.4540}{0.7431}\right) \approx 21.99 \text{ pies}$$

EJERCICIO 6.5

En los problemas 1 al 26, resuelva el triángulo indicado teniendo en cuenta la posición relativa de α, β, γ, a, b y c que se muestra en la figura 76.

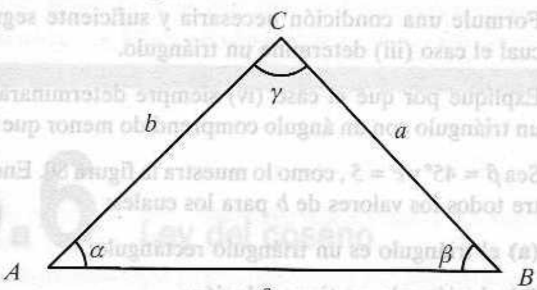


FIGURA 76

1. $\alpha = 80°, \gamma = 80°, c = 7$ **2.** $\beta = 60°, \gamma = 15°, a = 30$

3. $\alpha = 38°, \beta = 53°, b = 6$ **4.** $\alpha = 18°, \gamma = 32.5°, c = 35$

5. $\alpha = 72°, a = 12, b = 6$ **6.** $\beta = 150°, b = 50, c = 8$

7. $\beta = 62°, a = 7, b = 4$ **8.** $\alpha = 100°, \gamma = 20°, b = 16$

9. $\alpha = 20°, b = 9, c = 4$ **10.** $\beta = 65°, b = 10, c = 12$

11. $\alpha = 120°, a = 40, b = 10$ **12.** $\beta = 130°, \gamma = 28°, c = 9$

13. $\alpha = 13° 12', \beta = 102°, c = 9$ **14.** $\beta = 125°, b = 15, c = 10$

15. $\gamma = 15°, a = 12, c = 8$ **16.** $\gamma = 57° 12', a = 18, b = 10$

17. $\beta = 60°, a = 15, b = 10$ **18.** $\beta = 135°, \gamma = 18°, a = 12$

19. $\gamma = 70°, b = 6, c = 10$ **20.** $\alpha = 42°, \beta = 63°, c = 9$

21. $\alpha = 112°, a = 7, b = 18$ **22.** $\gamma = 33°, a = 8, c = 10$

23. $\alpha = 125°, a = 30, b = 16$ **24.** $\beta = 55°, a = 12, b = 18$

25. $\gamma = 105°, a = 15, c = 40$ **26.** $\alpha = 38.5°, a = 12, c = 16$

27. Dos salvavidas se encuentran en la orilla de una playa a una distancia uno del otro de 1.5 km en los puntos A y B, y divisan un bote que se está hundiendo situado en el punto C. Si el salvavidas en A mide un ángulo CAB igual a 79.3° y el que está en B mide un ángulo CBA igual a 43.6°, ¿a qué distancia está el bote de cada salvavidas? ¿A qué distancia está el bote de la costa?

28. Una persona situada en un punto A se dirige en línea recta hacia un punto C. Otra persona hace lo mismo desde un punto B. Si la distancia entre A y B es de 8 km, el ángulo CAB es de 75° y el ángulo CBA es de 45°, ¿qué distancia tendrá que recorrer cada persona?

29. Dos puntos A y B están cada uno en los lados opuestos de un río. Otro punto C se localiza en el mismo lado que B a una distancia de 250 metros de B. Si el ángulo ABC es de 110° y el ángulo ACB es de 18°, encuentre la distancia a lo largo del río entre A y B.

30. Un poste forma un ángulo de 85° con el piso. El ángulo de elevación del Sol es de 70°. Encuentre la longitud del poste si su sombra es de 5.8 m.

31. Por una carretera recta transita un vehículo rumbo norte a 80 km/h. En cierto momento desde el vehículo se observan las luces de un pueblo situado a N20°W. Una hora más tarde estas luces se encuentran a S59°W desde el vehículo. Si se construye la carretera de menor longitud desde el pueblo a la carretera por la que transita el vehículo, ¿cuál será su longitud?

[*Sugerencia*: el área A de un triángulo de lados a, b, c se puede hallar mediante $A = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$ llamada la fórmula de Herón que se demuestra en el problema 29 de 6.6].

32. Si medimos los ángulos de elevación de una montaña desde lo más alto y desde la base de una torre de 20 metros de alto y éstos son 38.5 y 40.2 respectivamente, ¿cuál es la altura de la montaña?

33. Un hombre de 5 pies y 9 pulgadas de altura se para en un andén que se inclina hacia abajo con un ángulo constante. Un poste vertical de luz situado directamente detrás de él proyecta una sombra de 18 pies de largo. El ángulo de depresión desde la mayor altura del hombre hasta la punta de su sombra es de 31°. Encuentre el ángulo α, como se muestra en la figura 77, formado por el andén y la horizontal.

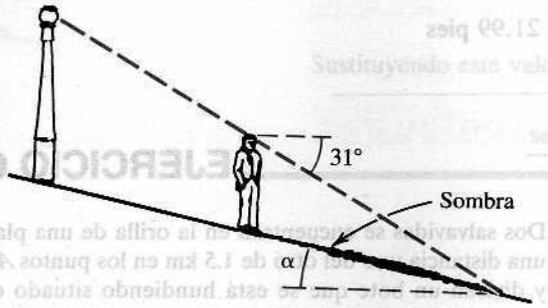


FIGURA 77

34. Si el hombre del problema 33 está a 22 pies del poste de luz sobre el andén, encuentre la altura del poste.

35. La distancia entre la meta y un hoyo particular de golf es de 380 yardas. Un golfista le pega a la pelota y la coloca a 215 yardas. Desde el punto donde está la pelota ella mide un ángulo de 165° entre la meta y el hoyo. (Véase figura 78.) Encuentre el ángulo de su lanzamiento.

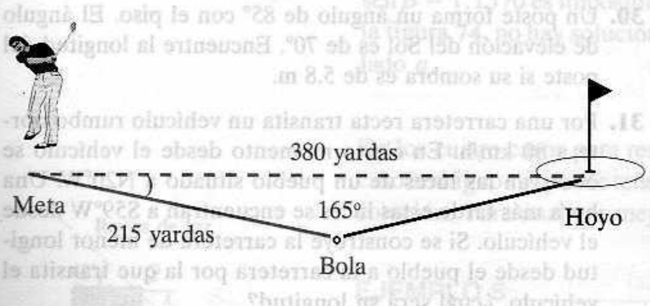


FIGURA 78

36. En el problema 35, ¿cuál es la distancia entre la bola y el hoyo?

37. Derive la ley del seno para un triángulo con un ángulo obtuso como lo muestra la figura 79.

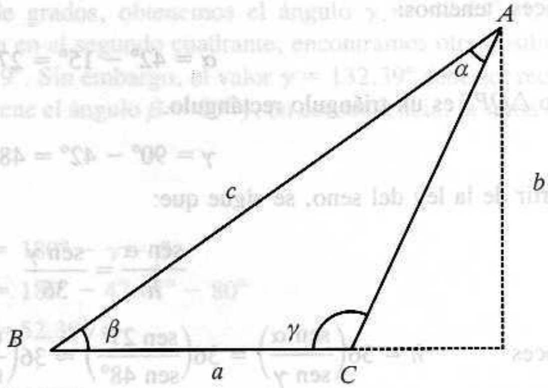


FIGURA 79

Los problemas 38 al 43 se refieren a los cuatro casos descritos en la página 311.

38. Explique por qué sólo un triángulo es determinado, si la suma de los dos ángulos en el caso (i) es menor que 180°.

39. Formule una condición necesaria y suficiente según la cual el caso (iii) determine un triángulo.

40. Explique por qué el caso (iv) siempre determinará sólo un triángulo con un ángulo comprendido menor que 180°.

41. Sea $\beta = 45°$ y $c = 5$, como lo muestra la figura 80. Encuentre todos los valores de b para los cuales:

(a) el triángulo es un triángulo rectángulo;

(b) el triángulo no tiene solución;

(c) el triángulo tiene dos soluciones distintas;

(d) el triángulo tiene una sola solución.

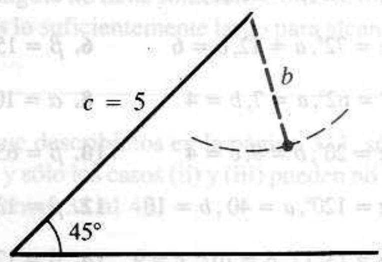


FIGURA 80

42. Sea $0° < \beta < 90°$ y suponga que c se conoce (véase figura 81). Encuentre todos los valores de b para los cuales:

(a) el triángulo es un triángulo rectángulo;

(b) el triángulo no tiene solución;

(c) el triángulo tiene dos soluciones distintas;

(d) el triángulo tiene una sola solución.

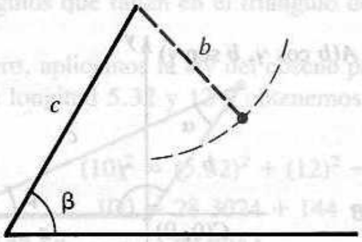


FIGURA 81

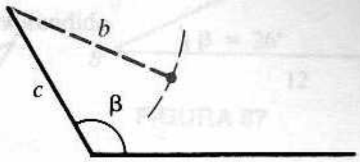


FIGURA 82

43. Sea $90° < \beta < 180°$ y suponga que c se conoce (véase figura 82). Encuentre todos los valores de b para los cuales:

(a) el triángulo no tiene solución;

(b) el triángulo tiene una sola solución.

44. Encuentre el perímetro de un pentágono regular inscrito dentro de una circunferencia de radio r.

6.6 Ley del coseno

En un triángulo rectángulo, como el que se muestra en la figura 83, las longitudes de los lados están relacionadas por el teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{13}$$

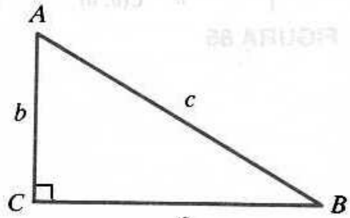


FIGURA 83

Esta ecuación es un caso especial de una fórmula general que relaciona las longitudes de los lados de *cualquier* triángulo. Esta generalización, llamada **ley del coseno**, nos permite resolver triángulos de los cuales conocemos o bien tres lados, o dos lados y el ángulo comprendido.

UNA GENERALIZACION DEL TEOREMA DE PITAGORAS

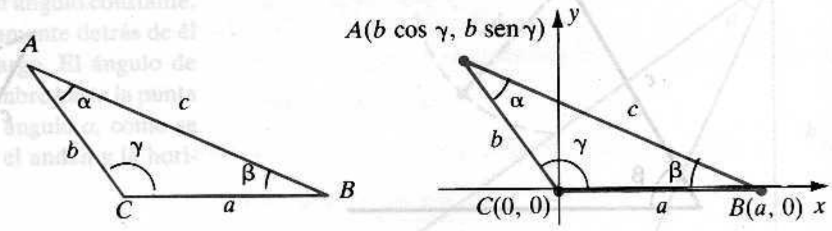
Suponga que el triángulo de la figura 84(a) representa un triángulo cualquiera que no es necesariamente rectángulo. Si introducimos un sistema de coordenadas cartesianas con origen y eje x, como lo muestra la figura 84(b), entonces las coordenadas de los vértices A, B y C son como aparecen. Ahora, mediante la fórmula de la distancia, la longitud del lado opuesto al ángulo γ es:

$$c = \sqrt{(b \cos \gamma - a)^2 + (b \operatorname{sen} \gamma)^2}$$

Así,

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 \cos^2 \gamma - 2ab \cos \gamma + a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \gamma \\ &= a^2 + b^2 \underbrace{(\cos^2 \gamma + \operatorname{sen}^2 \gamma)}_{1} - 2ab \cos \gamma \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned} \tag{14}$$

Note que la ecuación (14) se convierte en (13) cuando el ángulo γ es de 90°.



(a) (b)

FIGURA 84

Como poner el origen en el vértice C del ángulo γ, no tiene nada de especial, podemos usar el argumento anterior dos veces más. Por ejemplo, si hubiéramos escogido el origen en el vértice A, y puesto el eje x a lo largo del lado AC (véase figura 85), habría pasado exactamente lo mismo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \tag{15}$$

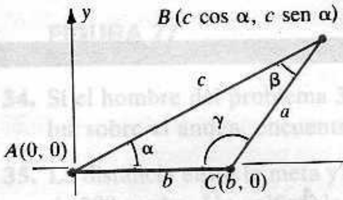


FIGURA 85

Mediante un argumento similar, podemos expresar b en términos de a, c y cos β. En general, para cualquier triángulo por el estilo del que se muestra en la figura 84(a), tenemos que:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned} \tag{16}$$

Las ecuaciones anteriores se conocen como **ley de los cosenos.**

Hemos notado que los resultados en (16) pueden expresarse de la siguiente manera:

Ley de los cosenos

El cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos dos veces el producto de estas longitudes y el coseno del ángulo comprendido.

Usted está urgido de aprender y trabajar la ley de los cosenos como se ha determinado anteriormente, en vez de memorizar las tres fórmulas que se dieron en (16).

EJEMPLO 1

Determine el lado restante del triángulo que se muestra en la figura 86.

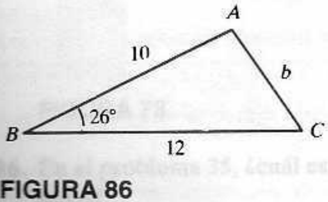


FIGURA 86

Solución. Si denominamos el lado desconocido b, entonces, a partir de la ley de los cosenos, podemos escribir:

$$\begin{aligned} b^2 &= (10)^2 + (12)^2 - 2(10)(12) \cos 26° \\ &\approx 100 + 144 - 240(0.8988) \\ &\approx 244 - 215.7106 = 28.2894 \end{aligned}$$

y, por tanto, $$b \approx \sqrt{28.2894} \approx 5.32$$

EJEMPLO 2

Determine los ángulos que faltan en el triángulo del ejemplo anterior (véase figura 87).

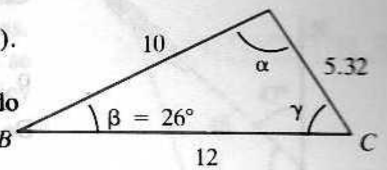


FIGURA 87

Solución. Primero, aplicamos la ley del coseno para el ángulo γ que está comprendido entre los lados de longitud 5.32 y 12 y obtenemos:

$$(10)^2 = (5.32)^2 + (12)^2 - 2(5.32)(12)\cos\gamma$$
$$100 = 28.3024 + 144 - 127.68\cos\gamma$$
$$127.68\cos\gamma = 72.3024$$
$$\cos\gamma = \frac{72.3024}{127.68} \approx 0.5663$$

Utilizando una calculadora, encontramos que:

$$\gamma \approx 55.51°$$

Ya que el coseno de un ángulo entre 90° y 180° es negativo, *no hay ninguna necesidad de considerar dos posibilidades* en este caso, como lo hicimos en la sección previa cuando usamos la función seno. Finalmente, de $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, se sigue que:

$$\alpha \approx 180° - 55.51° - 26°$$
$$= 180° - 81.51°$$
$$= 98.49°$$

Alternativamente, como conocemos dos lados y un ángulo opuesto a uno de estos lados, habríamos podido aplicar la ley de los senos para encontrar γ. Aún más, si hubiéramos usado la ley de los senos, no habría existido ninguna ambigüedad acerca de si γ era agudo u obtuso. Recuerde de la geometría que un triángulo puede tener máximo un ángulo obtuso y que, si hay uno, debe ser opuesto al lado más largo. Como γ no es opuesto al lado más largo de este triángulo, entonces γ debe ser agudo.

Como lo indicamos en la sección 6.5, un triángulo del cual sepamos o bien dos lados y el ángulo comprendido, o tres lados, no se puede resolver usando la ley de los senos. Los anteriores ejemplos nos ilustraron cómo resolver el primer tipo de triángulo mediante la ley de los cosenos. En el siguiente ejemplo consideraremos el caso en el cual nos dan los tres lados.

EJEMPLO 3

Determine los ángulos del triángulo ABC que se muestra en la figura 88 con lados de longitudes 7, 6 y 9, respectivamente.

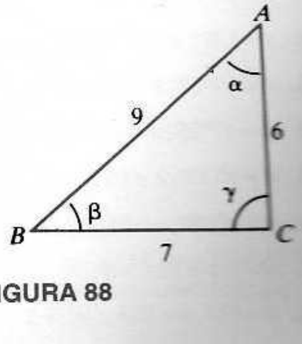


FIGURA 88

Solución. Utilizando la ley de los cosenos para encontrar el ángulo opuesto al lado más largo, inmediatamente veremos si el triángulo contiene un ángulo obtuso. Así, resolvemos γ a partir de

$$9^2 = 6^2 + 7^2 - 2(6)(7)\cos\gamma$$

Combinando y reordenando los términos, tenemos:

$$84 \cos \gamma = 4$$

o

$$\cos \gamma = \tfrac{4}{84}$$

De una calculadora encontramos que:

$$\gamma \approx 87.27°$$

Ahora podemos utilizar la ley del seno o la del coseno para encontrar otro ángulo. Para encontrar β escogimos la ley del seno:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

Sustituyendo 6 por b, 9 por c y 87.27° por γ (recuerde que para mayor exactitud debe trabajar con el valor real obtenido por su calculadora para γ y no con el valor redondeado 87.27°), encontramos que:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{6} = \frac{\operatorname{sen} 87.27°}{9}$$

o

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{6}{9}\operatorname{sen}(87.27°) \approx 0.6659$$

Puesto que β *no* es el ángulo mayor del triángulo, debe ser agudo. Por tanto, $\beta \approx 41.75°$. Finalmente,

$$\alpha \approx 180° - 87.27° - 41.75° = 50.98°$$

ORIENTACION

En navegación, la dirección se da usando orientadores. Un **orientador** marca el ángulo agudo que forma una recta con la recta norte-sur. Por ejemplo, la figura 89 (a) ilustra una orientación de S40°W, que significa sur 40 grados oeste; las orientaciones de las figuras 89 (b) y (c) son N65°E y S80°E, respectivamente.

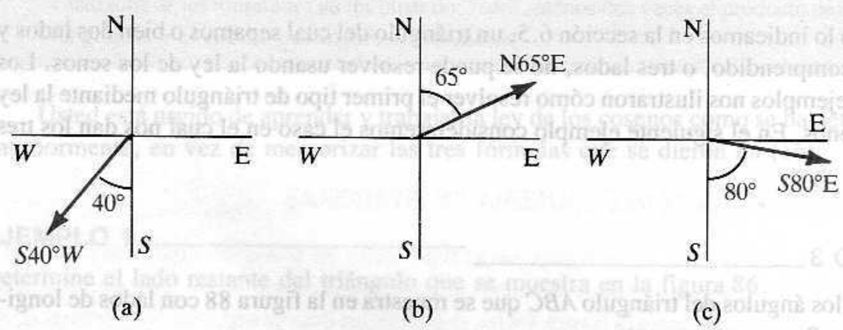


FIGURA 89

EJEMPLO 4

Dos barcos parten de un puerto a las 7:00 a.m., uno viaja a 12 nudos (millas náuticas por hora) y el otro a 10 nudos. Si el barco más rápido mantiene una orientación de N47° W y el otro barco mantiene una orientación de S20° W, ¿cuál es su separación (a la milla náutica más cercana) a las 11:00 a.m. de ese mismo día?

Solución. Como el tiempo transcurrido es de 4 horas, el barco más rápido ha viajado $4 \cdot 12 = 48$ millas náuticas del puerto y el barco más lento $4 \cdot 10 = 40$ millas náuticas. Usando estas distancias y las orientaciones dadas, podemos dibujar el triángulo que se muestra en la figura 90. Sea c = la distancia que separa los barcos a las 11:00 a.m., por la ley del coseno, obtenemos

$$c^2 = 48^2 + 40^2 - 2(48)(40) \cos \gamma$$

Como $\gamma = 180° - 47° - 20° = 113°$, encontramos que:

$$c^2 = 2{,}304 + 1{,}600 - 3{,}840 \cos 113° \approx 5{,}404.41$$

o

$$c \approx 73.51$$

Entonces la distancia entre ellos (a la milla náutica más cercana) es 74 millas náuticas.

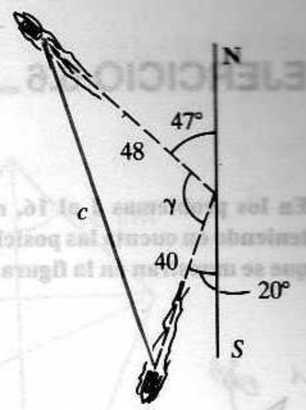


FIGURA 90

Cuando un problema requiere que se resuelva un triángulo, es importante determinar primero la técnica que se va a usar. La siguiente tabla resume los varios tipos de problemas y proporciona una guía correcta para cada uno de ellos. (Los términos **triángulo oblicuángulo** se refieren a cualquier triángulo que no sea rectángulo).

RESOLUCION DE TRIANGULOS

TIPO DE TRIANGULO	INFORMACION DADA	TECNICA
Rectángulo	Dos lados o un ángulo y un lado	Definiciones básicas para seno, coseno o tangente; el teorema de Pitágoras
Oblicuángulo	Tres lados	La ley del coseno
Oblicuángulo	Dos lados y el ángulo comprendido	La ley del coseno
Oblicuángulo	Dos ángulos y un lado	La ley del seno
Oblicuángulo	Dos lados y un ángulo opuesto a alguno de los lados	La ley del seno (si el ángulo dado es agudo es un problema de caso ambiguo)

Nota de advertencia

(i) Cuando nos dan tres lados, si la longitud del lado más largo es mayor o igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados, no hay solución. (Esto se debe a que la distancia más corta entre dos puntos es la longitud del segmento de la línea que los une).

(ii) Al aplicar la ley del seno, si usted obtiene un valor mayor que 1 para el seno de un ángulo, no hay solución.

(iii) En el caso ambiguo, al resolver el primer ángulo desconocido, usted debe considerar *el ángulo agudo que encontró con su calculadora y el ángulo suplementario, como posibles soluciones*. El suplementario será una solución, si la suma del suplementario y el ángulo dado es menor que 180°.

EJERCICIO 6.6

En los problemas 1 al 16, resuelva el triángulo indicado teniendo en cuenta las posiciones relativas de α, β, γ, a, b y c que se muestran en la figura 91.

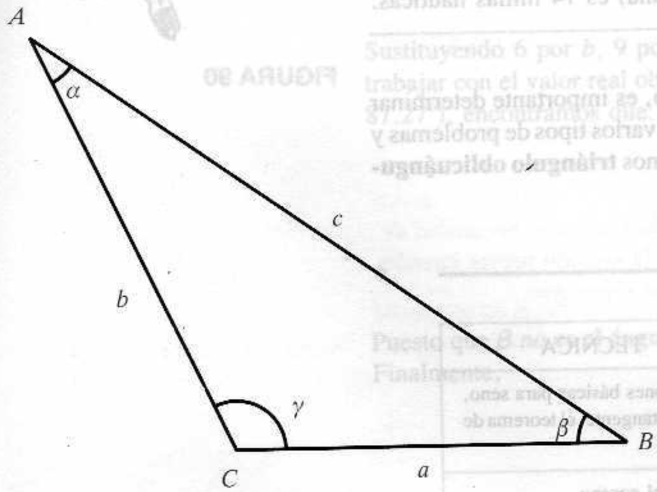


FIGURA 91

1. $\alpha = 60°, b = 14, c = 10$
2. $\alpha = 75°, b = 7, c = 12$
3. $\beta = 120°, a = 8, c = 10$
4. $\beta = 85°, a = 4, c = 6$
5. $a = 7, b = 5, c = 6$
6. $a = 3, b = 6, c = 12$
7. $a = 19.1, b = 12.2, c = 23.8$
8. $a = 11.5, b = 7.8, c = 14.08$
9. $\gamma = 22°, a = 9, b = 3$
10. $\gamma = 130°, a = 9, b = 13$
11. $\alpha = 97°15', b = 3, c = 6$
12. $\beta = 87°25', a = 5, c = 7$
13. $\gamma = 45.25°, a = 10, b = 14$
14. $\gamma = 37.35°, a = 11, b = 15$
15. $a = 6, b = 12, c = 8$
16. $a = 13.5, b = 18.6, c = 25.2$

17. Un terreno triangular tiene lados de longitud 35, 40 y 60 metros respectivamente. Encuentre el ángulo interior más grande del triángulo.

18. Un rombo tiene lados de 12 cm de longitud. Si el ángulo de uno de sus vértices es 55°, encuentre las longitudes de las diagonales.

19. Dos barcos parten del mismo puerto a las 8 a.m. Uno de ellos parte hacia el norte a 6 millas náuticas por hora y el otro al N68°E a 8 millas náuticas por hora. ¿Cuál es la distancia entre ellos a las 11 a.m.?

20. Dos barcos parten de un puerto al mismo tiempo, uno navegando a 16 nudos y el otro a 14 nudos. Mantienen orientaciones S48°W y S15°E respectivamente. Después de 3 horas el primer barco se vara y el segundo recurre inmediatamente en su auxilio.

    (a) ¿Cuánto demorará el segundo barco en alcanzar al primero si aumenta la velocidad y viaja a 18 nudos?

    (b) ¿Qué rumbo debe tomar?

21. Dos autos parten de la intersección de dos carreteras rectas y viajan a lo largo de ella a 80 km/h y 100 km/h respectivamente. Si el ángulo de intersección de las carreteras es 80°, ¿qué tan separados están los automóviles al cabo de 45 minutos?

22. Las manecillas de un reloj tienen 4 y 5 centímetros de largo respectivamente. A cierta hora las puntas de las manecillas se encuentran separadas 8 cm. Si se conoce que la hora es después de la 1.45 p.m. y antes de las 2 p.m., ¿qué hora es?

23. Un brazo robot de dos dimensiones "sabe" dónde se encuentra guiado por el rastro de un ángulo "hombro" α y de un ángulo "codo" β. Como lo muestra la figura 92, este brazo tiene un punto fijo de rotación en su origen, situado en el origen de coordenadas. El ángulo del hombro se mide en dirección contraria a la de las manecillas del reloj desde el semieje ox positivo, y el ángulo del codo se mide en dirección contraria a las manecillas del reloj desde la parte posterior del brazo hasta la parte inferior. Suponga que el ángulo del codo β está diseñado contra una "hiperextensión" más allá de 180°. Si las partes posterior e inferior del brazo miden 8 pulgadas cada una, ¿cuáles ángulos α y β colocarían la mano del brazo robot en el punto (2, 4)?

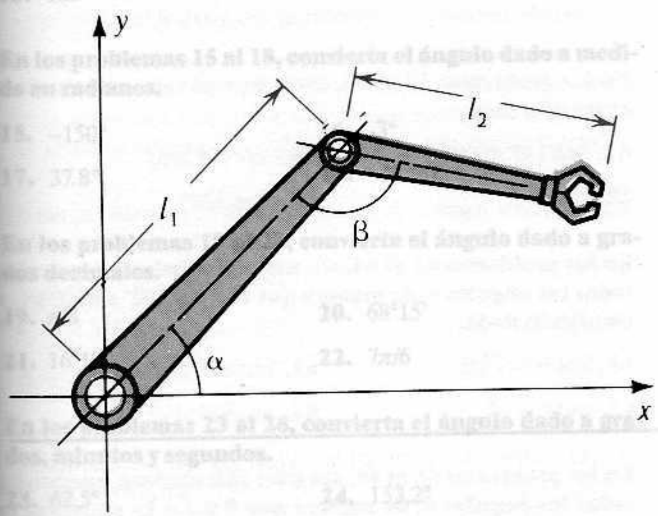


FIGURA 92

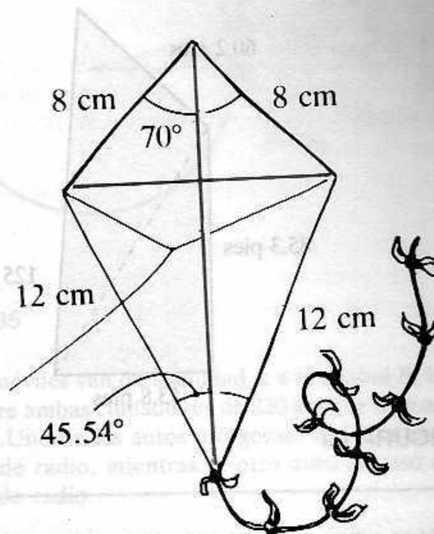


FIGURA 93

24. Las boyas A, B y C marcan los vértices de una pista triangular en una laguna. La distancia entre las boyas A y B es de 1,200 metros, la distancia entre las boyas A y C es de 900 metros y el CAB es 110°. Si el bote ganador de la carrera recorrió la pista en 8.2 minutos, ¿cuál fue su velocidad promedio?

25. Dos estaciones de radar se sitúan a 3.5 km la una de la otra. Un helicóptero pasa directamente sobre la línea entre las dos estaciones. En ese instante la distancia entre las estaciones y el helicóptero es de 1.8 km y 2.5 km. Encuentre la altitud del helicóptero.

26. Dos puestos de infantería A y B están situados a 3 km uno del otro. Una artillería antitanque se encuentra en C detrás de la línea de los puestos de infantería a 1.5 km de A y a 2 km de B. Usando la línea AB de referencia los puestos de infantería reportan un tanque enemigo a 82° del puesto A y 40° del puesto B. ¿A qué ángulo, medido desde CA, debe disparar en tiro directo la artillería antitanque? ¿Cuál será la distancia recorrida por el proyectil?

27. Para la cometa que se muestra en la figura 93 encuentre la longitud de cada vara de alineación requerida para los soportes diagonales.

28. Un techo inclinado forma un ángulo de 37° con la horizontal y mide 30 pies de la base hasta la punta. Una antena de televisión de 18 pies de altura se pegará a la punta del techo, asegurada por un cable recto desde la punta de la antena hasta el punto más cercano de la base del techo. Encuentre el largo del cable que necesita.

29. Use la ley del coseno para obtener la "fórmula de Herón"

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

para el área del triángulo con lados a, b, c donde s = 1/2 (a + b + c).

En los problemas 30 al 33 use el problema 29 para encontrar el área del triángulo dado.

30. $a = 4$ $b = 6$ $c = 8$

31. $a = 13$ $b = 12$ $c = 5$

32. $\gamma = 97°20'$ $a = 3$ $b = 6$

33. $\beta = 22°$ $a = 3$ $c = 13$

34. Auxíliese del procedimiento de los problemas 30 al 33 para encontrar la longitud h de la altura más corta del triángulo con lados $a = 13$, $b = 12$, $c = 5$.

35. Encuentre el área del terreno de esquinas irregulares que se muestra en la figura 94.

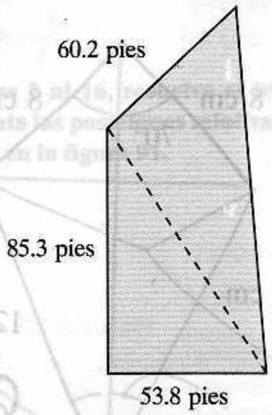


FIGURA 94

36. Use la *fórmula de Herón* para encontrar el área de un triángulo con vértices localizados (2, 3), (–1, 4) y (0, 2) en un sistema rectangular de coordenadas.

CONCEPTOS IMPORTANTES

- Angulo
  - lado inicial
  - lado terminal
  - posición normal
  - ángulos coterminales
  - ángulo recto
  - ángulo plano
  - ángulo agudo
  - ángulo obtuso
  - ángulos complementarios
  - ángulos suplementarios
  - ángulo de cuadrante
- Medida de un ángulo
  - grado
  - minutos
  - segundos
  - radián
- Angulo central
- Sector
- Longitud del arco
- Funciones trigonométricas
  - seno
  - coseno
  - tangente
  - cotangente
  - secante
  - cosecante
- Identidades fundamentales
  - identidades de cociente
  - identidades recíprocas
  - identidades pitagóricas
- Resolver un triángulo
- Angulo de elevación
- Angulo de depresión
- Angulo de referencia
- Ley del seno
  - caso ambiguo
- Ley del coseno

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 10, llene el espacio o indique si es verdadero o falso.

1. Un ángulo que tiene medida positiva se formó mediante una rotación en el sentido de las manecillas del reloj. ___

2. Si $\alpha - \beta = 5\pi$, entonces α y β son coterminales. ___

3. $\sec\theta = 1/\operatorname{sen}\theta$. ___

4. $\cos\pi/6 = \operatorname{sen}\pi/3$. ___

5. Para resolver un triángulo rectángulo del cual se conozcan el lado opuesto a θ y la hipotenusa, se usa la función ___________ para encontrar θ.

6. El ángulo de referencia para $5\pi/3$ es ___.

7. Para resolver un triángulo del cual se conocen dos ángulos y un lado, se aplica la ley de________.

8. El caso ambiguo se refiere a la solución de un triángulo cuando se conoce ___.

9. Para resolver un triángulo del cual se conocen dos lados y el ángulo incluido se aplica la ley de___________.

10. El teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de ________.

En los problemas 11 al 14, dibuje el ángulo dado en posición estándar.

11. $-5\pi/4$ **12.** $8\pi/3$

13. 165° **14.** −330°

En los problemas 15 al 18, convierta el ángulo dado a medida en radianes.

15. −150° **16.** 3°

17. 37.8° **18.** 18°20'

En los problemas 19 al 22, convierta el ángulo dado a grados decimales.

19. $\pi/8$ **20.** 68°15'

21. 16°12' **22.** $7\pi/6$

En los problemas 23 al 26, convierta el ángulo dado a grados, minutos y segundos.

23. 62.5° **24.** 153.2°

25. 2.3 **26.** $\pi/12$

En los problemas 27 y 28, encuentre dos ángulos positivos y dos negativos que sean coterminales en el ángulo dado.

27. 78° **28.** $9\pi/5$

29. ¿Cuál es la longitud del arco de una circunferencia de radio 25 cm subtendido por un ángulo central de:

(a) 1°

(b) 36°

30. Un ventilador de 12 pulgadas de radio da vueltas a una razón constante de 950 revoluciones por minuto. Encuentre su velocidad angular en radianes por segundo. Determine la velocidad lineal de la punta de una de sus cuchillas en pulgadas por segundo.

31. Hacia el año 230 a. de C., Eratóstenes calculó la circunferencia de la Tierra a partir de las siguientes observaciones: al mediodía, durante el día más largo del año, el Sol estaba justo sobre Asuán, mientras que estaba inclinado 7.2° de la vertical de Alejandría. Él asumió que las dos ciudades estaban en la misma línea longitudinal y que los rayos del Sol eran paralelos. Así concluyó que el arco entre Asuán y Alejandría era subtendido por un ángulo central de 7.2°, en el centro de la Tierra (véase figura 95). En este tiempo, la distancia entre Asuán y Alejandría era de 5,000 estadios. Si un estadio = 559 pies, encuentre la circunferencia de la Tierra en:

(a) estadios y

(b) millas.

Demuestre que los datos de Eratóstenes dan un resultado dentro de 7% del valor correcto si el diámetro polar de la Tierra es de 7,900 millas (a la milla más cercana).

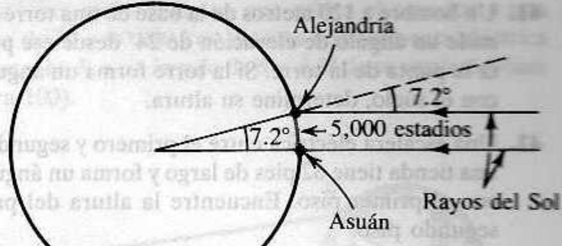


FIGURA 95

32. Dos automóviles van de la ciudad A a la ciudad B; la distancia entre ambas ciudades es de 220 km y se demoraron 2.5 horas. Uno de los autos usó gomas con llantas de 13 pulgadas de radio, mientras el otro auto las usó de 15 pulgadas de radio.

(a) ¿Cuántas revoluciones por segundo como promedio dieron las gomas de cada uno de los autos?

(b) ¿Cuál fue la velocidad angular en cada caso?

(c) ¿Cuál fue la velocidad lineal de un punto de la circunferencia del radio de la llanta en cada caso?

En los problemas 33 al 38, resuelva el triángulo de la figura 96 usando la información dada.

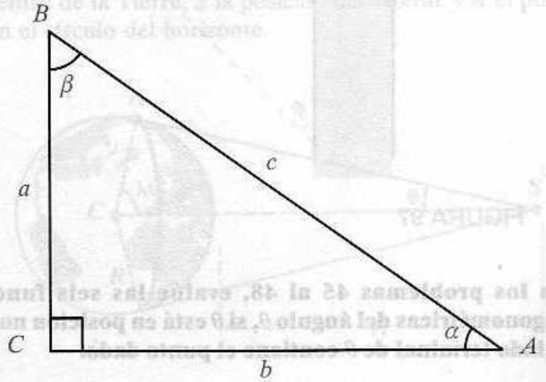


FIGURA 96

33. $a = 30, c = 50$ **34.** $a = 27, \alpha = 32.5°$

35. $b = 40, \alpha = 35°$ **36.** $b = 32, \beta = 28.5°$

37. $c = 8, \beta = 40°\ 30'$ **38.** $a = 38.7, \beta = 68°25'$

39. Determine los ángulos del triángulo con vértices (2, 4), (6, 4) y (6, 1).

40. Un bateador le da a la pelota con un bate a una altura del terreno de 2 pies y con un ángulo de elevación respecto a la horizontal de 38°. Si la pelota choca con un ave que volaba a una altura de 80 pies, ¿cuál es la distancia del *home* al punto del terreno directamente debajo de donde chocó la pelota con el ave?

41. Un hombre a 120 metros de la base de una torre inclinada mide un ángulo de elevación de 24° desde ese punto hasta la punta de la torre. Si la torre forma un ángulo de 72° con el suelo, determine su altura.

42. Una escalera eléctrica entre el primero y segundo piso de una tienda tiene 62 pies de largo y forma un ángulo de 22° con el primer piso. Encuentre la altura del primero al segundo piso.

43. En 1972 un helicóptero francés alcanzó una altura récord de 12,442 m. ¿Cuál sería el ángulo de elevación entre un puesto de observación y el helicóptero, si el puesto de observación estaba a nivel del suelo y a 1.5 km del punto del suelo exactamente debajo del helicóptero?

44. Dos carreteras rectas y planas se cruzan perpendicularmente. Una unidad de artillería está situada a 10 km del punto de intersección. Si los proyectiles que ella lanza en tiro directo viajan a una velocidad de 25 m/s, ¿cuál debe ser el ángulo ϕ en el que debe lanzar el proyectil respecto a la carretera en que está situada, para que dé impacto en tiro directo con un blanco que viaja a 60 km/h por la otra carretera, si dispara en el momento en que el blanco pasa por el punto de intersección de ambas carreteras?

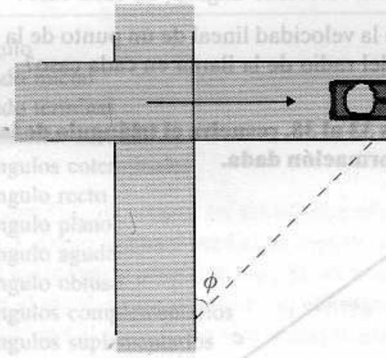


FIGURA 97

En los problemas 45 al 48, evalúe las seis funciones trigonométricas del ángulo θ, si θ está en posición normal y el lado terminal de θ contiene el punto dado.

45. $(1, -2)$ **46.** $(7, 4)$

47. $(-0.3, -0.5)$ **48.** $(\sqrt{5}, \sqrt{2})$

En los problemas 49 al 54 se da el valor de una de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo θ. Teniendo en cuenta este valor y la información adicional, determine el valor de las cinco funciones trigonométricas restantes para θ.

49. $\operatorname{sen}\theta = -1/7$, θ está en el cuadrante IV.

50. $\tan\theta = -5$, θ está en el cuadrante II.

51. $\cos\theta = 2/3$, θ está en el cuadrante IV.

52. $\csc\theta = 15$, $\operatorname{sen}\theta < 0$

53. $\sec\theta = -7$, $\tan\theta > 0$

54. $\cot\theta = 1/9$, $\sec\theta < 0$

55. Si $\tan\theta = -4$, encuentre todos los posibles valores de las demás funciones trigonométricas para θ.

56. Si $3\operatorname{sen}\theta = 4\cos\theta$, encuentre los posibles valores de las demás funciones trigonométricas para θ.

En los problemas 57 al 60, encuentre el valor exacto de la expresión dada.

57. $\operatorname{sen}(-5\pi/3)$ **58.** $\csc(11\pi/6)$

59. $\tan 405°$ **60.** $\cos 330°$

En los problemas 61 al 64, sin usar calculadora, encuentre todos los ángulos θ, de manera que $0° \le \theta \le 360°$ satisfaga la condición dada.

61. $\cos\theta = \sqrt{2}/2$ **62.** $\cot\theta = \sqrt{3}/3$

63. $\csc\theta = -2$ **64.** $\sec\theta = -\sqrt{2}$

En los problemas 65 al 68, sin usar calculadora, encuentre todos los ángulos θ, de manera que $0 \le \theta < 2\pi$ satisfaga la condición dada.

65. $\cos\theta = \sqrt{3}/2$ **66.** $\sec\theta = -1$

67. $\tan\theta = -1$ **68.** $\operatorname{sen}\theta = ½$

En los problemas 69 al 72, resuelva el triángulo que satisfaga las condiciones dadas.

69. $\alpha = 40°, \beta = 55°, b = 12$

70. $\gamma = 130°, a = 15, b = 10$

71. $\beta = 60°, b = 5, c = 8$

72. $\beta = 110°, \gamma = 25°, b = 40$

73. El ángulo entre dos lados de un paralelogramo es de 70°. Si las longitudes de los lados son 6 cm y 12 cm, encuentre las longitudes de las diagonales.

74. Cuando se tira una piedra sobre el agua, dependiendo de cómo se tire vemos que la piedra rebota varias veces antes de hundirse. Halle la distancia total recorrida por una piedra antes de comenzar a hundirse en el agua si la línea roja en la figura 98 describe el movimiento de la piedra.

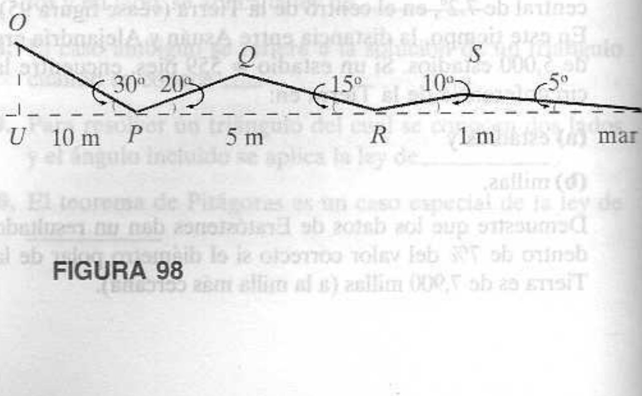


FIGURA 98

75. Un buque de la guardia costera se localiza a 6 millas náuticas al este de otro buque costero en el momento que se recibe una llamada de auxilio de un bote. Para socorrerlo, el primer buque navega con rumbo N50°W a 10 nudos y el segundo navega N40°E a 7 nudos, ¿cuál de ellos llegará primero al bote? ¿En qué tiempo?

76. Desde las torres de vigilancia de dos salvavidas se ve un bote con rumbos de N56°E y N32°W, respectivamente. Si la segunda torre está a 450 metros al este de la primera, ¿cuál es la distancia del bote a cada una de las torres?

En los problemas 77 al 80, resuelva el triángulo que satisfaga las condiciones dadas.

77. $\beta = 51°, a = 10, c = 20$

78. $\gamma = 75°, a = 15, b = 12$

79. $a = 6, b = 3, c = 4$

80. $a = 12, b = 13, c = 14$

81. Determine los ángulos en el triángulo de vértices $(1, -1)$, $(0, 1)$ y $(2, 3)$.

82. Un barco navega con un rumbo de N65°E desde un punto, a una distancia de 18 millas náuticas. En ese punto cambia su curso a un rumbo de N15°W y viaja 22 millas náuticas, ¿cuál es la distancia en línea recta desde el punto a su punto final?

83. Un poste de 20 metros se encuentra en la cima de una colina cuya inclinación es de 25° desde la horizontal. ¿Qué longitud debe tener una cuerda para alcanzar desde el extremo superior del poste a un punto que se encuentra a 25 metros directamente colina abajo desde la base del poste?

84. Demuestre que el área de un polígono regular de n lados está dada por:

$$A = \frac{1}{4}s^2 n \cot\left(\frac{180°}{n}\right)$$

donde s es el largo de un lado (véase figura 99).

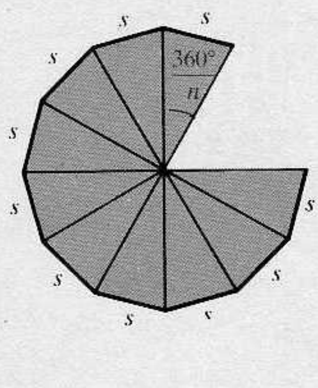


FIGURA 99

85. Un satélite meteorológico que orbita el ecuador a una altura de $H = 40{,}000$ km, detecta una tormenta eléctrica al norte, en P, a un ángulo de $\theta = 6.3°$ de su vertical (véase figura 100).

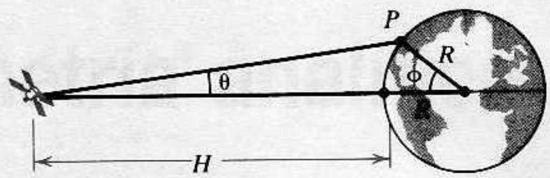


FIGURA 100

(a) Dado que el radio de la Tierra es aproximadamente $R = 6{,}370$ km, encuentre el ángulo de latitud ϕ de la tormenta eléctrica.

(b) Demuestre que θ y ϕ están relacionados por la ecuación:

$$\tan\theta = \frac{R \operatorname{sen}\phi}{H + R(1 - \cos\phi)}$$

86. Como lo muestra la figura 101, sólo una porción de la superficie de la Tierra puede ser observada desde una nave espacial a altitud H. El círculo que pasa por esta región se denomina círculo del horizonte. C denota el centro de la Tierra, S la posición del satélite y A el punto en el círculo del horizonte.

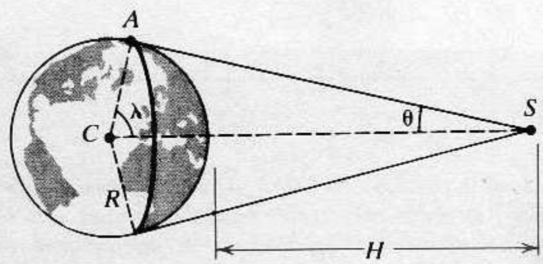


FIGURA 101

(a) Para los ángulos λ y θ ilustrados en la figura, demuestre que:

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\lambda = \frac{R}{R + H}$$

donde r es el radio de la Tierra.

[*Sugerencia*: SA será tangente a la Tierra].

(b) Usando $R = 6{,}378$ km, encuentre ϕ y θ, correspondientes a un punto en el círculo del horizonte del satélite Landsat 2 cuando se encuentra a su mayor distancia (916 km) de la Tierra.

7

Trigonometría analítica

Sophie Germaine

Gran parte de las matemáticas que se desarrollaron en el siglo XVIII respondieron al interés de describir ciertos fenómenos físicos. ¿Cuál es la forma de una vela bajo la presión del viento?, ¿cuál es la forma de una cuerda elástica que vibra (como la cuerda de un violín) sujeta por ambos extremos?, ¿cuál es la forma de una lámina que vibra? Las respuestas a tales preguntas se relacionaban con frecuencia con las funciones trigonométricas. Ernest Chladni, físico alemán, desarrolló una interesante técnica para estudiar la vibración de las láminas elásticas. Después de esparcir arena fina sobre una superficie cilíndrica, deslizó un arco de violín a lo largo de los extremos para hacerlos vibrar. La Academia Francesa de Ciencias ofreció un premio a la mejor descripción matemática de este fenómeno. En 1816, Sophie Germaine (1776-1831), una gran matemática autodidacta francesa, ganó el premio de la Academia de París por su trabajo sobre la elasticidad.

7.1 Funciones circulares

En el capítulo 6 consideramos las funciones trigonométricas de los *ángulos* medidas en grados o radianes. En cálculo y otros cursos avanzados, es necesario considerar las funciones trigonométricas con dominios limitados más a los *números reales* que a los ángulos. La transición de ángulos a números reales se hace reconociendo que a cada número real t le corresponde un ángulo de t radianes.

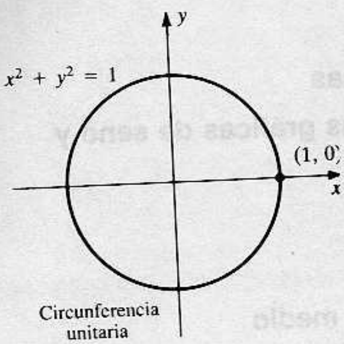


FIGURA 1

Podemos visualizar esta correspondencia utilizando una circunferencia centrada en su origen con radio 1. Esta circunferencia se llama **circunferencia unitaria** (véase figura 1). De la sección 3.2 recordamos que la ecuación de la circunferencia unitaria es $x^2 + y^2 = 1$.

Ahora consideramos un ángulo de t radianes. De la definición de medida de radián $t = s/r$, la razón de la longitud s del arco subtendido al radio r de la circunferencia. Para la circunferencia unitaria $r = 1$, así que $t = s/1 = s$. Por tanto, el ángulo de t radianes que se muestra en la figura 2 subtiende un arco de longitud de t unidades en la circunferencia unitaria. Se deduce que, para cada número real t, el lado terminal de un ángulo de t radianes en posición normal ha recorrido una distancia de $|t|$ unidades a lo largo de la circunferencia unitaria -en sentido contrario al de las manecillas del reloj, si $t > 0$, en sentido de las manecillas del reloj, si $t < 0$. Esta asociación de cada número real t con un ángulo de t radianes se ilustra en la figura 3.

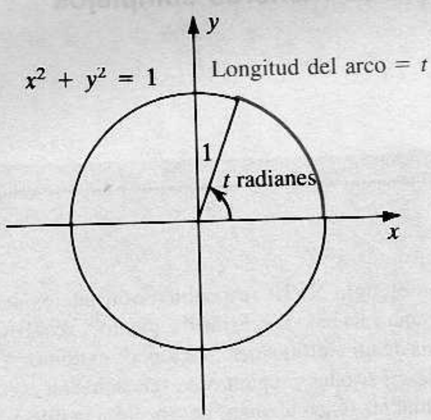


FIGURA 2

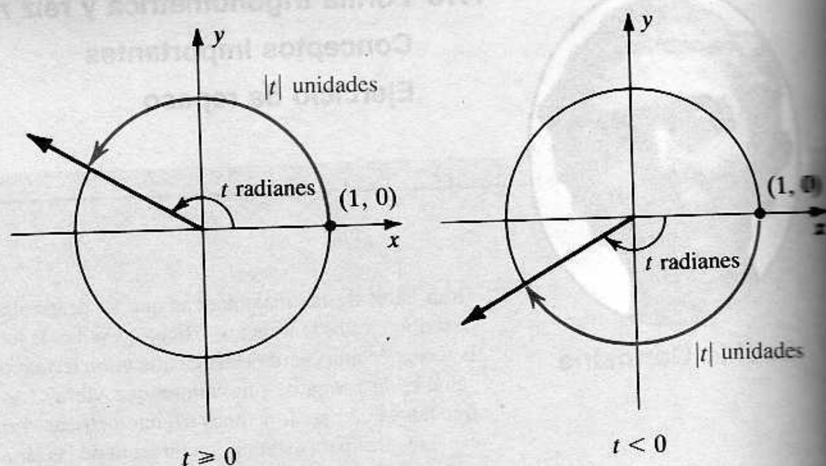


FIGURA 3

Esta asociación nos permite llegar a la siguiente definición.

DEFINICION 1

El valor de cada función trigonométrica para un número real t se define como su valor en un ángulo de t radianes, si ese valor existe.

Por ejemplo, el seno del número real $\pi/6$ es, simplemente, el seno del ángulo de $\pi/6$ radianes (que, como usted sabe, es $\frac{1}{2}$). De esta manera, no hay en realidad nada nuevo al evaluar la función trigonométrica de un número real.

La circunferencia unitaria es muy útil para describir las funciones trigonométricas de los números reales. Para cualquier número real t consideremos el ángulo de t radianes en posición normal. Sea P_t el punto de intersección del lado terminal del ángulo de t radianes con la circunferencia unitaria. Véase figura 4(a). Ya que P_t está en la circunferencia unitaria, la distancia de P_t al origen O es $r = 1$.

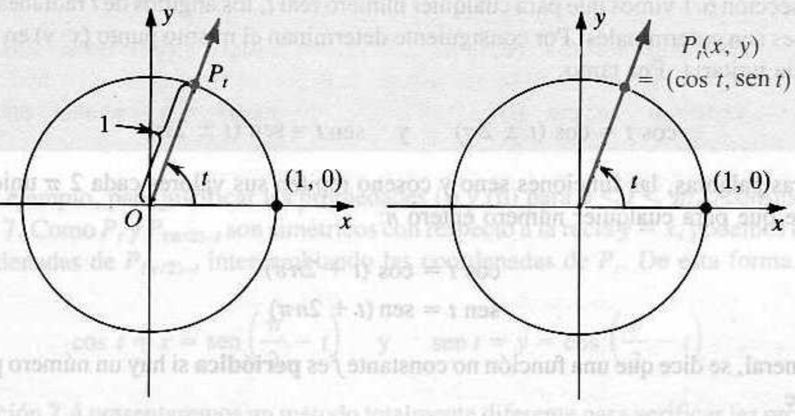
Sean (x, y) las coordenadas de P_t como se indica en la figura 4(b). De la sección 6.4 encontramos que

$$\begin{aligned} \text{sen } t &= y/r = y/1 = y, & \csc t &= r/y = 1/y,\ y \neq 0 \\ \cos t &= x/r = x/1 = x, & \sec t &= r/x = 1/x,\ x \neq 0 \\ \tan t &= y/x,\ x \neq 0, & \cot t &= x/y,\ y \neq 0 \end{aligned}$$

En particular, las coordenadas de P_t son

$$P_t(x, y) = (\cos t, \text{sen } t)$$

En otras palabras: para cualquier número real t, $\cos t$ y $\text{sen } t$ son las coordenadas x y y respectivamente, del punto de intersección del lado terminal del ángulo de t radianes (en posición normal) con la circunferencia unitaria.



(a) (b)

FIGURA 4

Como veremos pronto, de este resultado se pueden obtener algunas propiedades importantes de las funciones seno y coseno. Debido al papel jugado por la circunferencia en este análisis, las funciones trigonométricas se refieren algunas veces a las **funciones circulares.**

Ya que $P_t(x, y)$ está situado en la circunferencia unitaria, se deduce que

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq y \leq 1$$

Como $x = \cos t$ y $y = \text{sen } t$, obtenemos

$$|\cos t| \leq 1 \quad \text{y} \quad |\text{sen } t| \leq 1$$

DOMINIO Y RANGO

Las observaciones anteriores indican que tanto $\cos t$ como $\text{sen } t$ pueden ser cualquier número del intervalo [-1, 1]. Así obtenemos las funciones seno y coseno,

$$f(t) = \text{sen } t \quad \text{y} \quad g(t) = \cos t$$

ambas con dominio en el conjunto R de todos los números reales y como rango, el intervalo [-1, 1]. Los dominios y rangos de las otras funciones trigonométricas se analizarán en la sección 7.2.

EJEMPLO 1

Aproxime cos 3 y sen 3 y dé una interpretación geométrica de estas expresiones.

Solución. Con una calculadora en el *modo de radianes*, obtenemos

$$\cos 3 \approx -0.9899925 \quad \text{y} \quad \text{sen } 3 \approx 0.1411200$$

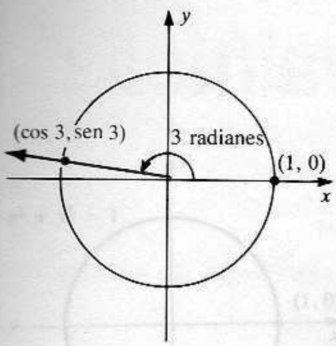


FIGURA 5

Estos valores representan las coordenadas x y y, respectivamente, del punto de intersección del lado terminal del ángulo de 3 radianes (en posición normal) con la circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Como se ve en la figura 5, este punto está situado en el segundo cuadrante.

PERIODICIDAD

En la sección 6.1 vimos que para cualquier número real t, los ángulos de t radianes y $t \pm 2\pi$ radianes son coterminales. Por consiguiente determinan el mismo punto (x, y) en la circunferencia unitaria. Por tanto,

$$\cos t = \cos (t \pm 2\pi) \quad \text{y} \quad \text{sen } t = \text{sen } (t \pm 2\pi)$$

En otras palabras, las funciones seno y coseno repiten sus valores cada 2π unidades. Se deduce que para cualquier número entero n:

$$\cos t = \cos (t + 2n\pi)$$
$$\text{sen } t = \text{sen } (t + 2n\pi)$$

En general, se dice que una función no constante f es **periódica** si hay un número positivo P tal que

$$f(t) = f(t + p) \tag{1}$$

para cada t en el dominio de f. Si p es el número positivo más pequeño para el cual (1) es verdadera, entonces p se llama **periodo** de la función f. Así, las anteriores propiedades implican que las funciones seno y coseno son periódicas. Para poder ver que el periodo de sen t es realmente 2π, notamos que sólo hay un punto P_t en la circunferencia unitaria con 1 como coordenada y, o sea, (0, 1). Es decir,

$$\text{sen } t = 1 \text{ sólo para } t = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \pm 2\pi, \frac{\pi}{2} \pm 4\pi, \text{ y así sucesivamente}$$

Así, el valor positivo más pequeno posible de p es 2π y la función seno tiene un periodo de 2π. La verificación de que la función coseno tiene un periodo de 2π se deja como ejercicio (véase problema 31).

PROPIEDADES ADICIONALES

Para cualquier número real t que satisfaga $0 < t < \pi/2$, el punto correspondiente P_t en la circunferencia unitaria se sitúa en el primer cuadrante. Como se ve en la figura 6 los puntos

P_t y P_{-t} son simétricos con respecto al eje x. Ya que sus coordenadas x son iguales, tenemos que,

$$\cos(-t) = \cos t$$

De nuevo refiriéndonos a la figura 6, vemos que la coordenada y de P_{-t} es el negativo de la coordenada y de P_t. Se deduce que

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$$

El hecho de que $\cos(-t) = \cos t$ y $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$ sea válido para cualquier número real t se deja como ejercicio (véase problema 32). Estas propiedades implican que la función coseno es par y que la función seno es impar.

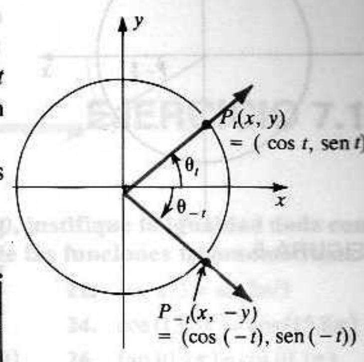


FIGURA 6

Las siguientes propiedades adicionales pueden verificarse considerando los puntos apropiados en la circunferencia unitaria.

Propiedades de las funciones circulares

(i) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t$ (ii) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$

(iii) $\cos(t + \pi) = -\cos t$ (iv) $\operatorname{sen}(t + \pi) = -\operatorname{sen} t$

(v) $\cos(\pi - t) = -\cos t$ (vi) $\operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t$

Por ejemplo, para justificar las propiedades (i) y (ii) para $0 < t < \pi/2$, consideremos la figura 7. Como P_t y $P_{(\pi/2)-t}$ son simétricos con respecto a la recta $y = x$, podemos obtener las coordenadas de $P_{(\pi/2)-t}$ intercambiando las coordenadas de P_t. De esta forma,

$$\cos t = x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} t = y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

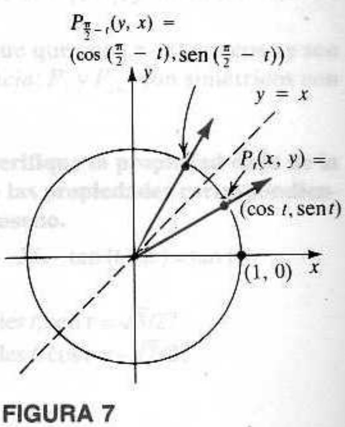


FIGURA 7

En la sección 7.4 presentaremos un método totalmente diferente para verificar las propiedades (i)-(vi) para cualquier número real t.

EJEMPLO 2

Por medio de la periodicidad evalúe sen $(13\pi/3)$.

Solución. Ya que

$$\frac{13\pi}{3} = 4\pi + \frac{\pi}{3}$$

se deduce de $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t + 2n\pi)$, con $n = 2$, que

$$\operatorname{sen}\frac{13\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

EJEMPLO 3

Evalúe sen $(-\pi/6)$.

Solución. Aplicando $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, obtenemos

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

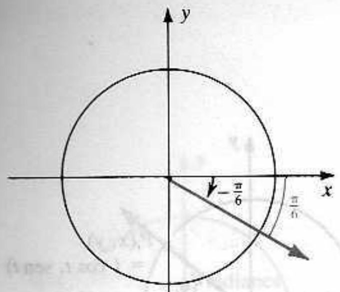


FIGURA 8

Alternativamente, este problema puede resolverse por medio de un ángulo de referencia. Utilizando este método (de la sección 6.4) consideramos el ángulo de $-\pi/6$ radianes. Como se muestra en la figura 8, este ángulo tiene un ángulo de referencia de $\pi/6$. Así encontramos sen $(\pi/6) = \frac{1}{2}$. Como la función seno es negativa para un ángulo cuyo lado terminal se sitúa en el cuadrante IV, tenemos

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

EJEMPLO 4

Usted puede haber observado que cos $(\pi/3)$ = sen $(\pi/6)$. Este es un caso especial de sen $(\pi/2 - t) = \cos t$ ya que sen $(\pi/6)$ = sen $(\pi/2 - \pi/3)$.

Las identidades recíprocas, las de cociente y las pitagóricas estudiadas en las secciones 6.2 y 6.4 para las funciones trigonométricas de los ángulos son válidas también para las funciones trigonométricas de los números reales. Esto se debe a que la función trigonométrica del número real t es simplemente la función trigonométrica del ángulo de t radianes. Por tanto, $\sec t = 1/\cos t$, $\csc t = 1/\operatorname{sen} t$, $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$, y así sucesivamente.

Las siguientes cuatro propiedades de la función tangente resultan directamente de las propiedades correspondientes a las funciones seno y coseno.

Propiedades de la función tangente

Si t es un número real, entonces:

(i) $\tan(-t) = -\tan t$ **(ii)** $\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cot t$

(iii) $\tan(t + \pi) = \tan t$ **(iv)** $\tan(\pi - t) = -\tan t$

en caso de que cada valor exista.

EJEMPLO 5

Demuestre que $\tan(-t) = -\tan t$.

Solución. Procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\tan(-t) &= \frac{\operatorname{sen}(-t)}{\cos(-t)}\\ &= \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t}\\ &= -\tan t\end{aligned}$$

La propiedad $\tan(t + \pi) = \tan t$ implica que la función tangente es periódica con periodo $p \leq \pi$. Ya que $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$, $\tan t = 0$, sólo cuando $\operatorname{sen} t = 0$. Así, $\tan t = 0$, sólo si $t = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$, etc. Por tanto, el número positivo más pequeño p para el cual $\tan(t + p) = \tan t$ es $p = \pi$.

Es importante tener en cuenta que las propiedades que acabamos de analizar para seno, coseno y tangente de un número real t también son válidas para un ángulo θ medido en grados, siempre y cuando π sea reemplazado por 180° en el momento en que π aparezca en la fórmula. Por ejemplo, de $\text{sen}(-t) = -\text{sen}\, t$, se deduce que $\text{sen}(-45°) = -\text{sen}\, 45°$; y de $\text{sen}(\pi/2 - t) = \cot t$, tenemos que $\tan(90° - \theta) = \cot \theta$.

EJERCICIO 7.1

En los problemas 1 al 4, para el número real dado t, (a) localice el punto ($\cos t$, $\text{sen}\, t$) en la circunferencia unitaria y (b) encuentre el valor exacto de las coordenadas $\cos t$ y $\text{sen}\, t$.

1. $5\pi/6$ **2.** $-2\pi/3$
3. $-\pi/6$ **4.** 3π

En los problemas 5 al 8, para el número real dado t, (a) localice el punto ($\cos t$, $\text{sen}\, t$) en la circunferencia unitaria y (b) utilice una calculadora para aproximar las coordenadas $\cos t$ y $\text{sen}\, t$.

5. 2.3 **6.** 13.5
7. -5.1 **8.** 0.3

En los problemas 9 al 12, utilice la periodicidad para encontrar el valor de la función trigonométrica dada. No use calculadora.

9. $\text{sen}(13\pi/6)$ **10.** $\text{sen}(62\pi/3)$
11. $\tan(5\pi/4)$ **12.** $\text{sen}(7\pi/3)$

En los problemas 13 al 20, encuentre el valor de la función trigonométrica dada. No use calculadora.

13. $\text{sen}(-13\pi/3)$ **14.** $\cot(15\pi/6)$
15. $\tan 7\pi$ **16.** $\text{sen}(-21\pi/2)$
17. $\cos(-11\pi/4)$ **18.** $\tan(31\pi/3)$
19. $\sec(-19\pi/3)$ **20.** $\text{esc}(23\pi/6)$

En los problemas 21 al 30, justifique la igualdad dada con una de las propiedades de las funciones trigonométricas.

21. $\cos\pi = \cos 3\pi$ **22.** $\cos \pi/3 = \text{sen}\, 2\pi/3$
23. $\tan(-0.8) = -\tan 0.8$ **24.** $\cos(13.8\pi) = \cos(15.8\pi)$
25. $\cos(1.9 + \pi) = -\cos(1.9)$ **26.** $\tan(0.4\pi) = \cot(0.1\pi)$
27. $\text{sen}(-4 + \pi) = -\text{sen}(4 - \pi)$ **28.** $\tan(5\pi) = \tan(4\pi)$
29. $\cos(0.78) = \cos(-0.78)$ **30.** $\text{sen}\, 3\pi/4 = \text{sen}\, \pi/4$

31. Demuestre que el periodo de la función coseno es 2π.

32. Verifique que $y = \cos t$ es una función par y que $y = \text{sen}\, t$ es una función impar.

33. Para $0 < t < \pi/2$, verifique que $\cos(t + \pi) = -\cos t$ y $\text{sen}(t + \pi) = -\text{sen}\, t$ [*Sugerencia*: P_1 y $P_{t+\pi}$ son simétricos con respecto al origen].

34. Para $0 < t < \pi/2$, verifique que $\cos(\pi - t) = -\cos t$ y $\text{sen}(\pi - t) = -\text{sen}\, t$ [*Sugerencia*: P_1 y $P_{t+\pi}$ son simétricos con respecto al eje y].

En los problemas 35 al 37, verifique la propiedad dada de la función tangente, utilizando las propiedades correspondientes de las funciones seno y coseno.

35. $\tan(\pi/2 - t) = \cot t$ **36.** $\tan(t + \pi) = \tan t$
37. $\tan(\pi - t) = -\tan t$

38. ¿Para cuáles números reales t, $\text{sen}\, t = \sqrt{3}/2$?

39. ¿Para cuáles números reales t, $\cos t = -\sqrt{2}/2$?

7.2 Gráficas de las funciones trigonométricas

Una buena ayuda para el mejor entendimiento de las funciones trigonométricas es examinar sus gráficas.

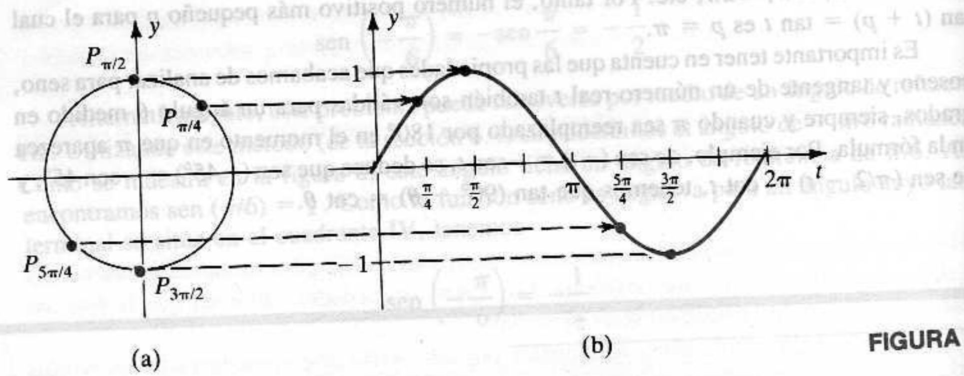


FIGURA 9

En la sección 7.1 vimos que el dominio de la función seno $f(t) = \operatorname{sen} t$ está en todos los números reales y que el intervalo [-1, 1] es su rango. Como la función seno tiene un periodo de 2π, comenzamos haciendo un bosquejo de su gráfica en el intervalo $[0, 2\pi]$. Obtenemos un boceto de la gráfica (véase figura 9(b), considerando varias posiciones del punto P_t en la circunferencia unitaria, como se muestra en la figura 9(a). A medida que t varía de 0 a $\pi/2$, el valor $y = \operatorname{sen} t$ aumenta de 0 a su máximo valor 1. Pero si t varía de $\pi/2$ a $3\pi/2$, el valor sen t disminuye de 1 a su mínimo valor -1. Nótese que sen t cambia de positivo a negativo en $t = \pi$. Para un t entre $3\pi/2$ y 2π, vemos que los valores correspondientes de sen t aumentan de -1 a 0.

Utilizando los valores de la función seno para $0 \leq t \leq 2\pi$ obtenidos en el problema 35 del ejercicio 6.4, marcamos los puntos y los unimos con una curva uniforme, como se observa en la zona coloreada de la figura 10(a). Como $\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t$, la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$ para $2\pi \leq t \leq 4\pi$ es la misma que para $0 \leq t \leq 2\pi$. Utilizando la periodicidad de la función seno, podemos extender la gráfica en cualquier dirección, como se ve en la figura 10(a).

Recordemos de la sección 7.1 que la función seno es una función *impar*, ya que $f(-t) = \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t = -f(t)$. Así, podemos ver en la figura 10(a) que su gráfica es simétrica con respecto al origen.

Trabajando de nuevo con la circunferencia unitaria, obtenemos la gráfica de la función coseno $g(t) = \cos t$, que se indica en la figura 10(b). Como es práctica habitual, esta gráfica

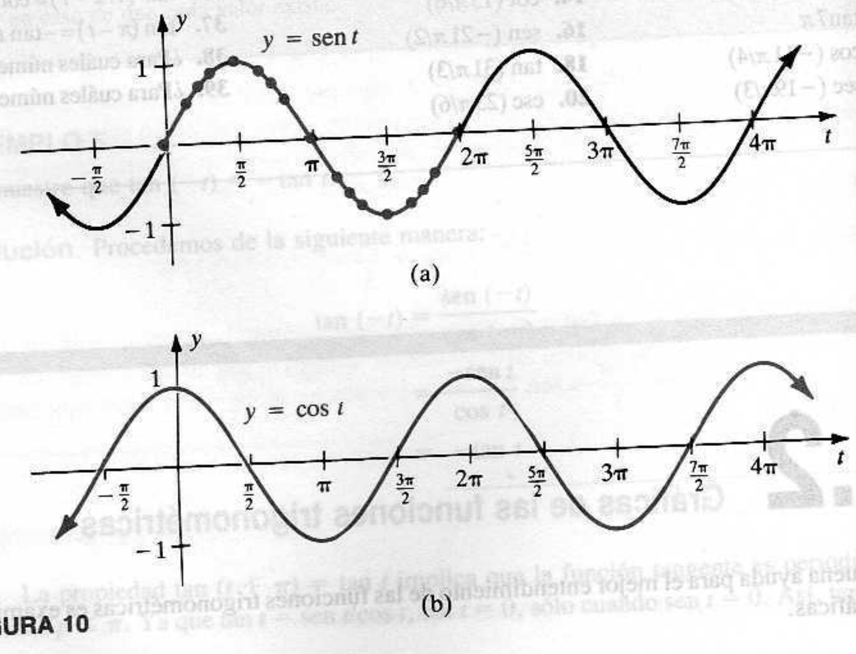


FIGURA 10

se designa $y = \cos t$. Notamos que en este contexto el símbolo y *no* representa la coordenada y de un punto en la circunferencia unitaria; por el contrario, es la coordenada y de un punto en la gráfica de la función $g(t) = \cos t$.

Vemos en la figura 10(b) que la gráfica de la función coseno es simétrica con respecto al eje y. Este es el resultado de

$$g(-t) = \cos(-t) = \cos t = g(t)$$

es decir, la función coseno es una función *par*.

Usted debe haber observado que la gráfica de la función seno es idéntica a la gráfica de la función coseno, pero trasladada $\pi/2$ unidades a la derecha. Esto es una consecuencia de la propiedad

$$\operatorname{sen} t = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

(véase problema 34). Para un análisis detallado de las traslaciones de las gráficas de seno y coseno, véase sección 7.3

EJEMPLO 1

Grafique $y = 1 + \operatorname{sen} t$.

Solución. Recordemos de la sección 3.6 que la gráfica de $y = 1 + \operatorname{sen} t$ puede obtenerse trasladando una unidad hacia arriba la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$. El resultado es la gráfica en color de la figura 11.

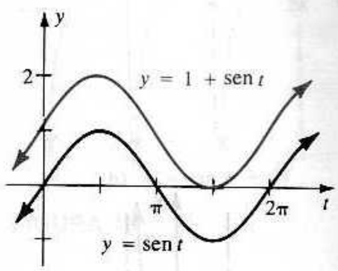


FIGURA 11

EJEMPLO 2

Grafique $y = \operatorname{sen} t + \cos t$.

Solución. Recordemos de la sección 3.6 que la gráfica de la suma de dos funciones puede obtenerse con la suma de las coordenadas y. Para obtener la gráfica de $y = \operatorname{sen} t + \cos t$, primero graficamos $y = \operatorname{sen} t$ y $y = \cos t$ sobre los mismos ejes.

Luego, como se indica en la figura 12, para obtener un punto en la gráfica de $y = \operatorname{sen} t + \cos t$ para cualquier t, sumamos las coordenadas y sen t y cos t. Después de marcar suficientes puntos, obtenemos la gráfica en color de la figura 12.

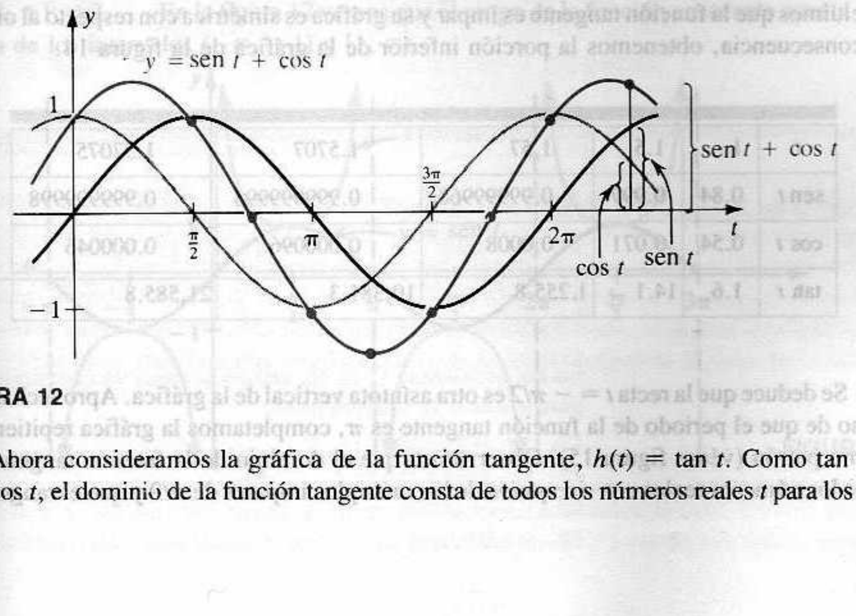


FIGURA 12

Ahora consideramos la gráfica de la función tangente, $h(t) = \tan t$. Como $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$, el dominio de la función tangente consta de todos los números reales t para los que

$\cos t \neq 0$. Después de que tracemos la gráfica de la función tangente, veremos que su rango es R. Ya que $h(t) = \tan t$ tiene como periodo π, sólo necesitamos graficarla en un intervalo de longitud π. Un intervalo conveniente para elegir es $(-\pi/2, \pi/2)$.

Para esbozar la gráfica de la función tangente, comenzamos considerando sus valores para los ángulos especiales 0, $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$ (indicados en la tabla adjunta) y marcando los puntos correspondientes. (Véase figura 13).

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.6$	1	$\sqrt{3} \approx 1.7$

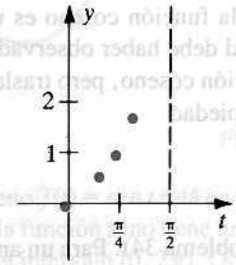


FIGURA 13

Sabemos que $\tan t$ no está definida para $t = \pi/2$ (porque $\cos(\pi/2) = 0$), pero podemos considerar valores de $\tan t$ para t cercanos, pero inferiores a $\pi/2$. Ya que

$$\tan t = \frac{\text{sen}\, t}{\cos t}$$

examinamos $\text{sen}\, t$ y $\cos t$ para $0 < t < \pi/2$. A medida que t se acerca a $\pi/2$, el numerador $\text{sen}\, t$ se aproxima a 1 y el denominador $\cos t$ a 0. Así, a medida que t avanza hacia $\pi/2$, los valores de $\tan t$ crecen. Este comportamiento se ilustra en la siguiente tabla, en donde los valores de $\text{sen}\, t$, $\cos t$ y $\tan t$ se obtuvieron con calculadora. Los valores escogidos para t aumentan hacia $\pi/2 \approx \frac{1}{2}(3.1416) = 1.5708$. Así la recta $t = \pi/2$ es una asíntota vertical para la gráfica. De esta observación obtenemos la porción superior de la curva de la figura 14. Según

$$h(-t) = \tan(-t) = -\tan t = -h(t)$$

concluimos que la función tangente es impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen. En consecuencia, obtenemos la porción inferior de la gráfica de la figura 14.

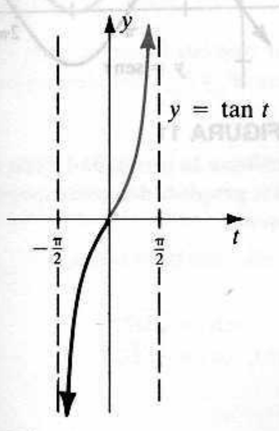


FIGURA 14

t	1	1.5	1.57	1.5707	1.57075
$\text{sen}\, t$	0.84	0.997	0.99999968	0.999999995	0.999999998
$\cos t$	0.54	0.071	0.0008	0.000096	0.000046
$\tan t$	1.6	14.1	1,255.8	10,381.3	21,585.8

Se deduce que la recta $t = -\pi/2$ es otra asíntota vertical de la gráfica. Aprovechando el hecho de que el periodo de la función tangente es π, completamos la gráfica repitiendo el mismo patrón (véase figura 15). Observamos que el dominio de la función tangente son todos los números reales con *excepción* de los múltiplos impares de $\pi/2$ y que el rango es R.

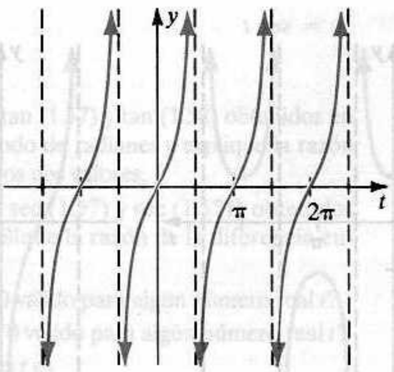
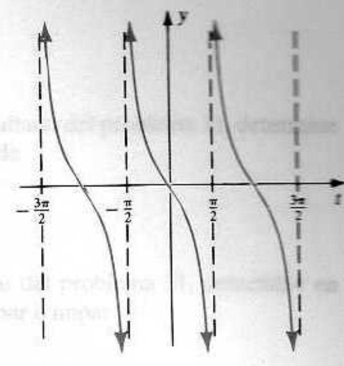
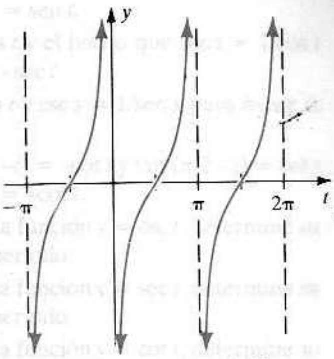


FIGURA 15 $y = \tan t$



(a) $y = -\tan t$



(b) $y = \tan (t + \frac{\pi}{2})$

FIGURA 16

EJEMPLO 3

Grafique (a) $y = -\tan t$ y (b) $y = \tan (t + \pi/2)$.

Solución. Obtenemos estas gráficas utilizando las técnicas de traslación y reflexión vistas en la sección 3.6.

(a) La gráfica de $y = -\tan t$ es la reflexión de la gráfica de $y = \tan t$ en el eje t. Véase figura 16(a).

(b) La gráfica de $y = \tan (t + \pi/2)$ puede obtenerse trasladando $\pi/2$ unidades a la izquierda la gráfica de $y = \tan t$. Véase figura 16(b).

EJEMPLO 4

Trace la gráfica de $f(t) = \csc t$ y determine su dominio y su rango.

Solución. Como $\csc t = 1/\text{sen}\, t$, la gráfica de la función cosecante tendrá asíntotas verticales en donde $\text{sen}\, t = 0$, a saber, $t = 0, \pm\pi, \pm 2\pi \ldots$ Además, podemos obtener la coordenada y de un punto en la gráfica de la función cosecante, tomando el recíproco de una coordenada y diferente de cero, de un punto en la gráfica de la función seno.

Como se ve en la figura 17, es conveniente trazar la gráfica de la función seno (letra a al centro) después localizar las asíntotas verticales y, finalmente, tomar los recíprocos de la coordenada y para obtener puntos en la gráfica de la cosecante. El dominio de la función cosecante está formado por todos los números reales t tales que $\text{sen}\, t \neq 0$; es decir, $\{t | t \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. En la figura 17 vemos que el rango de la función cosecante consta de la unión de los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$.

FIGURA 17

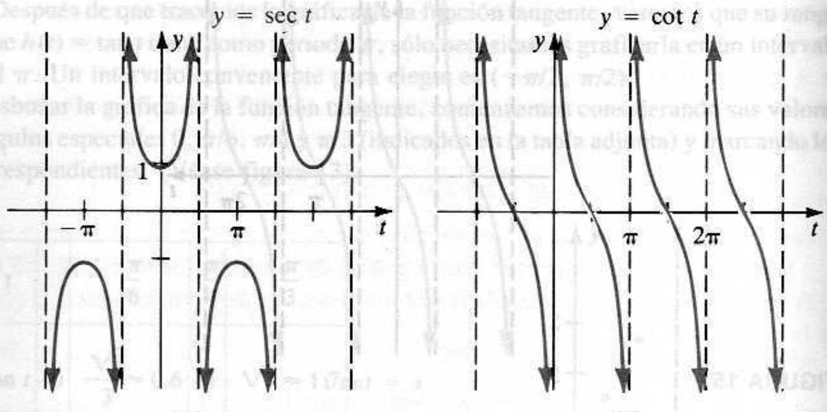


FIGURA 18 (a) (b)

Del rango de la función cosecante encontrado en el ejemplo 4, deducimos que

$$|\csc t| \geq 1$$

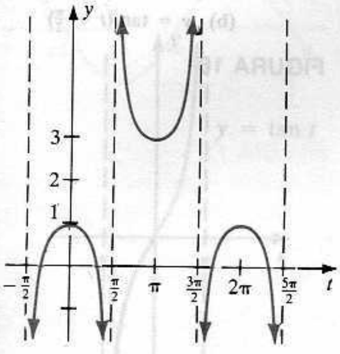
para todos los números reales t en el dominio de la función cosecante. Nótese también que la cosecante es una función impar; su gráfica es simétrica con respecto al origen. (Véanse problemas 31 al 33).

Aprovechando el hecho de que $\sec t = 1/\cos t$ y $\cot t = 1/\tan t$, podemos obtener las gráficas de la función secante, como en la figura 18(a), y la función cotangente como en la figura 18(b), por medio de un método similar al utilizado en el ejemplo 4. La verificación de la figura 18 se deja como ejercicio (véanse problemas 35 y 37).

Una propiedad importante de la función secante,

$$|\sec t| \geq 1$$

es evidente en la gráfica de $y = \sec t$. Véase figura 18(b).



$y = 2 + \sec(t - \pi)$

FIGURA 19

EJEMPLO 5

Grafique $y = 2 + \sec(t - \pi)$.

Solución. La gráfica de $y = 2 + \sec(t - \pi)$ puede obtenerse trasladando π unidades a la derecha y 2 hacia arriba la gráfica de $y = \sec t$, como en la figura 18(a). (Véase figura 19).

EJERCICIO 7.2

En los problemas 1 al 16, use las técnicas de traslación y reflexión para graficar la función dada.

1. $y = 2 + \text{sen}\, t$
2. $y = -1 + \cos t$
3. $y = -\cos t$
4. $y = 1 + \cos t$
5. $y = 1/2 - \cos t$
6. $y = -(1 + \cos t)$
7. $y = \text{sen}\,(t + \pi)$
8. $y = \text{sen}\,(t - \pi/4)$
9. $y = 1 + \tan t$
10. $y = -\tan(t + \pi/4)$
11. $y = -\sec t$
12. $y = 3.5 - \cot t$
13. $y = \pi/4 + \sec t$
14. $y = \csc(t + \pi/2)$
15. $y = -\csc(t + \pi/3)$
16. $y = -1 + \cot(t - \pi/6)$

En los problemas 17 al 22, utilice la suma de coordenadas y para graficar la función dada.

17. $y = \text{sen}\, t - \cos t$
18. $y = \text{sen}\, t + \cos t + 2$
19. $y = t + \text{sen}\, 2t$
20. $y = 3t - \tan t/2$

21. $y = -\text{sen}\, t - \cos t + 1$
22. $y = \cos t - \text{sen}\, t + 2$
23. Compare los valores de tan (1.57) y tan (1.58) obtenidos en una calculadora en el modo de radianes y explique la razón de la diferencia entre estos dos valores.
24. Compare los valores de sec (1.57) y sec (1.571) obtenidos en una calculadora. Explique la razón de la diferencia entre sus valores.
25. ¿Puede ser $5 \csc t - 2 = 0$ válido para algún número real t?
26. ¿Puede ser $8 \sec t + 3 = 0$ válido para algún número real t?
27. ¿Para qué números reales t es
(a) $\csc t \geq \text{sen}\, t$;
(b) $\csc t > \text{sen}\, t$?
28. ¿Para qué valores de t es
(a) $\cos t \geq \sec t$;
(b) $\cos t > \sec t$?
29. ¿Cuáles funciones trigonométricas tienen asíntotas verticales en sus gráficas?
30. ¿Cuáles funciones trigonométricas tienen intersección en sus gráficas en
(a) el eje y,
(b) el eje x?
31. Para cada t en el dominio de la función, demuestre que
(a) $\csc(-t) = -\csc t$
(b) $\sec(-t) = \sec t$
(c) $\cot(-t) = -\cot t$
32. Teniendo en cuenta el resultado del problema 31, determine la simetría de las gráficas de
(a) $y = \csc t$
(b) $y = \sec t$
(c) $y = \cot t$
33. Basándose en el resultado del problema 31, determine en cada caso si la función es par o impar.
(a) $y = \csc t$
(b) $y = \sec t$
(c) $y = \cot t$
34. Demuestre que $\text{sen}(-t - \pi) = \text{sen}\, t$.
35. Utilice la gráfica de $y = \cos t$ y el hecho que $\sec t = 1/\cos t$ para hacer la gráfica de $y = -\sec t$.
36. Utilice la gráfica de $y = \text{sen}\, t$ y $\csc s = 1/\text{sen}\, x$ para hacer la gráfica de $y = -\csc x$.
37. Use las propiedades de $\cot(-t) = -\cot t$ y $\tan(\pi/2 - t) = \cot t$ para obtener la gráfica de $y = -\cot t$.
38. Basándose en la gráfica de la función $y = \csc t$, determine su dominio, rango, asíntota y periodo.
39. Basándose en la gráfica de la función $y = \sec t$, determine su dominio, rango, asíntota y periodo.
40. Basándose en la gráfica de la función $y = \cot t$, determine su dominio, rango, asíntota y periodo.

7.3 Movimiento armónico; variaciones de las gráficas de seno y coseno

MOVIMIENTO ARMONICO

Muchos objetos físicos vibran u oscilan de manera regular, moviéndose repetidamente hacia atrás y hacia adelante, en un determinado intervalo de tiempo. Algunos ejemplos son los péndulos del reloj, las ondas del sonido, las cuerdas de una guitarra al ser punteadas, el corazón humano, las olas y la corriente eléctrica alterna. Como todos los sonidos –y, en particular, los tonos musicales son producidos por vibraciones–, cualquier movimiento oscilatorio se llama **movimiento armónico.** El movimiento oscilatorio descrito por cualquiera de las funciones:

$$f(t) = a\, \text{sen}\,(bt + c) \quad \text{y} \quad g(t) = a \cos\,(bt + c) \tag{2}$$

donde a, b, c son números reales, se llama **movimiento armónico simple.** En esta sección estudiaremos las propiedades y gráficas de estas funciones. Varias de sus aplicaciones se describen de los problemas 55 al 60.

Empecemos considerando

$$y = a \text{ sen } t \text{ y } y = a \cos t$$

los cuales son casos especiales de (2) con $b = 1$ y $c = 0$. Por ejemplo, como se ve en la figura 20(a), obtenemos la gráfica de $y = 2$ sen t duplicando cada coordenada y en la gráfica de $y =$ sen t. Nótese que los valores mínimo y máximo de $y = 2$ sen t ocurren para los mismos valores t como los valores mínimos y máximos de $y =$ sen t, respectivamente. Sin embargo, como vemos en la figura 20(b), esta situación se invierte por $y = -2$ sen t; es decir, se da un valor mínimo cuando $y =$ sen t tiene un valor máximo y viceversa. También observamos que la gráfica de $y = -2$ sen t es la reflexión en el eje horizontal de la gráfica de $y = 2$ sen t. En general, la gráfica de $y = a$ sen t puede obtenerse multiplicando las coordenadas y de la gráfica de $y =$ sen t por el número a. Un procedimiento similar es válido para $y = a \cos t$.

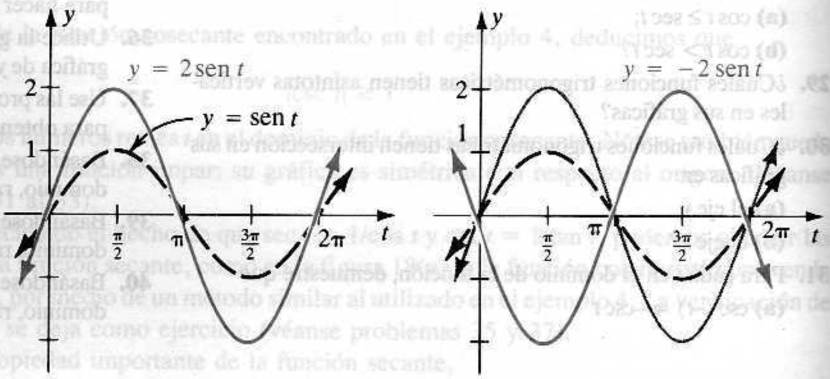


FIGURA 20

AMPLITUD

Del análisis anterior se deduce que la distancia máxima desde cada punto de la gráfica de $y = a$ sen t o $y = a \cos t$ al eje t es $|a|$ (véase figura 21). El número $|a|$ se llama **amplitud** de las funciones

$$f(t) = a \text{ sen } t \quad \text{y} \quad g(t) = a \cos t$$

o de sus gráficas.

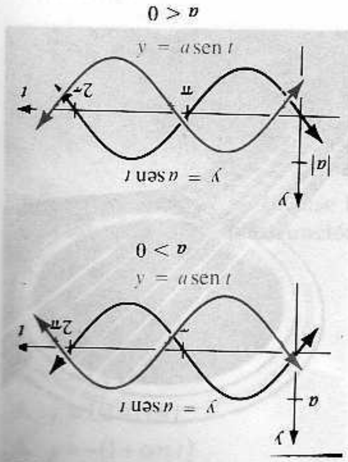


FIGURA 21

EJEMPLO 1

Grafique $y = 2 \cos t$ y $y = \frac{1}{2} \cos t$ en los mismos ejes. Determine los valores mínimos y máximos para $0 \leq t < 2\pi$.

Solución. Las funciones dadas tienen una amplitud de 2 y $\frac{1}{2}$, respectivamente. Limitando nuestra atención al intervalo $0 \leq t < 2\pi$, sabemos que el coseno alcanza su máximo en $t = 0$ y su mínimo en $t = \pi$. De esta forma:

$$y = 2 \cos 0 = 2 \quad \text{y} \quad y = 2 \cos \pi = -2$$

son los valores máximos y mínimos de $y = 2 \cos t$. Para $y = \frac{1}{2} \cos t$, encontramos que los valores máximos y mínimos son

$$y = \tfrac{1}{2}\cos 0 = \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad y = \tfrac{1}{2}\cos \pi = -\tfrac{1}{2}$$

Las gráficas se indican en los mismos ejes en la figura 22.

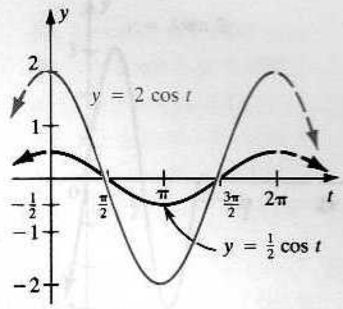


FIGURA 22

Nótese en el ejemplo 1 que tanto para $y = 2\cos t$, como para $y = \frac{1}{2}\cos t$

$$\tfrac{1}{2}(\text{valor máximo-valor mínimo}) = \text{amplitud}$$

Este resultado es válido para todas las gráficas trasladadas de seno y coseno. Por ejemplo, la amplitud de la gráfica de $y = 1 + \operatorname{sen} t$ (figura 11) es $\frac{1}{2}(2 - 0) = 1$, pues el valor máximo es 2 y el valor mínimo es 0.

PERIODO Y CICLO

Ahora consideremos la gráfica de $y = \operatorname{sen} bt$, para $b > 0$. La gráfica tendrá una amplitud de 1 ya que $a = 1$. Recordemos que $y = \operatorname{sen} t$ tiene como periodo 2π. Así, comenzando en $t = 0$, $y = \operatorname{sen} bt$ repetirá sus valores comenzando en $bt = 2\pi$, o $t = 2\pi/b$. Se deduce que $y = \operatorname{sen} bt$ tiene un **periodo** de $2\pi/b$; lo que significa que la gráfica se repetirá cada $2\pi/b$ unidades. Por esta razón decimos que la gráfica de $y = \operatorname{sen} bt$ en un intervalo de longitud $2\pi/b$ es un **ciclo** de la curva del seno. Por ejemplo, el periodo de $y = \operatorname{sen} 2t$ es $2\pi/2 = \pi$ y, por tanto, se completa un ciclo de la gráfica en el intervalo $0 \le t \le \pi$. Obtenemos la gráfica de $y = \operatorname{sen} 2t$ en el intervalo (en color) utilizando los datos de la tabla de la figura 23. La extensión de esta grafica (en negro) se obtiene por periodicidad. Para comparar se muestra también la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2t$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen $2t$	0	1	0	-1	0

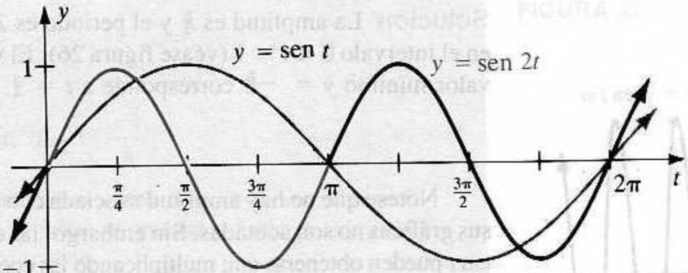


FIGURA 23

Los mismos argumentos son válidos para la función coseno, es decir, para $b > 0$, la función $g(t) = \cos bt$ tiene periodo $2\pi/b$.

EJEMPLO 2

Encuentre el periodo de $y = \cos 4t$ y grafique la función.

Solución. Como $b = 4$, vemos que el periodo es $2\pi/4 = \pi/2$. Esto es, que se completa un ciclo de la gráfica en cualquier intervalo de longitud $\pi/2$. Para graficar la función, trazamos un ciclo de la curva coseno en el intervalo $0 \le t \le \pi/2$. Luego, como se ve en la figura 24, ampliamos la gráfica por medio de la periodicidad.

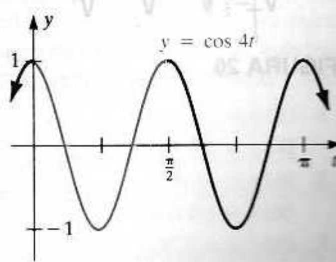


FIGURA 24

Combinando los resultados de los anteriores análisis, tenemos que las gráficas de $y = a \operatorname{sen} bt$ y $y = a \cos bt$, $b > 0$ tiene cada una

$$\text{amplitud} = |a| \quad \text{y} \quad \text{periodo} = \frac{2\pi}{b}$$

Si $b > 0$ en $y = a$ sen bt o $y = a$ cos bt, nos valemos de las propiedades

$$\text{sen}\,(-t) = -\text{sen}\,t \quad \text{o} \quad \cos\,(-t) = \cos t$$

para reformular la expresión en la forma más adecuada con un b positivo. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

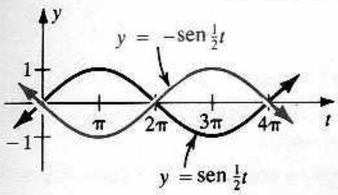


FIGURA 25

EJEMPLO 3

Encuentre la amplitud y el periodo de $y = \text{sen}\,(-\frac{1}{2}t)$. Grafique.

Solución. Como necesitamos $b > 0$, usamos sen $(-t) = -$sen t para escribir

$$y = \text{sen}\,(-\tfrac{1}{2}t) = -\text{sen}\,\tfrac{1}{2}t$$

Se deduce que la amplitud es $|a| = |-1| = 1$. Como $b = 1/2$, el periodo es $2\pi/\frac{1}{2} = 4\pi$. Por consiguiente, la gráfica de la función dada completa un ciclo en el intervalo $0 \leq t \leq 4\pi$. En la figura 25, la curva en color es la gráfica de $y = -\text{sen}\,\frac{1}{2}t$, y es reflejo del eje horizontal de la gráfica de $y = \text{sen}\,\frac{1}{2}t$, en negro.

EJEMPLO 4

Grafique $y = \frac{5}{2}$ sen $2\pi t$.

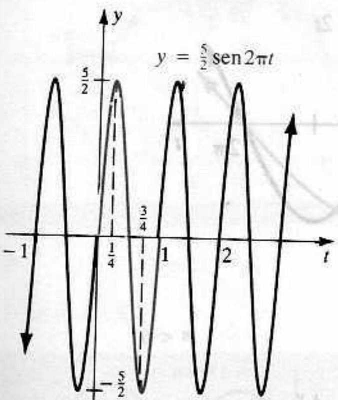


FIGURA 26

Solución. La amplitud es $\frac{5}{2}$ y el periodo es $2\pi/2\pi$. Así que la función completa un ciclo en el intervalo $0 \leq t \leq 1$ (véase figura 26). El valor máximo $y = \frac{5}{2}$ se da cuando $t = \frac{1}{4}$, y el valor mínimo $y = -\frac{5}{2}$ corresponde a $t = \frac{3}{4}$.

Nótese que no hay amplitud asociada con $y = \tan t$, $y = \cot t$, $y = \sec t$ o $y = \csc t$, pues sus gráficas no son acotadas. Sin embargo, las coordenadas y de puntos en la gráfica de $y = a \tan t$ pueden obtenerse aun multiplicando las coordenadas y de puntos en la gráfica de $y = \tan t$ por a. Esto también es válido para $y = a \cot t$, $y = a \sec t$ y $y = a \csc t$.

Las funciones $y = \sec bt$ y $y = \csc bt$, $b > 0$, cada una tiene un periodo $2\pi/b$, mientras que las funciones $y = \tan bt$ y $y = \cot bt$, $b > 0$ cada una tiene un periodo de π/b (véanse problemas 51 al 54).

DESPLAZAMIENTO DE FASE

Ahora consideremos la gráfica de $y = a$ sen $(bt + c)$, para $b > 0$. Como los valores de sen $(bt + c)$ van de -1 a 1, se deduce que la **amplitud** de $y = a$ sen $(bt + c)$ es $|a|$. A medida que $bt + c$ varíe de 0 a 2π, la gráfica completará un ciclo. Despejando $bt + c = 0$ y $bt + c = 2\pi$, encontramos que se completa un ciclo a medida que t varía de $-c/b$ a $(2\pi - c)/b$. Por tanto, $y = a$ sen $(bt + c)$ tiene un **periodo** de

$$\frac{2\pi - c}{b} - \left(-\frac{c}{b}\right) = \frac{2\pi}{b}$$

Si reformulamos $y = a$ sen $(bt + c)$ como $y = a$ sen $b(t + c/b)$, vemos que la gráfica de $y = a$ sen $(bt + c)$ puede obtenerse *trasladando* la gráfica de $y = a$ sen bt horizontalmente una distancia de $|c|/b$. Si $c < 0$, el cambio es a la derecha, pero si $c > 0$, el cambio es a la izquierda. El número $-c/b$ se llama **desplazamiento de fase** de la gráfica de $y = a \text{ sen } (bt + c)$.

EJEMPLO 5

Grafique $y = 3 \text{ sen } (2t - \pi/3)$ trasladando la gráfica de $y = 3 \text{ sen } 2t$.

Solución. La amplitud de $y = 3 \text{ sen } 2t$ es $|a| = 3$ y el periodo es $2\pi/2 = \pi$. Es decir, que se completa un ciclo en el intervalo $0 \leq t \leq \pi$. Entonces, extendemos la gráfica más allá de este intervalo por medio de la periodicidad, como se ve en la figura 27(a).

Volviendo a escribir $y = 3 \text{ sen } (2t - \pi/3)$ como

$$y = 3 \text{ sen } 2(t - \pi/6)$$

vemos que podemos obtener la gráfica de esta función trasladando la gráfica de $y = 3 \text{ sen } 2t$ $\pi/6$ unidades a la derecha. (Véase figura 27(b)).

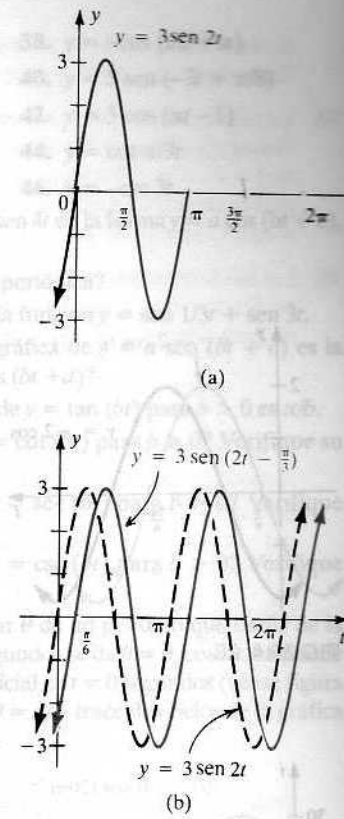


FIGURA 27

Un análisis similar al anterior puede hacerse para la gráfica de $y = a \cos (bt + c)$. Resumimos los resultados de la siguiente manera:

Variaciones en las gráficas de seno y coseno

Las gráficas de $y = a \text{ sen } (bt + c)$ y $y = a \cos (bt + c)$, para $b > 0$, tienen

amplitud $= |a|$,

periodo $= \dfrac{2\pi}{b}$, y

desplazamiento de fase $= \dfrac{-c}{b}$.

Las gráficas tienen la misma forma que las de $y = a \text{ sen } bt$ y $y = a \cos bt$, con la diferencia de que se trasladan $|c|/b$ unidades hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo de si $c < 0$ o $c > 0$, respectivamente.

EJEMPLO 6

Determine la amplitud, el periodo, el desplazamiento de fase y su dirección para cada uno de los siguientes casos:

(a) $y = 15 \cos \left(5t - \dfrac{3\pi}{2}\right)$ **(b)** $y = 10 \text{ sen} \left(-2t - \dfrac{\pi}{6}\right)$

Solución

(a) Primero hacemos la identificación $a = 15$, $b = 5$ y $c = -3\pi/2$. Así, la amplitud es $|a| = 15$, el periodo es $2\pi/b = 2\pi/5$ y el desplazamiento de fase es $-c/b = -(-3\pi/2)/5 = 3\pi/10$. Como $c = -3\pi/2 < 0$, sabemos que la gráfica de $y = 15 \cos (5t - 3\pi/2)$ es la gráfica de $y = 15 \cos 5t$ desplazada $3\pi/10$ unidades hacia la derecha.

(b) Como necesitamos que $b > 0$, primero utilizamos $\text{sen } (-t) = -\text{sen } t$ para escribir

$$y = 10 \operatorname{sen}\left(-2t - \frac{\pi}{6}\right) = -10 \operatorname{sen}\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Ahora con $a = -10$, $b = 2$ y $c = \pi/6$, encontramos que la amplitud es $|a| = 10$, el periodo es $2\pi/2 = \pi$ y el desplazamiento de fase es $-(\pi/6)/2 = -\pi/12$. Ya que $c = \pi/6 > 0$, la gráfica de $y = -10$ sen $2t$ se desplaza $\pi/12$ unidades a la izquierda.

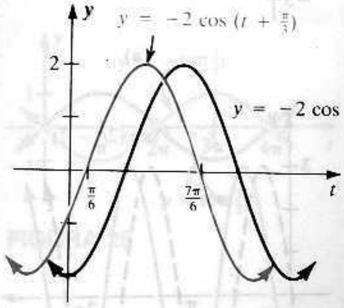


FIGURA 28

EJEMPLO 7

Grafique $y = -2\cos\left(t + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Solución. Como $b = 1$ y $c = \pi/3$ el desplazamiento de fase es $-\pi/3$. Entonces, la gráfica que se observa en la figura 28 se obtiene desplazando $\pi/3$ unidades a la izquierda la gráfica de $y = -2\cos t$, ya que c es positivo. (Usted ya debe saber que la gráfica de $y = -2\cos t$ se obtiene fácilmente reflejando la gráfica de $y = 2\cos t$ en el eje horizontal).

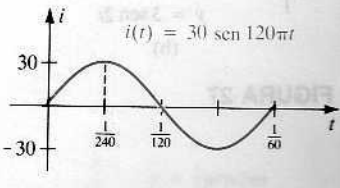


FIGURA 29

EJEMPLO 8

La corriente i (medida en amperios) en un cable de un circuito de corriente alterna se da por

$$i(t) = 30 \operatorname{sen} 120\pi t$$

donde el tiempo t se mide en segundos. Trace un ciclo de la gráfica. ¿Cuál es el máximo valor de la corriente?

Solución. La gráfica tiene una amplitud de 30 y un periodo $2\pi/120\,\pi = 1/60$. Por tanto, trazamos un ciclo en la curva de seno en el intervalo $[0, 1/60]$, como se observa en la figura 29. En ella es evidente que el valor máximo de la corriente es $i = 30$ amperios y se da cuando $t = 1/240$ segundos.

EJERCICIO 7.3

En los problemas 1 al 6, determine la amplitud y el periodo, y trace las gráficas del par de funciones dadas en el mismo sistema de coordenadas (asegúrese de observar las diferencias y semejanzas de ambas gráficas).

1. **(a)** $y = 5$ sen t;
   (b) $y = 1/5$ sen t
2. **(a)** $y = 4\cos t$;
   (b) $y = 1/4\cos t$
3. **(a)** $y =$ sen $5t$;
   (b) $y =$ sen $1/5t$
4. **(a)** $y = \cos 4t$;
   (b) $y = \cos 1/4t$
5. **(a)** $y =$ sen $2\pi t$;
   (b) $y =$ sen $2t$
6. **(a)** $y = \cos(\pi t/4)$;
   (b) $y = \cos 1/4t$

En los problemas 7 al 12 se indica un ciclo de una gráfica de $y = a$ sen bt ó $y = a\cos bt$. Identifique la función.

7.

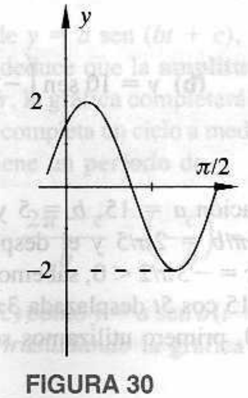


FIGURA 30

8.

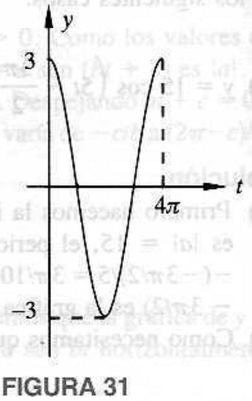


FIGURA 31

9.

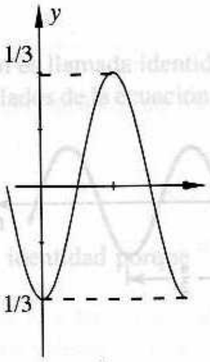


FIGURA 32

10.

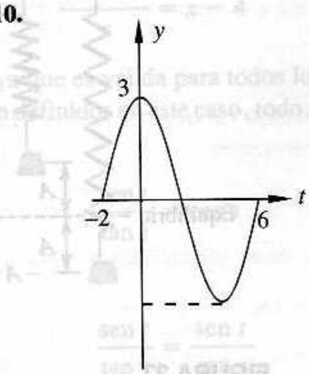


FIGURA 33

11.

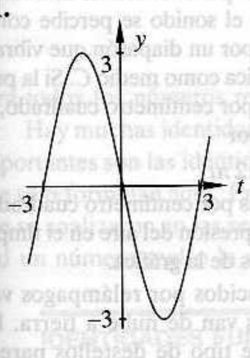


FIGURA 34

12.

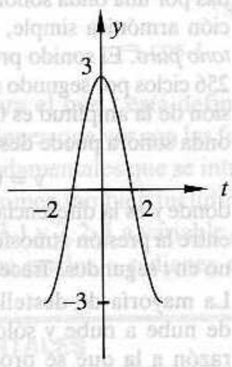


FIGURA 35

En los problemas 13 al 26, determine la amplitud y el periodo y trace la gráfica de cada función.

13. $y = 4 \text{ sen } t$ **14.** $y = -3 \cos t$
15. $y = -2 \text{ sen } t$ **16.** $y = 3/4 \cos t$
17. $y = 3 \text{ sen } 3t$ **18.** $y = \cos t/2$
19. $y = 2 \cos t/3$ **20.** $y = 4 \text{ sen } 2t$
21. $y = 3 \cos \pi t$ **22.** $y = 1/4 \text{ sen } 2\pi t$
23. $y = 2 \text{ sen } 3/4t$ **24.** $y = \cos(-\pi t/2)$
25. $y = -2 \text{ sen } (-\pi t/2)$ **26.** $y = -3 \cos(-\pi t/4)$

En los problemas 27 al 30, encuentre las variaciones en las funciones seno y coseno que satisfagan las condiciones dadas. Grafique las funciones.

27. Amplitud 3, periodo $2\pi/3$, desplazamiento de fase $\pi/3$.
28. Amplitud 4/3, periodo 0.8, desplazamiento de fase $-\pi/3$.
29. Amplitud 0.7, periodo 0.5, desplazamiento de fase 4.
30. Amplitud 3/2, periodo 2, desplazamiento de fase $-\pi/3$.

En los problemas 31 al 46, trace la gráfica de la función dada. Si es apropiado, determine la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase.

31. $y = \text{sen } (t - \pi/4)$ **32.** $y = \cos(5t - \pi/6)$
33. $y = \text{sen } (t + \pi/6)$ **34.** $y = -3 \cos(2t - \pi/3)$
35. $y = 2 \cos(3t - 3\pi/4)$ **36.** $y = 2 \text{ sen } (3t + \pi/6)$
37. $y = 3 \text{ sen } (t/3 - \pi/2)$ **38.** $y = -\cos(t/2 + \pi)$
39. $y = 4 \cos(3t/2 - \pi/6)$ **40.** $y = 5 \text{ sen } (-3t + \pi/8)$
41. $y = 2 \text{ sen } (4t - 4\pi/3)$ **42.** $y = 5 \cos(\pi t - 1)$
43. $y = \tan(\pi/4t)$ **44.** $y = \cot \pi/3t$
45. $y = 2 \sec 1/3t$ **46.** $y = -\csc 3t$

47. Escriba la función $y = -3 \text{ sen } 4t$ en la forma $y = a \cos(bt + c)$, $a > 0$.
48. ¿La función $y = t \cos t$ es periódica?
49. Encuentre el periodo de la función $y = \text{sen } 1/3t + \text{sen } 3t$.
50. ¿Para qué valor de c la gráfica de $y = a \text{ sen } (bt + c)$ es la misma que la de $y = a \cos(bt + d)$?
51. Verifique que el periodo de $y = \tan(bt)$ para $b > 0$ es π/b.
52. ¿Cuál es el periodo de $y = \cot(bt)$ para $b > 0$? Verifique su respuesta.
53. ¿Cuál es el periodo de $y = \sec(bt)$ para $b > 0$? Verifique su respuesta.
54. ¿Cuál es el periodo de $y = \csc(bt)$ para $b > 0$? Verifique su respuesta.
55. El desplazamiento angular θ de un péndulo que oscila de la vertical en un tiempo t segundos se da $\theta = \theta_0 \cos wt$, en donde θ_0 es el desplazamiento inicial en $t = 0$ segundos (véase figura 36). Para $w = 3$ rad/seg y $\theta = \pi/6$, trace dos ciclos de la gráfica de la función que resulte.

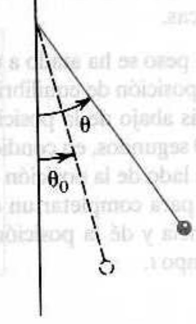


FIGURA 36

56. En un circuito de corriente alterna la intensidad I medida en amperes debe satisfacer $I = 20 \text{ sen } (120\pi t)$, donde t es el tiempo medido en segundos.
(a) ¿Cuál es el periodo?
(b) ¿Cuántos ciclos (periodos) hay en un segundo?
(c) ¿Cuál es la máxima intensidad en la corriente?
(d) Trace dos ciclos de la gráfica de I como una función del tiempo t.

57. La profundidad y del agua a la entrada de un pequeño puerto en un tiempo t se da por

$$y = a \text{ sen } b\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + k$$

de donde a es la mitad de la diferencia entre las profundidades de la marea alta y la baja, $2\pi/b$ es el periodo de la marejada y k es el promedio de profundidad. Suponga que el periodo de la marejada es de 8 horas, la profundidad de la marea alta es de 24 pies y de la marea baja de 8 pies. Trace dos ciclos de la gráfica.

58. En cálculo se muestra que para valores "pequeños" de x, podemos aproximar la función $y = \text{sen}\, x$ mediante el polinomio $p(x) = x - x^3/6$. Utilice una calculadora gráfica para trazar la gráfica de ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas. Compare las gráficas.

59. Las funciones trigonométricas de la forma $y = a + b\,\text{sen}\, w(t - t_0)$, en donde a, b, w, t_0 son constantes reales, se usan con frecuencia para simular la variación en la temperatura. Suponga que

$$F(t) = 23 + 7\ \text{sen}\ \frac{\pi}{12}(t-8) \qquad 0 \le t \le 24$$

da la temperatura en grados Celsius de F a t horas después de la medianoche de cierto día.

(a) ¿Cuál es la temperatura a las 8 a.m.? ¿A las 12 m.?

(b) ¿A qué hora la temperatura es 23°C?

(c) Trace la gráfica de F.

(d) ¿Cuáles son las temperaturas máximas? ¿A qué hora se alcanzan?

60. En cálculo se muestra que para valores "pequeños" de x, podemos aproximar la función $y = \cos x$ mediante el polinomio

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Utilice una calculadora gráfica para trazar la gráfica de ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas. Compare las gráficas.

61. Después de que un peso se ha atado a un resorte, lo estirará hasta alcanzar una posición de equilibrio o reposo. Si el peso es halado A cm más abajo de la posición de equilibrio y se suelta cuando $t = 0$ segundos, en condiciones apropiadas rebotará A cm a cada lado de la posición de equilibrio, tomándose $\pi/2$ segundos para completar un ciclo. De la figura 37 determine la distancia y dé la posición de equilibrio como una función de tiempo t.

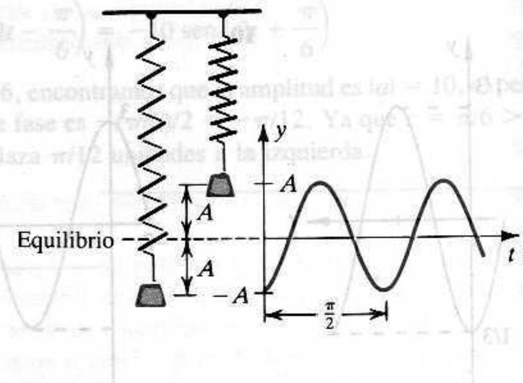


FIGURA 37

62. La sensación del sonido se produce cuando el oído humano detecta variaciones periódicas en la presión del aire producidas por una onda sonora en el tímpano. Si ésta es una variación armónica simple, entonces el sonido se percibe como *tono puro*. El sonido producido por un diapasón que vibra a 256 ciclos por segundo se identifica como medio C. Si la presión de la amplitud es 0.2 dinas por centímetro cuadrado, la onda sonora puede describirse por

$$y = 0.2\ \text{sen}\ 512\,\pi t$$

donde y es la diferencia (en dinas por centímetro cuadrado) entre la presión atmosférica y la presión del aire en el tímpano en t segundos. Trace dos ciclos de la gráfica.

63. La mayoría de destellos producidos por relámpagos van de nube a nube y sólo algunos van de nube a tierra. La razón a la que se produce este tipo de destellos parece depender de la latitud. Algunos estudios empíricos han concluido que la razón de los destellos nube a nube en una tormenta N_c y los destellos nube a tierra N_g se aproxima por

$$\frac{N_c}{N_g} = 4.16 + 2.16\cos 3\phi$$

donde ϕ es la latitud (limitada a regiones no polares $0° \le \phi \le 60$). Grafique esta razón para las latitudes $0° \le \phi \le 60$.

7.4 Identidades trigonométricas

Recordemos de la sección 2.1 que una ecuación como

$$2(x-1) = 2x - 2$$

que es válida para todos los números reales x, se llama **identidad.** Una ecuación como

$$\frac{x^2 - 4x}{x} = x - 4$$

también es llamada identidad, ya que es válida para todos los números reales para los que ambos lados de la ecuación están definidos en este caso, todo $x \neq 0$. La ecuación trigonométrica

$$\frac{\operatorname{sen} t}{\tan t} = \cos t$$

es una identidad porque

$$\frac{\operatorname{sen} t}{\tan t} = \frac{\operatorname{sen} t}{\dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}}$$

$$= \operatorname{sen} t \left(\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\right)$$

$$= \cos t$$

para todos los números reales t para el que t está definido y $\tan \neq 0$.

Hay muchas identidades que tienen que ver con las funciones trigonométricas. Las más importantes son las identidades fundamentales que se introdujeron en la sección 6.2 y 6.4 y que se reformulan aquí. En este resumen también incluimos las identidades pares e impares que se analizaron en las secciones 7.1 y 7.2. La variable t puede representar en cada identidad un número real o la medida en grados o radianes de un ángulo.

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

PITAGORICA	COCIENTE	RECIPROCA
$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$	$\tan t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$	$\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$
$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$	$\cot t = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$	$\csc t = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}$
$\cot^2 t + 1 = \csc^2 t.$		$\cot t = \dfrac{1}{\tan t}$

IDENTIDADES PARES E IMPARES

$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t,$	$\cos(-t) = \cos t,$	$\tan(-t) = -\tan t$
$\csc(-t) = -\csc t,$	$\sec(-t) = \sec t,$	$\cot(-t) = -\cot t$

Estas identidades pueden utilizarse para simplificar expresiones trigonométricas complicadas.

EJEMPLO 1

Escriba como una sola función trigonométrica:

$$\operatorname{sen} t \sec t$$

Solución. Usando la identidad recíproca $\sec t = 1/\cos t$, encontramos que

$$\operatorname{sen} t \sec t = \operatorname{sen} t \frac{1}{\cos t} = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \tan t$$

Con frecuencia encontraremos variaciones de las identidades pitagóricas. Por ejemplo, de $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, obtenemos

$$\operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t \quad \text{y} \quad \cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t$$

Formas alternas de escribir las otras identidades pitagóricas son

$$\tan^2 t = \sec^2 t - 1 \quad \text{y} \quad \cot^2 t = \csc^2 t - 1$$

EJEMPLO 2

Simplifique $(1 + \operatorname{sen} t)(1 + \operatorname{sen}(-t))$.

Solución. Tenemos:

$$\begin{aligned}
(1 + \operatorname{sen} t)(1 + \operatorname{sen}(-t)) &= (1 + \operatorname{sen} t)(1 - \operatorname{sen} t) && \text{Por } \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \\
&= 1 - \operatorname{sen}^2 t && \text{Por álgebra} \\
&= \cos^2 t && \text{De } \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3

Simplifique $\csc^2 t - \cot^2 t$.

Solución. De $\cot^2 t + 1 = \csc^2 t$, vemos que

$$\csc^2 t - \cot^2 = 1$$

Podemos utilizar las identidades fundamentales y valernos del álgebra para verificar una identidad, demostrando que las expresiones dadas son equivalentes. El método preferido para verificar una identidad es mostrar que un lado de la ecuación es equivalente al otro, como en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 4

Verifique la identidad

$$\sec^2 t + \csc^2 t = \sec^2 t \csc^2 t$$

Solución. Demostramos que el lado izquierdo de la ecuación es equivalente al lado derecho:

$$\begin{aligned}
\sec^2 t + \csc^2 t &= \frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} && \text{Identidades fundamentales} \\
&= \frac{1}{\cos^2 t}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}\left(\frac{\cos^2 t}{\cos^2 t}\right) && \text{Mínimo común denominador}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t} && \Leftarrow \boxed{\text{Sumando}}\\
&= \frac{1}{\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t} && \Leftarrow \boxed{\text{Identidad fundamental}}\\
&= \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2 \left(\frac{1}{\operatorname{sen} t}\right)^2 && \Leftarrow \boxed{\text{Por álgebra}}\\
&= \sec^2 t \csc^2 t && \Leftarrow \boxed{\text{Identidades fundamentales}}
\end{aligned}
$$

En el ejemplo 4 está implícita la suposición de que la identidad es válida sólo para aquellos valores de t cuyos lados de la identidad estén definidos. En el ejemplo 4 para un número real t, necesitamos que $t \neq k\pi$ y $t \neq \pi/2 + k\pi$, donde k es un número entero. En los siguientes ejemplos, no mencionaremos las limitaciones de la variable.

EJEMPLO 5

Verifique la identidad

$$\operatorname{sen} \theta \cos \theta = \frac{1}{\tan \theta + \cot \theta}$$

Solución. Demostremos que el lado derecho de la ecuación es equivalente al lado izquierdo. (Usted debe justificar el porqué de cada paso).

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\tan \theta + \cot \theta} &= \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + \dfrac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}}\\
&= \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}}\\
&= \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}\\
&= \operatorname{sen} \theta \cos \theta
\end{aligned}
$$

No hay un método general para demostrar que una ecuación trigonométrica sea una identidad. A continuación enumeramos algunas técnicas que pueden resultar útiles.

Sugerencias para verificar identidades

(i) Simplifique el lado más complicado de la ecuación.
(ii) Encuentre el mínimo común denominador para la suma o diferencia de fracciones.
(iii) Si las dos técnicas anteriores fallan, exprese todas las funciones trigonométricas en términos de senos y cosenos y luego trate de simplificar.

EJEMPLO 6

Verifique la identidad

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cot^2 x = \cos x \csc x \sec x$$

Solución. Comenzamos simplificando el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cot^2 x &= \operatorname{sen} x\,(1 + \cot^2 x)\\ &= \operatorname{sen} x(\csc^2 x)\\ &= \frac{1}{\csc x}\csc^2 x\\ &= \csc x\end{aligned}$$

Como hemos llegado a tan simple expresión, tratamos de reducir el lado derecho a la misma expresión:

$$\begin{aligned}\cos x \csc x \sec x &= \cos x \csc x \frac{1}{\cos x}\\ &= \csc x\end{aligned}$$

Como ambos lados de la ecuación dada son equivalentes a $\csc x$, también lo son entre sí. Por tanto, la ecuación es una identidad.

Como lo ilustra el ejemplo 6, otra técnica para verificar una identidad es reducir cada lado de la ecuación por separado a la misma expresión.

Nota de advertencia: con el fin de verificar una identidad trigonométrica, necesitamos demostrar que las expresiones dadas son equivalentes. Nótese que en los tres ejemplos anteriores trabajamos de manera independiente con las expresiones de cada lado, para demostrar que son equivalentes. Esta es la práctica estándar para verificar las identidades trigonométricas. La misma operación algebraica no debe realizarse para ambos lados de la ecuación simultáneamente. En otras palabras, no trate una ecuación trigonométrica como si fuera una identidad hasta que haya probado que realmente lo es.

Para demostrar que una ecuacion no es una identidad, sólo necesitamos encontrar un valor en el dominio de la variable para la cual la ecuación no sea verdadera. Como se observa en el siguiente ejemplo, esto suele ser un proceso de ensayo y error.

EJEMPLO 7

Demuestre que

$$(\operatorname{sen} t + \cos t)^2 = 1$$

no es una identidad.

Solución. Para $t = 0$, ambos lados de la ecuación están definidos y obtenemos $(0 + 1)^2 = 1$, lo cual es verdad. Esto no afirma ni refuta que la ecuación sea una identidad. Como esperamos demostrar que *no* es una identidad, ensayamos otro valor para t. Puede ser $t = \pi/4$, y encontramos que el lado izquierdo es

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

lo cual no equivale al lado derecho, 1. En consecuencia, la ecuación no es una identidad, pues hemos demostrado que no es verdad, al menos para un valor de t, a saber, $t = \pi/4$.

En cálculo suele ser útil hacer una **sustitución trigonométrica** para cambiar la forma de ciertas expresiones que tienen radicales. El siguiente ejemplo ilustra la técnica usada.

EJEMPLO 8

Reformule $\sqrt{a - x^2}$ como expresión trigonométrica sin radicales haciendo la sustitución $x = a$ sen θ, en donde $a > 0$ y $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Solución. Si tomamos $x = a$ sen θ, entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen} \theta)^2}\\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)}\\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta}\end{aligned}$$

Ya que $a > 0$ y $\cos \theta \geqq 0$ para $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, tenemos

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta$$

Si bien muchas de las identidades consideradas en esta sección no son particularmente importantes en sí, lo que sí es importante es la facilidad que usted adquiera para simplificar y manejar las expresiones trigonométricas. Esta es primordial para destrezas más avanzadas en matemáticas, ciencias e ingeniería.

EJERCICIO 7.4

En los problemas 1 al 10, simplifique la expresión mediante las identidades fundamentales y las identidades pares e impares.

1. $\csc t \cdot \operatorname{sen} t$

2. $\cot t \cdot \operatorname{sen} t$

3. $\dfrac{\cos t}{\tan t} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}$

4. $\dfrac{\tan^2 t + 1}{\sec t}$

5. $\csc^2 t - \cot^2 t$

6. $[1 - \cos^2(-t)]\csc^2 t$

7. $\tan t + \tan(-t)$

8. $\operatorname{sen}^2(-t) + \dfrac{1}{\sec^2 t}$

9. $\csc(-x) \cdot \operatorname{sen} x$

10. $\dfrac{\sec(-t)}{\csc(t)} \cdot \tan t + 1$

En los problemas 11 al 20, reduzca la expresión dada a una sola función trigonométrica.

11. $\dfrac{\tan t + \sec t \cdot \tan t}{1 + \sec t}$

12. $\sec t \cdot \operatorname{sen}^2 t + \sec t \cdot \cos^2 t$

13. $\dfrac{\csc^2 t - 1}{\cot^2 t}$

14. $\dfrac{\tan t + \cot t}{\sec t}$

15. $\csc x \cdot \tan x \cdot \cos x - \csc^2 x$

16. $\dfrac{\sec^2\theta - \tan^2(\theta)}{\csc \theta}$

17. $\dfrac{\cos(-x) \cdot \cos x - \operatorname{sen}(-x) \operatorname{sen} x}{\sec x}$

18. $\dfrac{\tan^2\theta \cdot \sec\theta - \sec^3 x + \sec\theta + \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

19. $\dfrac{\csc^2\theta \cdot \cot\theta - \cot^3\theta + \sec\theta - \cot\theta}{\csc\theta}$

20. $\operatorname{sen}^2 t \cdot \cos^2 t \cdot \tan^2 t \cdot \sec^2 t \cdot \csc^2 t + 1$

En los problemas 21 al 60, verifique la identidad.

21. $\left[\dfrac{\operatorname{sen} t \cos t + \cos t}{1 + \operatorname{sen} t}\right]^2 + \left[\dfrac{\operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen} t}{1 + \cos t}\right]^2 = 1$

22. $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\operatorname{sen}^2 x} - (1 - \operatorname{sen}^2 x)\csc^2 x = 1$

23. $[\cos x + \cos x \tan^2 x]^2 - 1 = \left[\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x}{(1 + \cos x)\cos x}\right]^2$

24. $1 - \operatorname{sen}^4 x = (2 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x)\cos^2 x$

25. $\dfrac{1 + \cot t}{\cot t} = \dfrac{\sec^2 t - 2}{\tan t - 1}$

26. $3 - 2\cos^2 x = 2 \operatorname{sen}^2 x + 1$

27. $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$

28. $\dfrac{\sec x + \csc x}{\sec x - \csc x} = \dfrac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

29. $\dfrac{[\cos x + \tan x \cdot \operatorname{sen} x]^2 - 1}{\operatorname{sen}^2 x} = \sec^2 x$

30. $\dfrac{\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x}{1 - 2\cos^2 x} = 1$

31. $\dfrac{1 + \cos t}{\operatorname{sen} t} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t} = 2 \csc t$

32. $\dfrac{\sec^2 x}{\csc^2 x} + \operatorname{sen}^2 x = \sec^2 x - \cos^2 x$

33. $\dfrac{\cot y+\csc y}{\text{sen } y+\tan y}=\csc^2 y\cdot\cos y$

34. $\csc t-\dfrac{\text{sen } t}{1+\cos t}=\cot t$

35. $\dfrac{1}{\csc t+\cot t}=\csc t-\cot t$

36. $\dfrac{\cot^2\alpha}{1+\text{sen }\alpha}=\dfrac{\csc\alpha-1}{\text{sen }\alpha}$

37. $\dfrac{\cot^2\beta-1}{\cos\beta+\text{sen }\beta}=\dfrac{\cos\beta-\text{sen }\beta}{\text{sen}^2\beta}$

38. $(\sec x-\tan x)^2=\dfrac{1-\text{sen } x}{1+\text{sen } x}$

39. $\text{sen } z-\cos z+\sec z=\dfrac{\text{sen } z+\cos z}{\cot z}$

40. $1+\dfrac{1}{\text{sen } x}=\dfrac{\cot^2 x}{\csc x-1}$

41. $\dfrac{\tan t+\cot t}{\text{sen}^2 t}-\cos t\csc^3 t=\sec t\cdot\csc t$

42. $\dfrac{\tan t-\cot t}{\tan t+\cot t}=1-2\cos^2 t$

43. $\dfrac{1+\csc\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}=\sec\alpha$

44. $\text{sen}(-t)\sec(-t)=-\tan t$

45. $\dfrac{\cot(-t)}{\cos(-t)}=-\csc t$

46. $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\dfrac{1+\cos\theta}{|\text{sen }\theta|}$

47. $\sqrt{\dfrac{1+\text{sen }\alpha}{1-\text{sen }\alpha}}=\dfrac{|\cos\alpha|}{1-\text{sen }\alpha}$

48. $\ln|\cot x|=\ln|\cos x|-\ln|\text{sen } x|$

49. $\ln(\csc^2 y-\cot^2 y)=0$

50. $\ln|\csc x+\cot x|=-\ln|\csc x-\cot x|$

51. $\ln|\sec x+\tan x|=-\ln|\sec x-\tan x|$

52. $\left(\dfrac{\text{sen }\theta}{\cot^2\theta}\right)^8;\left(\dfrac{\csc^2\theta}{\tan^4\theta}\right)^4$

53. $\dfrac{\text{sen}^5 x+\cos^5 x}{\text{sen } x+\cos x}=1-\text{sen } x\cos x[1+\text{sen } x\cos x]$

54. $(\cot^2 y+1)(\text{sen}^2 y-1)=1-\csc^2 y$

55. $\dfrac{1}{1-\text{sen }\alpha}+\dfrac{1}{1+\text{sen }\alpha}=2\sec^2\alpha$

56. $(1-\cot\beta)^2(1+\cot\beta)^2+4\cot^2\beta=\csc^4\beta$

57. $\dfrac{\sec(-t)}{1+\tan(-t)}-\dfrac{\csc(-t)}{1+\cot(-t)}=0$

58. $\dfrac{\cos t}{1+\tan(-t)}+\dfrac{\text{sen } t}{1+\cot(-t)}=\text{sen } t+\cos t$

59. $\sec^4 x-2\tan^2 x-\tan^4 x=1$

60. $\csc^6 x-\cot^6 x=1+3\csc^2 x\cot^2 x$

En los problemas 61 al 70, demuestre que la ecuación trigonométrica dada no es una identidad.

61. $\sec t=\sqrt{1+\tan^2 t}$

62. $\sqrt{\text{sen}^2 t}=\text{sen } t$

63. $1+\csc^2 x=\cot^2 x$

64. $\cos x=1-\text{sen } x$

65. $\tan^2 x+\sec^2 x=1$

66. $1+\cos^2\alpha=\text{sen}^2\alpha$

67. $\cos(\sec\theta)=1$

68. $\cot(\tan\alpha)=1$

69. $\text{sen}(-x)=\text{sen } x$

70. $\ln\left|\dfrac{1}{\cos x}\right|=\dfrac{1}{\ln|\cos x|}$

En los problemas 71 al 80, reformule la expresión dada como una expresión trigonométrica sin radicales, haciendo las sustituciones indicadas.

71. $\sqrt{a^2-x^2},\quad x=a\,\text{sen } t,\quad -\pi/2\le t\le\pi/2$

72. $\sqrt{a^2+x^2},\quad x=a\cot t,\quad 0<t<\pi$

73. $\sqrt{x^2-a^2},\quad x=a\csc t,\quad 0<t<\pi/2$

74. $\sqrt{9-16x^2},\quad x=3/4\cos t,\quad 0\le t\le\pi$

75. $\dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}},\quad x=5\,\text{sen } t,\quad -\pi/2<t<\pi/2$

76. $x^2\sqrt{x^2-81},\quad x=9\csc t,\quad 0\le t<\pi/2$

77. $\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{x},\quad x=\sqrt{2}\cos t,\quad 0\le t\le\pi$

78. $(49+x^2)3/2,\quad x=7\tan t,\quad -\pi/2<t<\pi/2$

79. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5}},\quad x=\sqrt{5}\sec t,\quad 0<t<\pi/2$

80. $\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x},\quad x=\sqrt{3}\tan t,\quad -\pi/2<t<\pi/2$

7.5 Fórmulas de la suma y de la diferencia

Las fórmulas que deduciremos en esta sección nos permitirán expresar ciertos tipos de expresiones trigonométricas en formas más simples o más útiles. Estas fórmulas son muy importantes en cálculo y en las ciencias físicas. Aunque las deducciones utilizan ángulos, las aplicaciones a otros campos tienen que ver en general con las funciones trigonométricas de los números reales.

Las **fórmulas de la suma** y de **la diferencia** para las funciones seno y coseno reducen $\cos(u + v)$, $\cos(u - v)$, $\operatorname{sen}(u + v)$ y $\operatorname{sen}(u - v)$ a expresiones que tienen que ver con $\cos u$, $\cos v$, $\operatorname{sen} u$ y $\operatorname{sen} v$. Primero obtenemos la fórmula para $\cos(u - v)$ y luego la utilizamos para obtener las demás.

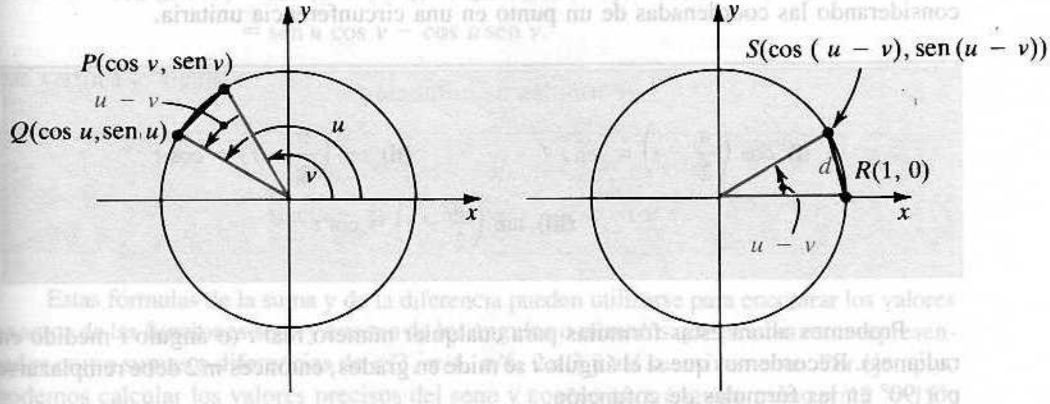


FIGURA 38 (a) (b)

Para obtener la fórmula para $\cos(u - v)$, sean u y v ángulos como los muestra la figura 38(a). Si colocamos el ángulo $u - v$ en posición normal, como se observa en la figura 38(b), tenemos que la distancia d desde R hasta S equivale a la distancia desde P hasta Q, como se ve en la figura 38(a). Los cuadrados de estas distancias son iguales, es decir,

$$[d(P, Q)]^2 = [d(R, S)]^2$$

Utilizando la fórmula de distancia, tenemos

$$(\cos u - \cos v)^2 - (\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v)^2 = (\cos(u - v) - 1)^2 + \operatorname{sen}^2(u - v),$$

o

$$\cos^2 u - 2\cos u \cos v + \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 u - 2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v + \operatorname{sen}^2 v$$
$$= \cos^2(u - v) - 2\cos(u - v) + 1 + \operatorname{sen}^2(u - v).$$

Ya que $\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u = 1$, $\quad \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v = 1$, $\quad$ y $\quad \cos^2(u - v) + \operatorname{sen}^2(u - v) = 1$, la ecuación anterior se simplifica

$$2 - 2\cos u \cos v - 2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = 2 - 2\cos(u - v)$$

obteniendo el siguiente resultado

Fórmula de la diferencia para COSENO

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

Para obtener la fórmula de adición para $\cos(u + v)$, escribimos

$$\cos(u + v) = \cos(u - (-v))$$
$$= \cos u \cos(-v) + \operatorname{sen} u \operatorname{sen}(-v)$$

Utilizando las identidades par e impar

$$\cos(-v) = \cos v \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-v) = -\operatorname{sen} v$$

tenemos ahora lo siguiente

Fórmula de la suma para COSENO

$$\cos (u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

En la sección 7.1 analizamos las siguientes fórmulas de cofunción para $0 < t < \pi/2$, considerando las coordenadas de un punto en una circunferencia unitaria.

Fórmulas de cofunción

(i) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t$ **(ii)** $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$

(iii) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cot t$

Probemos ahora estas fórmulas para cualquier número real t (o ángulo t medido en radianes). Recordemos que si el ángulo t se mide en grados, entonces $\pi/2$ debe remplazarse por 90° en las fórmulas de cofunción.

Para verificar (i) aplicamos la fórmula de la diferencia para $\cos (u - v)$ a $\cos (\pi/2 - t)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos t + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} t = 0 \cdot \cos t + 1 \cdot \operatorname{sen} t$$
$$= \operatorname{sen} t$$

Para probar (ii) remplacemos t por $\pi/2 - t$ en (i) y obtenemos

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

o

$$\cos t = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

como deseábamos.

Y finalmente,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = \cot t$$

Utilizando la fórmula (i) podemos ahora deducir las fórmulas de la suma y de la diferencia para seno:

$$\operatorname{sen}(u + v) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (u + v)\right] \quad \text{Fórmula de cofunción}$$
$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right]$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\cos v + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\operatorname{sen} v \quad \text{Fórmula de la diferencia para el coseno}$$
$$= \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

El resultado se resume de la siguiente manera:

Fórmula de la suma para SENO

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

Escribiendo $u - v$ en la forma $u + (-v)$ y usando la fórmula de la suma para seno, obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(u - v) &= \operatorname{sen}(u + (-v)) = \operatorname{sen} u \cos(-v) + \cos u \operatorname{sen}(-v)\\ &= \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v.\end{aligned}$$

que verifica lo siguiente:

Fórmula de la diferencia para SENO

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

Estas fórmulas de la suma y de la diferencia pueden utilizarse para encontrar los valores exactos de las funciones seno y coseno de los ángulos o números que puedan estar representados como sumas o diferencias de $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$, $2\pi/3$ y así sucesivamente. Por ejemplo, podemos calcular los valores precisos del seno y coseno para ángulos como $\pi/12 = 15°$, $5\pi/12 = 75°$ y $7\pi/12 = 105°$ (recordemos que la calculadora o las tablas trigonométricas sólo dan aproximaciones decimales a estos valores).

EJEMPLO 1

Encuentre el valor exacto de $\cos(7\pi/12)$.

Solución. No tenemos forma de evaluar $\cos(7\pi/12)$ directamente. Sin embargo, podemos escribir $\cos(7\pi/12) = \cos(\pi/3 + \pi/4)$. Luego con la fórmula de la suma para el coseno, se deduce que

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3})\end{aligned}$$

También podemos escribir la respuesta así: $(\sqrt{2} - \sqrt{6}/4$. Nótese que $\cos(7\pi/12) < 0$, tal como se esperaba.

EJEMPLO 2

Evalúe $\operatorname{sen}(7\pi/12)$.

Solución. Usamos la fórmula de la suma para seno de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}) \qquad (3)\end{aligned}$$

Este resultado también puede escribirse así: $(\sqrt{2} + \sqrt{6})/4$.

De manera alterna, podemos obtener el valor de $\operatorname{sen}(7\pi/12)$ de:

$$\cos^2 \frac{7\pi}{12} + \operatorname{sen}^2 \frac{7\pi}{12} = 1$$

Utilizando el valor de cos $(7\pi/12)$ del ejemplo anterior, encontramos que

$$\operatorname{sen} \frac{7\pi}{12} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{7\pi}{12}} = \sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3})\right]^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{8}(1 - 2\sqrt{3} + 3)} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{8}}$$

Aunque este número no se parece al resultado obtenido en (3), los valores son los mismos pues,

$$\sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{2}{16}(1 + 2\sqrt{3} + 3)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{16}(1 + \sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$$

Recordemos de la sección 3.4 que para cualquier función f la expresión

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

se llama un cociente diferencia. La identidad del siguiente ejemplo contiene un cociente diferencia, donde $f(x) = \operatorname{sen} x$.

EJEMPLO 3

Verifique que

$$\frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h} = \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) + \operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right)$$

Solución. Aplicando la fórmula de la suma para seno a sen $(x + h)$, tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \frac{\cos x \operatorname{sen} h + \operatorname{sen} x (\cos h - 1)}{h}$$

$$= \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) + \operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right)$$

También hay fórmulas de la suma y de la diferencia para la función tangente:

Fórmula de la suma para TANGENTE

$$v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

Fórmula de la diferencia para TANGENTE

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

Deducimos la fórmula de la suma mediante las fórmulas de la suma para seno y coseno, de la siguiente manera:

$$\tan(u + v) = \frac{\operatorname{sen}(u + v)}{\cos(u + v)} = \frac{\operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v}{\cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}$$

Podemos dividir el numerador y el denominador por $\cos u \cos v$, siempre y cuando $\cos u \cos v \neq 0$. (Si $\cos u \cos v = 0$, $\cos u = 0$ ó $\cos v = 0$. En este caso, $\tan u$ o $\tan v$ están indefinidas. Se sigue que la expresión del lado derecho de la fórmula de la suma para tangente tampoco está definida).
Realizando la división, obtenemos

$$\tan(u + v) = \frac{\left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)\left(\frac{\cos v}{\cos v}\right) + \left(\frac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} v}{\cos v}\right)}{\left(\frac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\frac{\cos v}{\cos v}\right) - \left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} v}{\cos v}\right)}$$

$$= \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

En consecuencia, hemos demostrado que la fórmula de la suma para tangente es válida para todos los valores de u y v para los cuales ambos lados de la ecuación estén definidos.

La deducción de la fórmula de la diferencia para tangente se deja como ejercicio. Véase problema 56.

EJEMPLO 4

Evalúe $\tan(\pi/12)$.

Solución. Con el fin de utilizar las fórmulas de la suma y de la diferencia para obtener un valor exacto, debemos expresar $\pi/12$ como una suma o diferencia de los ángulos especiales 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ ó $\pi/2$. Mediante el proceso de ensayo y error, encontramos que $\pi/12 = \pi/4 - \pi/6$ y que $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$. Con la primera de estas expresiones y la fórmula de la diferencia para tangente, obtenemos

$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$$

4-6 | 3
4 2 | 2
2 1 | 2

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}\cdot\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \quad \Leftarrow \boxed{\text{Racionalizando el denominador}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

Usted debe reformular este ejemplo utilizando $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$ para ver que el resultado es el mismo.

EJEMPLO 5

Encuentre el valor exacto de tan 105°.

Solución. Como $105° = 45° + 60°$, utilizamos la fórmula de la suma para tangente para obtener

$$\tan 105° = \tan (45° + 60°)$$

$$= \frac{\tan 45° + \tan 60°}{1 - \tan 45° \tan 60°}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - (1)(\sqrt{3})} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{-2}$$

$$= \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{(-2)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{(-2)} = -2 - \sqrt{3}$$

Muchas de las propiedades especiales de las funciones trigonométricas estudiadas en la sección 7.1 pueden verificarse por medio de las fórmulas de la suma y de la diferencia.

EJEMPLO 6

Verifique cada uno de los siguientes casos:

(a) $\operatorname{sen} (\pi - t) = \operatorname{sen} t$

(b) $\tan (u + \pi) = \tan u$

Solución

(a) La fórmula de la diferencia para seno nos da

$$\operatorname{sen} (\pi - t) = \operatorname{sen} \pi \cos t - \cos \pi \operatorname{sen} t$$
$$= (0)(\cos t) - (-1)(\operatorname{sen} t) = \operatorname{sen} t$$

(b) Según la fórmula de la suma para tangente tenemos

$$\tan (u + \pi) = \frac{\tan u + \tan \pi}{1 - \tan u \tan \pi} = \tan u$$

pues $\tan \pi = 0$

Una combinación lineal del seno y coseno del mismo valor puede convertirse en una expresión que sólo contenga al seno, de la siguiente manera:

Reducción de $a_1 \operatorname{sen} bt + a_2 \cos bt$ a $A \operatorname{sen}(bt + \phi)$

Para cualesquiera números reales a_1, a_2, b y t

$$a_1 \operatorname{sen} bt + a_2 \cos bt = A \operatorname{sen}(bt + \phi) \tag{4}$$

donde $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\operatorname{sen} \phi = a_2/A$, y $\cos \phi = a_1/A$.

Para verificar esto, usamos la fórmula de la suma para sen $(u + v)$ con $u = bt$ y $v = \phi$ obteniendo

$$\begin{aligned} A \operatorname{sen}(bt + \phi) &= A \operatorname{sen} bt \cos \phi + A \cos bt \operatorname{sen} \phi \\ &= (A \operatorname{sen} \phi) \cos bt + (A \cos \phi) \operatorname{sen} bt \end{aligned} \tag{5}$$

Ahora, como se observa en la figura 39, el ángulo ϕ se define como el ángulo en posición normal con el punto (a_1, a_2) en su lado terminal.

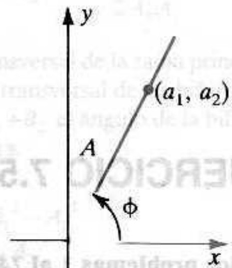


FIGURA 39

Se deduce que

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{a_2}{A} \quad \text{y} \quad \cos \phi = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{a_1}{A}$$

Así, (5) llega a ser

$$\begin{aligned} A \operatorname{sen}(bt + \phi) &= A\left(\frac{a_2}{A}\right) \cos bt + A\left(\frac{a_1}{A}\right) \operatorname{sen} bt \\ &= a_1 \operatorname{sen} bt + a_2 \cos bt \end{aligned}$$

También es posible escribir la suma del seno y coseno del mismo valor como un solo coseno. Véase problema 49.

EJEMPLO 7

Trace la gráfica de $y = -\sqrt{3} \operatorname{sen} 2t + \cos 2t$.

Solución. Podemos sumar las coordenadas y para obtener la gráfica. Sin embargo, como $2t$ aparece en ambos términos, usaremos (4) para expresar y como una sola función seno.

Con $a_1 = -\sqrt{3}$, $a_2 = 1$, y $b = 2$, tenemos

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{a_2}{A} = \frac{1}{2}, \quad \text{y} \quad \cos \phi = \frac{a_1}{A} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

De esta manera, ϕ es el ángulo $5\pi/6$ del cuadrante II. Por tanto $y = -\sqrt{3} \operatorname{sen} 2t + \cos 2t$ puede escribirse así:

$$y = 2 \operatorname{sen}\left(2t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

En consecuencia, la gráfica es la curva del seno con amplitud $= 2$, periodo $2\pi/2 = \pi$ y el desplazamiento de fase $-5\pi/12$, como se observa en la figura 40.

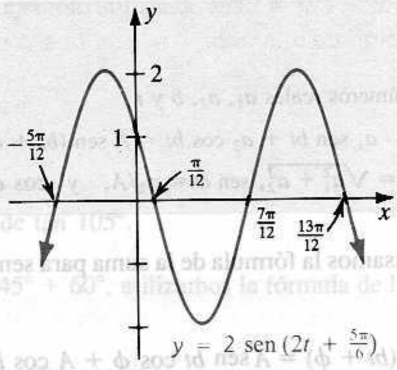


FIGURA 40

Como mencionamos anteriormente, las fórmulas trigonométricas presentadas en esta sección tienen una variedad de aplicaciones en cálculo, ciencias biológicas y físicas e ingeniería. Algunas de esas aplicaciones se analizan en los problemas 51 al 54.

EJERCICIO 7.5

En los problemas 1 al 24, utilice la fórmula de la suma o de la diferencia más apropiada para hallar el valor exacto de la expresión.

1. sen 15° **2.** cos 15°

3. sen 105° **4.** cos 105°

5. $\text{sen}\,\frac{7}{12}\pi$ **6.** $\cos\frac{7}{12}\pi$

7. $\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ **8.** $\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$

9. $\tan\frac{\pi}{12}$ **10.** $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

11. $\text{sen}\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ **12.** $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$

13. tan 345° **14.** sen 195°

15. tan 75° **16.** cos −165°

17. $\text{sen}\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$ **18.** $\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$

19. $\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$ **20.** cos 285°

21. $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ **22.** $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

23. sen −345° **24.** sen 285°

En los problemas 25 al 40, utilice la fórmula más apropiada de la suma o de la diferencia para verificar la identidad.

25. $\cos(t+\pi) = -\cos t$ **26.** $\text{sen}\,(t+\pi) = -\text{sen}\,t$

27. $\cos(t+\pi/2) = -\text{sen}\,t$ **28.** $\text{sen}\,(t+\pi/2) = \cos t$

29. $\tan t(t+\pi) = \tan t$ **30.** $\tan(t+\pi/2) = -\cot t$

31. $\text{sen}\,(t+3\pi/2) = -\cos t$ **32.** $\cos(t+3\pi/2) = \text{sen}\,t$

33. $\cos(t-\pi) = -\cos t$ **34.** $\text{sen}\,(t-\pi) = -\text{sen}\,t$

35. $\cos(t-\pi/2) = \text{sen}\,t$ **36.** $\text{sen}\,(t-\pi/2) = -\cos t$

37. $\text{sen}\,(t-3\pi/2) = \cos t$ **38.** $\cos(t-3\pi/2) = -\text{sen}\,t$

39. $\text{sen}\,(t+\pi/4) = \sqrt{2}/2\,(\text{sen}\,t + \cos t)$

40. $\cos(t-\pi/4) = \sqrt{2}/2\,(\cos t + \text{sen}\,t)$

41. Verifique que:

$$\frac{\text{sen}\,(x+h)-\text{sen}\,x}{h} = \text{sen}\,x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\text{sen}\,h}{h}\right)$$

42. Basándose en el resultado del problema 1 y en la identidad $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, halle el valor exacto de cos 15°. Demuestre que su resultado es el mismo que el obtenido en el problema 2.

43. Con el resultado del problema 5 y la identidad $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$, halle el valor exacto de $\cos 7\pi/12$. Verifique que su resultado es el mismo que el obtenido en el problema 6.

44. Si $\text{sen}\,u = 12/13$ y $\cos v = 3/5$, donde $0 \le u \le \pi/2$ y $0 \le v \le \pi/2$, halle:

(a) $\text{sen}\,(u+v)$ **(b)** $\cos(u+v)$

(c) $\tan(u-v)$

45. Si P_u y P_v son puntos situados en el cuadrante II en el lado terminal de u y v respectivamente, con $\cos u = -2/3$ y $\text{sen}\,v = 1/3$, halle:

(a) $\text{sen}\,(u+v)$ **(b)** $\cos(u+v)$

(c) $\text{sen}\,(u-v)$ **(d)** $\cos(u-v)$

¿En qué cuadrantes se ubican P_{u+v} y P_{u-v}?

46. Si u y v son ángulos en posición normal con sus lados terminales en los cuadrantes III y II respectivamente, y si $\tan u = 3/4$ y $\text{sen}\ v = 8/17$, halle:

(a) $\text{sen}\,(v+u)$ **(b)** $\text{sen}\,(v-u)$

(c) $\cos(v+u)$ **(d)** $\cos(v-u)$

¿En qué cuadrante se sitúa el lado terminal de $v+u$? ¿Y el lado terminal de $v-u$?

En los problemas 47 al 50, reformule la ecuación dada en la forma $y = A$ sen $(bt + \phi)$. Trace la gráfica y determine la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase.

47. $y = \cos \pi t/2 - \text{sen}\, \pi t/2$ **48.** $y = \text{sen}\, \pi t - \sqrt{3} \cos \pi t$

49. $y = \sqrt{3}\, \text{sen}\ 3t + \cos 3t$ **50.** $y = \cos t/2 - \sqrt{3}\, \text{sen}\, t/2$

51. Demuestre que

$$y = a_1 \text{ sen } bt + a_2 \cos bt = A \cos (bt + \phi)$$

donde $A = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$, sen $\phi = -a_1/A$, y $\cos \phi = a_2/A$.

52. Basándose en el problema 51 reformule cada ecuación dada en los problemas del 47 al 50 en la forma $y = A \cos (bt + \phi)$.

53. Por medio de ecuaciones diferenciales puede demostrarse que, en ciertas condiciones, el movimiento de una masa que cuelga de un resorte es dado por

$$y(t) = \frac{2}{3} \cos 8t - \frac{1}{6} \text{ sen } 8t$$

donde y es la distancia en pies, por debajo del punto de equilibrio (punto de reposo) en un tiempo de t segundos. Determine a y ϕ tal que $y(t) = a$ sen $(8t + \phi)$.

54. En ciertas condiciones, la ecuación del movimiento de una cuerda en vibración estirada entre dos puntos sobre el eje x es

$$y = A \text{ sen } (\omega t - kx) - A \text{ sen } (\omega t + kx)$$

donde t es el tiempo y A, ω y k son constantes. Demuestre que y puede representarse de la forma equivalente

$$y = -2A \cos \omega t \text{ sen } kx$$

55. Considere la presencia de una onda eléctrica que viaja en un plano. Una forma de determinar la dirección de la onda eléctrica es midiendo su hora de llegada en un sistema de estaciones tripartitas, suponiendo que la onda viaja a una velocidad constante. Suponga que la onda llega a la estación A en un tiempo t_1, a la estación B en t_2, y a la estación C en t_3. Sean α, β y γ los ángulos del triángulo formado por las tres estaciones, como se observa en la figura 41. El ángulo ϕ que el frente de la onda forma con la línea AB puede determinarse así:

(a) Demuestre que

$$R = \frac{b \text{ sen } (\phi + \alpha)}{c \text{ sen } \phi}, \text{ donde } R = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1}$$

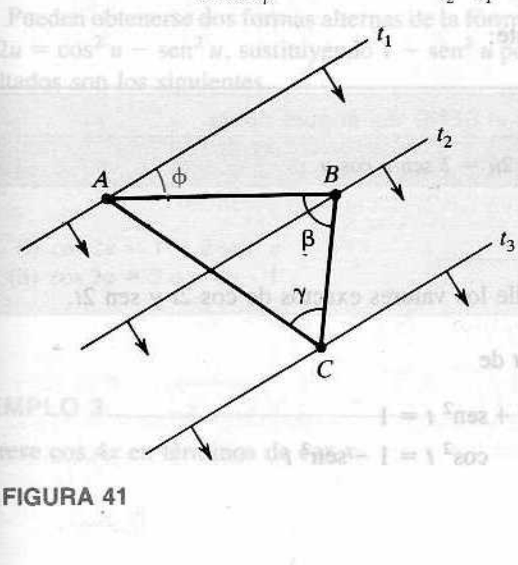


FIGURA 41

(b) concluya que

$$\cot \phi = \frac{R \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta} - \cot \alpha$$

(Las estaciones tripartitas se utilizan con frecuencia para localizar la fuente de microsismos, que son pequeños movimientos de la Tierra no causados por terremotos. Los huracanes, por ejemplo, son una fuente de microsismos).

56. Un modelo matemático para describir el flujo de la sangre predice que los valores óptimos de los ángulos θ_1 y θ_2, que representan los ángulos (positivos) de las bifurcaciones con respecto al eje de la rama principal se dan por:

$$\cos \theta_1 = \frac{A_0^{\,2} + A_1^{\,2} - A_2^{\,2}}{2A_0A_1} \quad \text{y} \quad \cos \theta_2 = \frac{A_0^{\,2} - A_1^{\,2} + A_2^{\,2}}{2A_0A_2}$$

donde A_0 es el área del corte transversal de la rama principal, y A_1 y A_2 son las áreas del corte transversal de las bifurcaciones (véase figura 42). Sea $\psi = \theta_1 + \theta_2$ el ángulo de la bifurcación como se observa en la figura.

(a) Demuestre que

$$\cos \psi = \frac{A_0^{\,2} - A_1^{\,2} - A_2^{\,2}}{2A_1A_2}$$

(b) Demuestre que para los valores óptimos de θ_1 y θ_2, el área transversal de las bifurcaciones $A_1 + A_2$ es mayor o igual a la de la rama principal

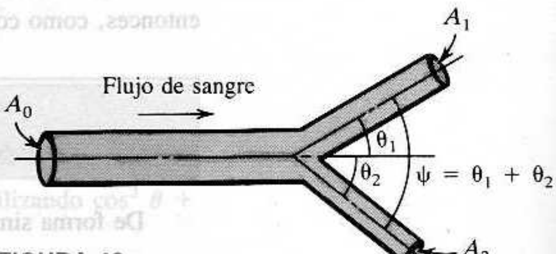


FIGURA 42

FIGURA 42

(por tanto, la sangre debe fluir más despacio en las bifurcaciones).

57. Explique por qué se obtiene un mensaje de error en la calculadora cuando se trata de evaluar $\dfrac{\tan 35° + \tan 55°}{1 - \tan 35° \tan 55°}$

58. Deduzca la fórmula de la diferencia para la función tangente.

59. Sean $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$ dos rectas no perpendiculares tales que el ángulo α que va desde la primera recta a la segunda en sentido contrario a las manecillas del reloj, es el menor ángulo positivo entre las rectas. Pruebe que:

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$$

60. Considere un triángulo no rectángulo con ángulos interiores α, β y γ. Pruebe que

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

7.6 Fórmulas del ángulo doble y del ángulo medio

Se pueden obtener muchas fórmulas útiles a partir de las fórmulas de la suma analizadas en la sección anterior. En esta sección las utilizaremos para derivar las **fórmulas del ángulo doble y del ángulo medio**, llamados así porque expresan funciones trigonométricas de $2t$ y $t/2$, en términos de funciones trigonométricas de t. Las fórmulas se aplican a cualquier número real t, así como a cualquier ángulo t medido en grados o radianes.

LAS FORMULAS DEL ANGULO DOBLE

Las siguientes dos fórmulas son casos especiales de las fórmulas de la suma para el seno y el coseno. Si $v = u$ en

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

entonces, como $\cos(u + u) = \cos 2u$ obtenemos el siguiente resultado:

Fórmula para el COSENO del ángulo doble

$$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$$

De forma similar, remplazando $v = u$ en la fórmula para $\operatorname{sen}(u + v)$, tenemos

$$\operatorname{sen}(u + u) = \operatorname{sen} u \cos u + \cos u \operatorname{sen} u$$

Simplificando, obtenemos lo siguiente:

Fórmula para el SENO del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$$

EJEMPLO 1

Si $\operatorname{sen} t = -\frac{1}{4}$ y $\pi < t < 3\pi/2$, halle los valores exactos de $\cos 2t$ y $\operatorname{sen} 2t$.

Solución. Primero calculamos $\cos t$ de

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

$$\cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t$$

Como $\pi < t < 3\pi/2$, escogemos la raíz cuadrada negativa:

$$\cos t = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}$$
$$= -\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

De las fórmulas para el ángulo doble obtenemos

$$\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$$
$$= \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2$$
$$= \frac{15}{16} - \frac{1}{16}$$
$$= \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

y

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$$
$$= 2\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

EJEMPLO 2

Exprese sen 3θ en términos de sen θ.

Solución. Como $3\theta = 2\theta + \theta$, primero usamos la fórmula de la suma para el seno y luego las fórmulas para el ángulo doble:

$$\operatorname{sen} 3\theta = \operatorname{sen}(2\theta + \theta) = \operatorname{sen} 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \operatorname{sen}\theta$$
$$= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\theta + (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\operatorname{sen}\theta$$
$$= 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta + \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta$$
$$= 3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta$$
$$= 3(1-\operatorname{sen}^2\theta)\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta.$$

Nótese que en la última línea $\cos^2\theta$ se remplazó por $1 - \operatorname{sen}^2\theta$, utilizando $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$.

Pueden obtenerse dos formas alternas de la fórmula para el coseno del ángulo doble de $\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$, sustituyendo $1 - \operatorname{sen}^2 u$ por $\cos^2 u$ y $1 - \cos^2 u$ por $\operatorname{sen}^2 u$. Los resultados son los siguientes.

Formas alternas
fórmulas para el COSENO del ángulo doble

(i) $\cos 2u = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u$
(ii) $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$

EJEMPLO 3

Exprese cos $4x$ en términos de cos x.

Solución. Por la forma (ii) con $u = 2x$, tenemos

$$\cos 4x = \cos 2(2x) = 2\cos^2 2x - 1 = 2(\cos 2x)^2 - 1$$

y utilizando la forma (ii) con $u = x$, obtenemos

$$\begin{aligned}\cos 4x &= 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) - 1\\ &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1\end{aligned}$$

Las formas alternas de la fórmula para el coseno del ángulo doble son fuente de dos **fórmulas para el ángulo medio.** Despejando (i) para $\operatorname{sen}^2 u$ resulta:

$$\begin{aligned}2\operatorname{sen}^2 u &= 1 - \cos 2u\\ \operatorname{sen}^2 u &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2u)\end{aligned}$$

Si $t = 2u$, obtenemos lo siguiente:

Fórmula para el SENO del ángulo medio

$$\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos t)$$

De forma similar, la fórmula para el coseno del ángulo medio puede deducirse de (ii) (véase problema 43).

Fórmula para el COSENO del ángulo medio

$$\cos^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos t)$$

EJEMPLO 4

Encuentre el valor exacto de sen $(5\pi/8)$ y cos $(5\pi/8)$.

Solución. Si $t = 5\pi/4$, entonces $t/2 = 5\pi/8$ y de la fórmula para el ángulo medio resulta

$$\operatorname{sen}^2 \frac{5\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

y

$$\cos^2 \frac{5\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Como $5\pi/8$ radianes es un ángulo del cuadrante II, sen $(5\pi/8) > 0$ y cos $(5\pi/8) < 0$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

y

$$\cos\frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Las formas alternas de las fórmulas para el ángulo medio pueden obtenerse tomando las raíces cuadradas de cada lado de las fórmulas del seno y coseno del ángulo medio.

Formas alternas: Fórmulas para el SENO y COSENO de ángulos medios

(i) $\operatorname{sen}\frac{t}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}$

(ii) $\cos\frac{t}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}$

En estas formas (como se ve en el ejemplo 4), la elección del signo algebraico depende del cuadrante en el que esté situado el lado terminal del ángulo $t/2$.

Si tomamos $u = v$ en la fórmula de la suma para $\tan(u + v)$, tenemos

$$\tan(u+u) = \frac{\tan u + \tan u}{1 - \tan u \tan u} = \frac{2\tan u}{1-\tan^2 u}$$

Este resultado es la fórmula para la función tangente del ángulo doble:

Fórmula para la TANGENTE del ángulo doble

$$\tan 2u = \frac{2\tan u}{1-\tan^2 u}$$

EJEMPLO 5

Verifique la identidad

$$\tan 2t = \frac{2\tan t}{2-\sec^2 t}$$

Solución. Usamos la fórmula para la tangente del ángulo doble para reformular el lado izquierdo de la identidad:

$$\tan 2t = \frac{2\tan t}{1-\tan^2 t}$$

$$= \frac{2\tan t}{1-(\sec^2 t - 1)}$$

$$= \frac{2\tan t}{2-\sec^2 t}$$

La primera de las siguientes fórmulas para la tangente de ángulo medio puede obtenerse dividiendo las fórmulas correspondientes por seno y coseno y simplificando.

Fórmulas para la TANGENTE del ángulo medio

(i) $\tan^2 \dfrac{t}{2} = \dfrac{1 - \cos t}{1 + \cos t}$

Formas alternas

(ii) $\tan \dfrac{t}{2} = \dfrac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t}$

(iii) $\tan \dfrac{t}{2} = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}$

Para obtener (ii), primero escribimos

$$\tan \frac{t}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} \tag{6}$$

Deseamos demostrar que esto equivale a $(1 - \cos t)/\operatorname{sen} t$. Obtendremos $\operatorname{sen} t$ en el denominador de (6), si multiplicamos $\cos (t/2)$ por $2 \operatorname{sen} (t/2)$ y utilizamos la fórmula para el seno de ángulo doble:

$$\tan \frac{t}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \operatorname{sen} \frac{t}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}{\operatorname{sen} t}$$

Finalmente, de la fórmula de ángulo medio $\operatorname{sen}^2 (t/2) = 1/2\ (1 - \cos t)$, tenemos

$$\tan \frac{t}{2} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}{\operatorname{sen} t} = \frac{2\left[\frac{1}{2}(1 - \cos t)\right]}{\operatorname{sen} t}$$

$$= \frac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t}$$

EJEMPLO 6

Encuentre el valor exacto de $\tan 22.5°$.

Solución. Usando la fórmula (ii) para $\tan (t/2)$ y basados en el hecho de que $22.5° = \frac{1}{2}(45°)$, encontramos que 22.5

$$\tan 22.5° = \frac{1 - \cos 45°}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{1 - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

EJEMPLO 7

Dados $\cos\theta = -\frac{3}{5}$, $90° < \theta < 180°$, halle los valores exactos de $\tan 2\theta$ y $\tan(\theta/2)$.

Solución Primero usamos $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$ para hallar

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\tfrac{3}{5}\right)^2 = \tfrac{16}{25}$$

Como $90° < \theta < 180°$, tomamos la raíz cuadrada positiva

$$\operatorname{sen}\theta = \tfrac{4}{5}$$

Por tanto, $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta = -\frac{4}{3}$. Ahora, utilizando la fórmula para la tangente del ángulo doble, obtenemos

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

De la fórmula para la tangente del ángulo medio (iii) hallamos

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)} = 2$$

EJERCICIO 7.6

En los problemas 1 al 6, utilice las fórmulas del ángulo doble para escribir la expresión dada como una sola función trigonométrica del ángulo doble.

1. $4\cos 2\alpha \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$ **2.** $\cos^2 3t - \operatorname{sen}^2 3t$

3. $1 - 2\cos^2 \pi/7$ **4.** $4 - 8\operatorname{sen}^2(17/2x)$

5. $\dfrac{\tan 5t}{1-\tan^2 5t}$ **6.** $4\operatorname{sen} x/2 \cos x/2$

En los problemas 7 al 12, use la información dada para hallar (a) cos 2*t* (b) sen 2*t* (c) tan 2*t*

7. $\operatorname{sen} t = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\pi/2 < t < \pi$ **8.** $\operatorname{sen} t = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $3\pi/2 < t < 2\pi$

9. $\tan t = \dfrac{2}{3}$, $0 < t < \pi/2$ **10.** $\csc t = -2$, $3\pi/2 < t < 2\pi$

11. $\sec t = -\dfrac{11}{5}$, $\pi/2 < t < \pi$ **12.** $\cot t = \dfrac{5}{3}$, $\pi < t < 3\pi/2$

En los problemas 13 al 22, encuentre el valor exacto de la expresión dada.

13. $\operatorname{sen}\pi/8$ **14.** $\cos\pi/8$

15. $\tan 15°$ **16.** $\operatorname{sen}\pi/24$

17. $\cos 7\pi/24$ **18.** $\sec(-5\pi/8)$

19. $\operatorname{sen} 105°$ **20.** $\cos 82.5°$

21. $\tan 82.5°$ **22.** $\csc(-7\pi/8)$

En los problemas 23 al 28, use la información para hallar (a) cos *t*/2, (b) sen *t*/2, y (c) tan *t*/2.

23. $\operatorname{sen} t = 4/5$, $0 < t < \pi/2$

24. $\cos t = 12/13$, $3\pi/2 < t < 2\pi$

25. $\tan t = 4$, $\pi < t < 3\pi/2$

26. $\csc t = -3$, $\pi < t < 3\pi/2$

27. $\sec t = 5/3$, $0 < t < \pi/2$

28. $\cot t = -1/3$, $90° < t < 180°$

En los problemas 29 al 42, verifique la identidad.

29. $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

30. $\cos^4 x = 1/8\cos 4x + 1/2\cos 2x + 3/8$

31. $\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$

32. $\cot 2t = \dfrac{\cot^2 t - 1}{2\cot t}$

33. $\operatorname{sen}^2 y/2 = \dfrac{\tan y - \operatorname{sen} y}{2\tan y}$

34. $\operatorname{sen} 4y = 4\operatorname{sen} y\cos y(1 - 2\operatorname{sen}^2 y)$

35. $\cos 3\theta = \cos\theta(4\cos^2\theta - 3)$ **36.** $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{2}{\operatorname{sen} 2\theta}$

37. $\cos 2y = \dfrac{1-\tan^2 y}{1+\tan^2 y}$ **38.** $\operatorname{sen} 2z = \dfrac{2\tan z}{1+2\tan^2 z}$

39. $\cot 4z = 1/4\left[\cot z - \tan z - \dfrac{4\sec z \csc z}{\csc^2 z - \sec^2 z}\right]$

40. $\tan^2 t = \dfrac{\operatorname{sen}^2 2t}{(1+\cos 2t)^2}$ **41.** $\tan 2t = \dfrac{2\cot t}{\csc^2 t - 2}$

42. $\tan x = \csc 2x - \cot 2x$

43. Deduzca la fórmula para el coseno del ángulo medio.

44. Demuestre que $\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$

En los problemas 45 al 48, determine la amplitud y el periodo de la función dada. Grafique. [*Sugerencia*: escriba la función en la forma $y = a$ sen $(bt + c)$ ó $y = a\cos(bt + c)$].

45. $y = 2 - 4\operatorname{sen}^2 t$ **46.** $y = \operatorname{sen}(t/3)\cos(t/3)$

47. $y = 3\operatorname{sen} 3t \cos 3t$ **48.** $y = 4\cos^2 5t - 4\operatorname{sen}^2 5t$

49. Una partícula se mueve hacia adelante y hacia atrás a lo largo del eje x, con una distancia d del origen a un tiempo de t segundos dada por

$$d = 8\cos^2 4t - 4$$

(a) Demuestre que el movimiento es armónico simple, expresando d en la forma $d = a\operatorname{sen}(bt + c)$.

(b) Determine la amplitud y el periodo del movimiento.

50. Una partícula se mueve desde el punto P hasta el punto Q por la línea quebrada que muestra la figura 43. Pruebe que la distancia recorrida por la partícula es $h\tan(\alpha/2)$

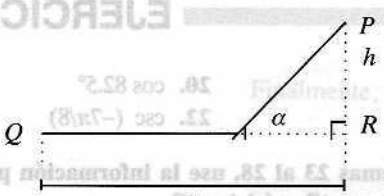


FIGURA 43

51. La razón de la velocidad de un aeroplano a la velocidad del sonido se llama número Mach, "M", del avión. Si $M > 1$, origina ondas sonoras en forma de cono en movimiento, como se observa en la figura 44. En la intersección del cono con la tierra se escuchará un ruido. Si el ángulo vértice del cono es θ, entonces

$$\operatorname{sen}(\theta/2) = 1/M$$

Si $\theta = \pi/4$, halle el valor exacto del número Mach.

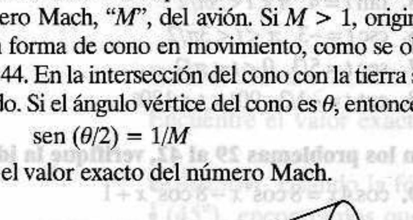


FIGURA 44

52. Un observador al nivel del suelo, situado a 120 metros de la base de un edificio, tiene un ángulo de elevación θ a la cima del edificio. Otro observador que se encuentra entre el primero y el edificio, a 40 metros de la base del edificio, tiene un ángulo de elevación 2θ a la cima del edificio. Determine la altura del edificio.

53. Encuentre el valor de "a" en la figura 45.

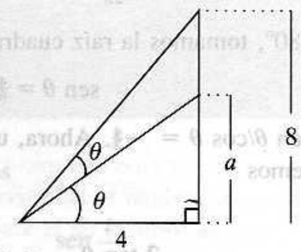


FIGURA 45

54. Determine el valor de "a" en la figura 46.

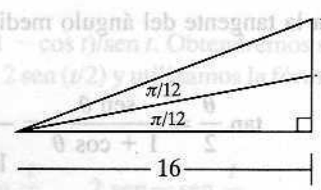


FIGURA 46

55. Si un proyectil, como en el lanzamiento de bala, es arrojado desde una altura h hacia arriba en un ángulo ϕ con una velocidad v_0, el alcance R con el que cae al piso es dado por la fórmula

$$R = \frac{v_0^2\cos\phi}{g}\left(\operatorname{sen}\phi + \sqrt{\operatorname{sen}^2\phi + (2gh/v_0^2)}\right)$$

donde g es la aceleración a causa de la gravedad (véase figura 47). Puede demostrarse que el máximo alcance R_{max} se logra si el ángulo ϕ satisface la ecuación

$$\cos 2\phi = \frac{gh}{v_0^2 + gh}$$

Usando estas expresiones para R y $\cos 2\phi$, y las fórmulas para seno y coseno del ángulo medio con $t = 2\phi$, demuestre que

$$R_{max} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

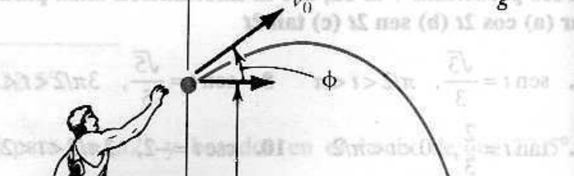


FIGURA 47

7.7 Fórmulas de producto y de suma

Ahora analizaremos las **fórmulas de producto** y **de suma** que nos permitirán escribir ciertos productos de los senos y cosenos como sumas de senos y cosenos, y viceversa.

Fórmulas de producto

(i) $\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$
(ii) $\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$
(iii) $\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$
(iv) $\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$

Probaremos (i) y dejaremos la verificación de las fórmulas de la (ii) a la (iv) como ejercicio (véase problema 37). Comencemos aplicando las fórmulas de suma y de diferencia al lado derecho de (i) y luego simplificamos:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)] &\\ &= \tfrac{1}{2}[\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v - (\cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)]\\ &= \tfrac{1}{2}[2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v] = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\end{aligned}$$

EJEMPLO 1

Utilice una fórmula de producto para reformular cada uno de los siguientes casos.

(a) $\operatorname{sen} 45° \cos 15°$
(b) $\cos 2x \cos 3x$

Solución
(a) Usando la fórmula de producto (iii) con $u = 45°$ y $v = 15°$, tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 45° \cos 15° &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(45° + 15°) + \operatorname{sen}(45° - 15°)]\\ &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen} 60° + \operatorname{sen} 30°] = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{4}\end{aligned}$$

(b) De la fórmula de producto (ii) con $u = 2x$ y $v = 3x$, obtenemos

$$\begin{aligned}\cos 2x \cos 3x &= \tfrac{1}{2}[\cos(2x - 3x) + \cos(2x + 3x)]\\ &= \tfrac{1}{2}[\cos(-x) + \cos 5x] = \tfrac{1}{2}[\cos x + \cos 5x]\end{aligned}$$

EJEMPLO 2

Trace la gráfica de

$$y = 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$$

Solución. Usando la fórmula (ii) con $u = x/2$ y $v = 3x/2$, hallamos que

$$2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = (2)\left(\frac{1}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{3x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3x}{2}\right)\right]$$
$$= \cos(-x) + \cos 2x = \cos x + \cos 2x$$

Por tanto, la ecuación original se convierte en

$$y = \cos x + \cos 2x$$

Una vez que la expresión se escribe en forma de suma, la gráfica puede trazarse sumando las coordenadas y, como se observa en la figura 48.

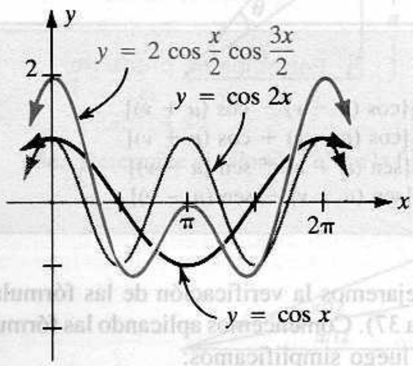


FIGURA 48

Las siguientes fórmulas nos permiten escribir sumas en forma de productos.

Fórmulas de suma

(i) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

(ii) $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$

(iii) $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

(iv) $\cos x + \cos y = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Podemos obtener estas fórmulas de las fórmulas de producto utilizando las siguientes sustituciones

$$x = u + v \quad \text{y} \quad y = u - v$$

de las que encontramos que $x + y = (u + v) + (u - v) = 2u$ o

$$u = \frac{x+y}{2}$$

De forma similar $- y = (u + v) - (u - v) = 2v$ así que

$$v = \frac{x-y}{2}$$

Con estas sustituciones de la fórmula de producto (i) obtenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)=\frac{1}{2}[\cos y-\cos x]$$

o

$$-2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)=\cos x-\cos y$$

que es la fórmula de suma (iv). De la misma forma, cada una de las fórmulas de producto restantes, junto con estas sustituciones, produce una de las fórmulas de suma. (Véase problema 38).

EJEMPLO 3

Use una de las fórmulas de la suma para replantear cada uno de los siguientes casos:

(a) $\operatorname{sen} 75^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ$

(b) $\cos t - \cos 5t$

Solución

(a) Con la fórmula de la suma (i) y con $x = 75^\circ$ y $y = 15^\circ$ tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 75^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\right)\\ &= 2\operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

(b) Con la fórmula de suma (iv) y con $x = t$ y $y = 5t$, encontramos

$$\begin{aligned}\cos t - \cos 5t &= -2\operatorname{sen}\left(\frac{t+5t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{t-5t}{2}\right)\\ &= -2\operatorname{sen} 3t\operatorname{sen}(-2t)\\ &= 2\operatorname{sen} 3t\operatorname{sen} 2t\end{aligned}$$

EJEMPLO 4

Verifique la identidad $\dfrac{\cos 10t - \cos 12t}{\operatorname{sen} 10t + \operatorname{sen} 12t} = \tan t.$

Solución. Utilizamos las fórmulas de la suma (iv) y (i) para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\cos 10t-\cos 12t}{\operatorname{sen} 10t+\operatorname{sen} 12t} &= \frac{-2\operatorname{sen}\dfrac{10t+12t}{2}\operatorname{sen}\dfrac{10t-12t}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{10t+12t}{2}\cos\dfrac{10t-12t}{2}}\\ &= \frac{-2\operatorname{sen} 11t\operatorname{sen}(-t)}{2\operatorname{sen} 11t\cos(-t)}=\frac{-\operatorname{sen}(-t)}{\cos(-t)}\\ &= \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}=\tan t\end{aligned}$$

Se puede consultar fácilmente la lista completa de fórmulas trigonométricas que hemos considerado aquí y en el capítulo 6, en una de las portadas de este texto.

EJERCICIO 7.7

En los problemas 1 al 10, utilice una fórmula de producto para replantear la expresión dada.

1. $\cos\dfrac{7\pi}{12}\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{12}$ **2.** $\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{12}\cos\dfrac{5\pi}{12}$

3. sen 105° sen 15° **4.** cos 15° cos 75°

5. $\operatorname{sen} 4x \cos 8x$ **6.** $\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 6x$

7. $\cos 7\theta \operatorname{sen} 3\theta$ **8.** $\cos 6\theta \cos 4\theta$

9. $\operatorname{sen} 7x/3 \cos x/3$ **10.** $\operatorname{sen} x/4 \operatorname{sen} 7x/4$

En los problemas 11 al 16, escriba el producto en forma de suma y luego trace la gráfica de la función dada, sumando las coordenadas *y*.

11. $y = \operatorname{sen} 2t \cos t$

12. $y = 3 \cos 6x \operatorname{sen} 2x$

13. $y = 6 \operatorname{sen} 3x/2 \operatorname{sen} 5x/2$

14. $y = -\cos \pi\theta/2 \cos 3\pi\theta/2$

15. $y = -3 \cos 4\theta \operatorname{sen} 2\theta$

16. $y = 8 \operatorname{sen} 11t/2 \cos 3t/2$

En los problemas 17 al 26, utilice una fórmula de la suma con el fin de replantear la expresión dada.

17. $\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{12}+\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}$ **18.** $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}-\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{12}$

19. cos 75° − cos 15° **20.** cos 105° + cos 15°

21. $\operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 6y$ **22.** $\cos 5\theta - \cos 3\theta$

23. $\cos 3\theta + \cos\theta$ **24.** $\operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 6y$

25. $\operatorname{sen} at - \operatorname{sen} bt$ **26.** $\cos(\theta+\phi) + \cos\theta$

En los problemas 27 al 36, utilice las fórmulas de producto y de suma con el fin de verificar la expresión dada.

27. $2\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)=\cos 2x$

28. $\dfrac{\cos 7\theta+\cos\theta}{\operatorname{sen} 7\theta+\operatorname{sen}\theta}=\cot 4\theta$

29. $\dfrac{\cos 4x-\cos 12x}{\operatorname{sen} 12x+\operatorname{sen} 4x}=\tan 4x$

30. $\cos\left(\dfrac{x+y}{6}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{6}\right)=1/2\,(\cos x/3+\cos y/3)$

31. $\operatorname{sen}(t+3\pi/2)\cos(t-3\pi/2)=1/2\operatorname{sen} 2t$

32. $\tan(x+y)=\dfrac{\cos 2x-\cos 2y}{\operatorname{sen} 2y-\operatorname{sen} 2x}$

33. $\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\dfrac{2}{h}\operatorname{sen}(x+h/2)\operatorname{sen}(h/2)$

34. $\tan x=\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}+\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}\dfrac{3}{2}x}{\cos\dfrac{x}{2}+\cos x+\cos\dfrac{3}{2}x}$

35. $\dfrac{\tan(x-y)}{\tan(x+y)}=\dfrac{\operatorname{sen} 2x-\operatorname{sen} 2y}{\operatorname{sen} 2x+\operatorname{sen} 2y}$

36. $2\cos 4t\cos 3t-\cos 7t=\cos t$

37. Verifique las fórmulas de producto de la (ii) a la (iv).

38. Verifique las fórmulas de la suma de la (i) a la (iii).

39. Una nota producida por cierto instrumento musical genera una onda sonora descrita por

$$f(t)=0.03\operatorname{sen} 500\pi t+0.03\operatorname{sen} 1{,}000\pi t$$

donde $f(t)$ es la diferencia entre la presión atmosférica y la presión del aire, medida en dinas por centímetro cuadrado en el tímpano, después de t segundos. Exprese f como el producto de una función seno y coseno.

40. Si dos cuerdas de un piano golpeadas por la misma tecla están levemente fuera de tono, la diferencia entre la presión atmosférica y la del aire en el tímpano puede representarse por

$$f(t)=a\cos 2\pi b_1 t+a\cos 2\pi b_2 t$$

donde el valor de la constante b_1 se acerca a la constante b_2. Las variaciones que se dan en la sonoridad se llaman **compás** (véase figura 49). Las dos cuerdas pueden entonarse en la misma frecuencia, sujetando una de ellas mientras suenan ambas, hasta que el compás desaparezca.

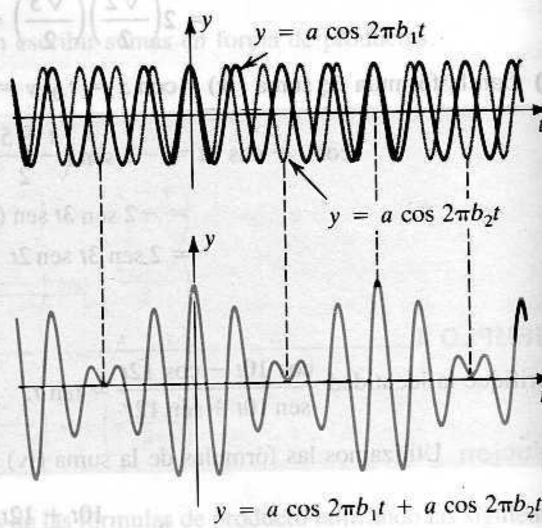


FIGURA 49

(a) Utilice una fórmula de la suma para escribir $f(t)$ como producto.

(b) Demuestre que $f(t)$ puede ser considerado como una función coseno con periodo $(b_1 + b_2)$ y una amplitud variable $2a\cos\pi(b_1-b_2)t$.

41. El término $\operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}(\omega t+\phi)$ se encuentra en la deducción de una expresión para la energía de un círculo de corriente alterna. Demuestre que este término puede escribirse de la forma

$$1/2[\cos\phi-\cos(2\omega t+\phi)]$$

7.8 Ecuaciones trigonométricas

En esta sección analizaremos las técnicas para resolver ecuaciones relacionadas con funciones trigonométricas. Ecuaciones tales como

$$\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{7}$$

y

$$4 \operatorname{sen}^2 t - 8 \operatorname{sen} t + 3 = 0$$

se llaman **ecuaciones trigonométricas.**

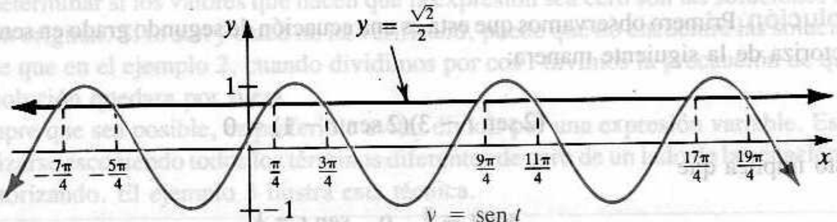


FIGURA 50

Las ecuaciones trigonométricas suelen ser condicionales. Recordemos de la sección 2.1 que, a diferencia de las identidades, las ecuaciones condicionales son verdaderas sólo para ciertos valores en el dominio de la variable.

Consideremos el problema de encontrar *todos* los números reales t que satisfagan $\operatorname{sen} t = \sqrt{2}/2$. Como se observa en la figura 50, existe un número infinito de soluciones

$$\ldots, -\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \ldots \tag{8}$$

y

$$\ldots, -\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{19\pi}{4}, \ldots$$

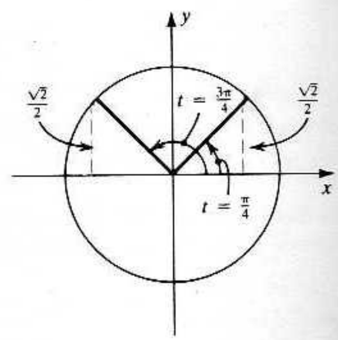


FIGURA 51

Nótese que en (8) cada solución puede obtenerse sumando 2π al resultado anterior. Desde luego, esta es una consecuencia de la periodicidad de la función seno. En general, las ecuaciones trigonométricas tienen infinidad de soluciones debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas.

Para obtener las soluciones de una ecuación como $\operatorname{sen} t = \sqrt{2}/2$, es más conveniente utilizar una circunferencia unitaria y ángulos de referencia, antes que la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$. Como $\operatorname{sen} t = \sqrt{2}/2$, el ángulo de referencia para t es $\pi/4$ radianes. El hecho de que el valor $\operatorname{sen} t = \sqrt{2}/2$ sea positivo implica que el ángulo de t radianes puede estar en el cuadrante I o II. De esta forma, como se observa en la figura 51, las únicas soluciones entre 0 y 2π son

$$t = \frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad t = \frac{3\pi}{4}$$

Como la función seno es periódica, con un periodo de 2π, todas las otras soluciones pueden obtenerse sumando los múltiplos enteros de 2π a estas soluciones:

$$t = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{o} \quad t = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Cuando enfrentamos una ecuación más complicada como

$$4 \operatorname{sen}^2 t - 8 \operatorname{sen} t + 3 = 0$$

el método básico es resolverla como una sola función trigonométrica (en este caso sería sen t), por medio de métodos similares a los utilizados para resolver ecuaciones algebraicas. Luego, los valores del ángulo se determinan utilizando la circunferencia unitaria y los ángulos de referencia. El siguiente ejemplo ilustra esta técnica.

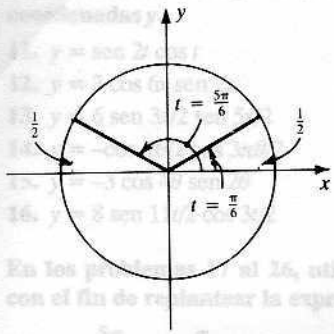


FIGURA 52

EJEMPLO 1

Encuentre todas las soluciones de $4 \operatorname{sen}^2 t - 8 \operatorname{sen} t + 3 = 0$.

Solución. Primero observamos que esta es una ecuación de segundo grado en sen t y que se factoriza de la siguiente manera:

$$(2 \operatorname{sen} t - 3)(2 \operatorname{sen} t - 1) = 0$$

Esto implica que

$$\operatorname{sen} t = \tfrac{3}{2} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} t = \tfrac{1}{2}$$

La primera ecuación no tiene solución, pues $|\operatorname{sen} t| \leq 1$. Como se observa en la figura 52, los dos ángulos entre 0 y 2π con seno igual a $\frac{1}{2}$ son

$$t = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad t = \frac{5\pi}{6}$$

Por tanto, mediante la periodicidad de la función seno, las soluciones son

$$t = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{y} \quad t = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

EJEMPLO 2

Resuelva

$$\operatorname{sen} t = \cos t \tag{9}$$

Solución. Dividiendo ambos lados de la ecuación por $\cos t$ resulta

$$\tan t = 1 \tag{10}$$

Esta ecuación es equivalente a (9) siempre y cuando $\cos t \neq 0$.

Observamos que si $\cos t = 0$, entonces

$$t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{o} \quad t = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$$

para cualquier número entero n. Ya que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \neq 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) \neq 0$$

estos valores de t no satisfacen la ecuación original. Así, encontraremos todas las soluciones para (9), resolviendo la ecuación (10).

Ahora, tan = 1 implica que el ángulo de referencia para t es $\pi/4$ radianes. Como $\tan t = 1 > 0$, el ángulo de t radianes puede estar situado en el cuadrante I o III, como se observa en la figura 53. Entonces, las soluciones son

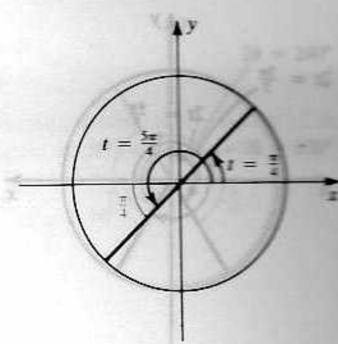


FIGURA 53

$$t = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{y} \quad t = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

o de forma equivalente

$$t = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Nota de advertencia: si usted divide por una expresión que contenga una variable, es esencial determinar si los valores que hacen que la expresión sea cero son las soluciones de la ecuación original. Si lo son y usted no ha verificado, puede que no encuentre las soluciones. Fíjese que en el ejemplo 2, cuando dividimos por cos t tuvimos la precaución de que ninguna solución quedara por fuera.

Siempre que sea posible, es preferible evitar dividir por una expresión variable. Esto suele realizarse escogiendo todos los términos diferentes de cero de un lado de la ecuación y luego factorizando. El ejemplo 3 ilustra esta técnica.

EJEMPLO 3

Resuelva

$$2 \operatorname{sen} t \cos^2 t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t$$

Solución. En lugar de dividir por cos t escribimos la ecuación así:

$$2 \operatorname{sen} t \cos^2 t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t = 0$$

y factorizamos

$$\cos t\left(2 \operatorname{sen} t \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

De esta manera

$$\cos t = 0 \quad \text{o} \quad 2 \operatorname{sen} t \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Ahora el coseno es cero para todos los múltiplos impares de $\pi/2$, es decir

$$t = (2n + 1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En la segunda ecuación utilizamos la fórmula para ángulo doble $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$ para obtener

$$\operatorname{sen} 2t + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} 2t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

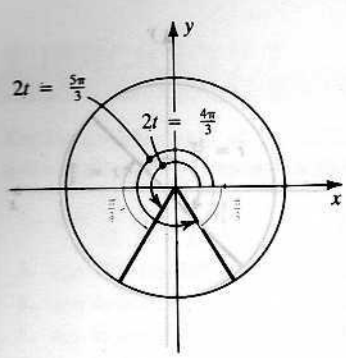


FIGURA 54

De esta manera, el ángulo de referencia para $2t$ es $\pi/3$. Como el seno es negativo, el ángulo $2t$ debe estar en el cuadrante III o IV. Como se observa en la figura 54

$$2t = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{o} \quad 2t = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$$

y en consecuencia

$$t = \frac{2\pi}{3} + n\pi \quad \text{o} \quad t = \frac{5\pi}{6} + n\pi$$

Por tanto, las soluciones son

$$t = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad t = \frac{2\pi}{3} + n\pi, \quad \text{y} \quad t = \frac{5\pi}{6} + n\pi$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En el ejemplo 3, si hubiéramos simplificado la ecuación dividiendo por $\cos t$ sin verificar los valores de t para los que $\cos t = 0$, habríamos perdido las soluciones $t = \pi/2 + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

EJEMPLO 4

Resuelva $3\cos^2 x - \cos 2x = 1$.

Solución. Observamos que la ecuación dada involucra los cosenos de x y $2x$. En consecuencia, usamos la fórmula para el ángulo doble

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

para remplazar la ecuación por una equivalente que sólo contenga $\cos x$. Encontramos que

$$3\cos^2 x - (2\cos^2 x - 1) = 1$$

o

$$\cos^2 x = 0$$

por tanto,

$$\cos x = 0$$

y las soluciones son

$$x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Hasta aquí hemos visto en esta sección la variable de la ecuación trigonométrica cuando representa un número real o un ángulo medido en radianes. Si la variable representa un ángulo medido en grados, la técnica para resolverla es la misma.

EJEMPLO 5

Resuelva $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$, donde θ es un ángulo medido en grados.

Solución. Como $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$, el ángulo de referencia para 2θ es $60°$ y el ángulo 2θ debe estar en los cuadrantes II o III. Como se observa en la figura 55

$$2\theta = 120° \quad \text{o} \quad 2\theta = 240°$$

Cualquier ángulo que sea coterminal con uno de estos ángulos podrá satisfacer cos $2\theta = -\frac{1}{2}$. Estos ángulos se obtienen sumando cualquier múltiplo de 360°. Así, tenemos

$$2\theta = 120° + 360°n \quad \text{o} \quad 2\theta = 240° + 360°n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

que, simplificada, es

$$\theta = 60° + 180°n \quad \text{o} \quad \theta = 120° + 180°n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Entonces, las soluciones son

$$\theta = 60° + 180°n \quad \text{y} \quad \theta = 120° + 180°n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

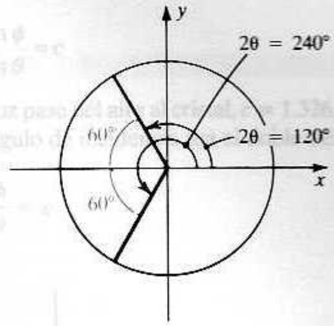


FIGURA 55

EJEMPLO 6

Encuentre todas las soluciones de

$$1 + \tan \alpha = \sec \alpha$$

donde α es un ángulo medido en grados.

Solución. La ecuación no es factorizable pero, si elevamos al cuadrado ambos lados, podemos valernos de una identidad fundamental:

$$(1 + \tan \alpha)^2 = (\sec \alpha)^2$$
$$1 + 2 \tan \alpha + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$
$$1 + 2 \tan \alpha + \tan^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$$
$$2 \tan \alpha = 0$$
$$\tan \alpha = 0$$

Los valores de α en [0°, 360°) para los que $\tan \alpha = 0$ son

$$\alpha = 0° \quad \text{y} \quad \alpha = 180°$$

Como elevamos al cuadrado cada lado de la ecuación original, podemos haber introducido soluciones extrañas. Por tanto, es importante que verifiquemos todas las soluciones en la ecuación original. Sustituyendo $\alpha = 0°$ por $1 + \tan \alpha = \sec \alpha$ obtenemos la expresión verdadera $0 + 1 = 1$. Pero, después de sustituir $\alpha = 180°$, obtenemos la expresión *falsa* $0 + 1 = -1$. Por tanto, 180° es una solución extraña y $\alpha = 0°$ es la única solución en el intervalo [0°, 360°). Entonces, las soluciones son

$$\alpha = 0° + 360°n = 360°n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

es decir, todos los ángulos que son coterminales con 0°.

Recordemos de la sección 3.5 que el proceso para hallar los intersectos x de la gráfica de una función $y = f(x)$ es equivalente al utilizado para resolver la ecuación $f(x) = 0$. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

EJEMPLO 7

Encuentre, sin graficar, los tres primeros intersectos t positivos de la gráfica de

$$f(t) = \text{sen } 2t \cos t$$

Solución. Debemos resolver $f(t) = 0$, es decir

$$\operatorname{sen} 2t \cos t = 0$$

Se deduce que $\operatorname{sen} 2t = 0$ ó $\cos t = 0$. De $\operatorname{sen} 2t = 0$ obtenemos

$$2t = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

o

$$t = \frac{n\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

De $\cos t = 0$ obtenemos

$$t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Entonces, los tres primeros intersectos t positivos son

$$t = \frac{\pi}{2}, \ \pi, \ \text{y} \ \frac{3\pi}{2}$$

EJERCICIO 7.8

En los problemas 1 al 6, encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica dada, si t representa un ángulo medido en radianes.

1. $\operatorname{sen} t = 1/2$
2. $\cos t = \sqrt{3}/2$
3. $\operatorname{sen} t = -\sqrt{2}/2$
4. $\csc t = \sqrt{2}$
5. $\cot t = -1$
6. $\sec t = 2$

En los problemas 7 al 12, encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica dada, si x representa un número real.

7. $\operatorname{sen} x = -1$
8. $2 \cos x = -1/2$
9. $\cot x = 0$
10. $\sqrt{3} \csc x = 2$
11. $-\sec x = 1$
12. $\sqrt{3} \tan x = 1$

En los problemas 13 al 18, encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica dada, si θ representa un ángulo medido en grados.

13. $\sec \theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
14. $2 \cos \theta = \sqrt{2}$
15. $\tan \theta + 1 = 0$
16. $\sqrt{3} \cos \theta = \operatorname{sen} \theta$
17. $\csc \theta = -2$
18. $2 \operatorname{sen} \theta + \sqrt{2} = 0$

En los problemas 19 al 46, encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica dada, si x es un número real y θ es un ángulo medido en grados.

19. $\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$
20. $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$
21. $3 \csc^2 x = \csc x$
22. $\cot^2 x + (\sqrt{3} - 1)\cot x - \sqrt{3} = 0$
23. $2 \operatorname{sen}^2 \theta - 3 \operatorname{sen} \theta - 2 = 0$
24. $2 \cos^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$
25. $\tan^2 \theta + \tan \theta = 0$
26. $2 \cos^2 \theta + (2 - \sqrt{3})\cos \theta - \sqrt{3} = 0$
27. $\operatorname{sen} 2x = -1$
28. $\csc 2x = 2$
29. $2 \cos 3\theta = 1$
30. $\cot 4\theta = -1$
31. $\tan (x/2) = 1$
32. $\sec (\theta/3) = -1$
33. $\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x = 0$
34. $\cos^2 x - \cos 2x = 1$
35. $\cos 4\theta = \operatorname{sen} 2\theta$
36. $\operatorname{sen} 4\theta + 2 \operatorname{sen} 2\theta - 2 \cos 2\theta = 2$
37. $\cos^4 x - 2 \cos^2 x + 1 = 0$
38. $\sec^4 \theta - 6 \tan^2 \theta + 3 = 0$
39. $\csc x \cos^2 x = \cot x$
40. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta} = 2$
41. $1 + \tan \theta = \sec \theta$

42. $\sec x + \csc x = 0$

43. $\sqrt{\dfrac{1+2\cos x}{2}} = 1$

44. $\sqrt{\cos x} - \cos x = 0$

45. $2\,\text{sen}\,x + 3\sqrt{\text{sen}\,x} = 0$

46. $\text{sen}\,\theta\sqrt{\sec^2 x - 1} = 1$

En los problemas 47 al 54, encuentre los tres primeros intersectos *t* positivos de la gráfica de la función dada.

47. $f(t) = -3\,\text{sen}\,(2t + \pi)$
48. $f(t) = 4\cos(t - \pi/2)$
49. $f(t) = 2 - \text{scs}\,(\pi/t)$
50. $f(t) = 1 + \text{sen}\,\pi t$
51. $f(t) = \cos t + \cot t$
52. $f(t) = 2\,\text{sen}\,(t + \pi/3) - 1$
53. $f(t) = \text{sen}\,t - \text{sen}\,2t$
54. $f(t) = \text{sen}\,t + \text{sen}\,3t$

En los problemas 55 al 58, determine por medio de la gráfica si la ecuación dada tiene alguna solución.

55. $\tan x - mx = 0;\ m \in \Re$
56. $\text{sen}\,x - mx = 0;\ m \in \Re$
57. $\cot x - mx = 0;\ m \in \Re$
58. $\text{sen}\,x + x^2 + 1 = 0$

59. Suponga que un objeto se mueve en una pista circular con velocidad angular constante. Si representa la pista mediante una circunferencia en un sistema rectangular de coordenadas *xy*, con el centro en el origen (0, 0), la coordenada y el objeto en cualquier tiempo *t* minutos se da por

$$y = 54\,\text{sen}\,(\pi t - \pi/12)$$

¿En qué tiempo el objeto cruza el eje *x*?

60. ¿Cuál es el ángulo del vértice del cono formado por las ondas sonoras producidas por un aeroplano que vuela a $\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$ Mach [*Sugerencia*: véase el problema 51 de la sección 7.6].

61. Un generador eléctrico produce una corriente alterna de 55 ciclos dada por $i(t) = 12\,\text{sen}\,[110\pi(t - 1/6)]$, donde $i(t)$ es la corriente medida en amperios en *t* segundos. Halle el valor positivo más pequeño de *t* para el que la corriente sea 6 amperios.

62. Si el voltaje dado por $V = V_0\,\text{sen}\,(wt + \alpha)$ se imprime en un circuito en serie, se produce una corriente alterna. Si $V_0 =$ 120 voltios, $w = 110\pi$ radianes por segundo y $\alpha = -7\pi/36$, ¿cuándo será el voltaje igual a cero?

63. Considere un rayo de luz que pasa de un medio (como el aire) a otro (como el cristal). Sea ϕ el ángulo de incidencia y θ el ángulo de refracción. Como se indica en la figura 56 estos ángulos se miden desde una recta vertical. Según la ley de Snell, hay una constante *c* que depende de los dos medios, como

$$\frac{\text{sen}\,\phi}{\text{sen}\,\theta} = c$$

Suponga que para que la luz pase del aire al cristal, $c = 1.326$. Halle ϕ y θ tales que el ángulo de incidencia sea el doble del ángulo de refracción.

$$\frac{\text{sen}\,\phi}{\text{sen}\,\theta} = c$$

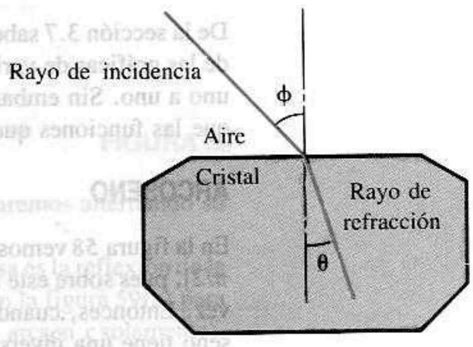


FIGURA 56

64. Dos personas se perdieron en el bosque a una milla de una carretera, en el punto *P* de la representación gráfica de la figura 57. Cada uno tomó un camino diferente; el primero alcanzó la carretera en el punto *Q* y el segundo $1 + \sqrt{3}$ millas más adelante en el punto *R*. Observe la figura, encuentre una ecuación para θ y resuélvala.

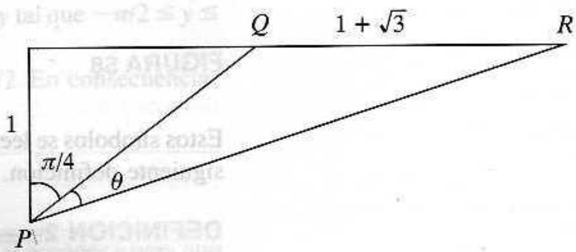


FIGURA 57

65. Sobre la base de los datos recogidos entre 1966 y 1980, la extensión de una capa de nieve *S*, medida en millones de kilómetros cuadrados en el hemisferio norte como una función de tiempo, puede aproximarse por la función

$$S(w) = 25 + 21\cos(2\pi(w - 5)/52)$$

donde *w* es el número de semanas posteriores al 1º de enero.

(a) ¿Cuánta extensión de nieve predice esta fórmula para el 1º de abril? (Aproxime *w* al número entero más cercano).

(b) ¿En qué semana predice la fórmula la menor cantidad de nieve?

(c) ¿En qué mes se producirá esta nevada?

7.9 Funciones trigonométricas inversas

De la sección 3.7 sabemos que una función tiene su inversa sólo si es uno a uno. El análisis de las gráficas de varias funciones trigonométricas demuestra claramente que éstas no son uno a uno. Sin embargo, restringiendo apropiadamente sus dominios, podemos asegurar que las funciones que resultan son uno a uno.

ARCOSENO

En la figura 58 vemos que la función $y = \text{sen}\, x$ es uno a uno en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$, pues sobre este intervalo cualquier recta horizontal interseca la gráfica a lo sumo una vez. Entonces, cuando restringimos el dominio a este intervalo en particular, la función seno tiene una inversa. Denotamos esta inversa por

$$\text{sen}^{-1}\, x, \quad \text{o} \quad \text{arcsen}\, x$$

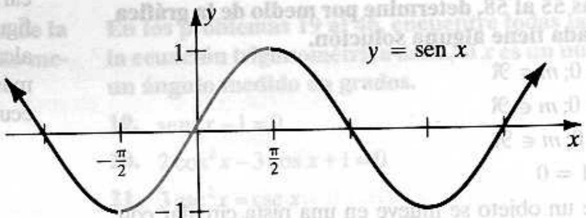


FIGURA 58

Estos símbolos se leen "seno inverso de x" y "arcoseno de x", respectivamente. Tenemos la siguiente definición.

DEFINICION 2

La función **arcoseno** o **seno inverso** se define como

$$y = \text{arcsen}\, x \text{ si y sólo si } x = \text{sen}\, y$$

donde $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ y $-1 \leq x \leq 1$.

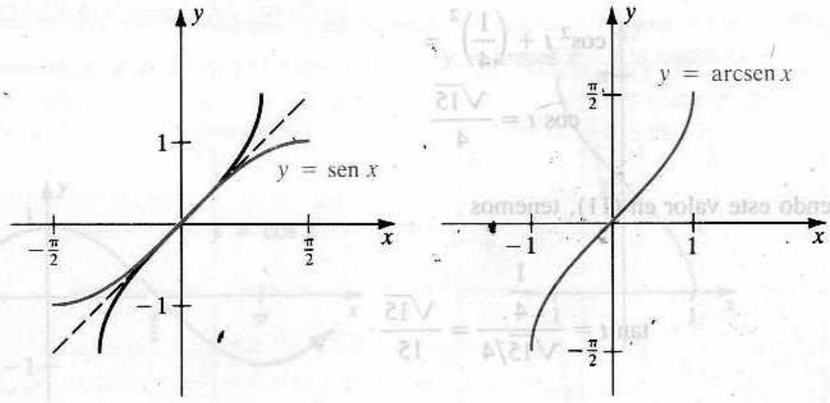
En otras palabras,

el arcoseno del número x es ese número (o ángulo medido en radianes) y entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x.

Nótese que el "-1" en $\text{sen}^{-1}\, x$ *no* es un exponente. Por el contrario, denota una función inversa, es decir,

$$(\text{sen}\, x)^{-1} = \frac{1}{\text{sen}\, x} \neq \text{sen}^{-1}\, x$$

Para evitar esta posible confusión, algunos prefieren la terminología "arcsen x" que hace referencia al "arco" o ángulo cuyo seno es x. Sin embargo, $\text{sen}^{-1} x$ y arcsen x suelen inter-



(a) (b) **FIGURA 59**

cambiarse en matemáticas y en sus aplicaciones. Por tanto, continuaremos alternando su uso hasta que usted se familiarice con ambas formas.

Recordemos de la sección 3.7 que la gráfica de una función inversa es la reflexión de la gráfica de la función dada en la recta $y = x$. Esta técnica se utiliza en la figura 59(a) para obtener la gráfica de $y = \text{arcsen}\, x$. En la figura 59(b) (que indica $y = \text{arcsen}\, x$ solamente), vemos que el dominio de arcsen x es $[-1, 1]$ y el rango es $[-\pi/2, \pi/2]$.

EJEMPLO 1

Encuentre **(a)** arcsen $\frac{1}{2}$, **(b)** $\text{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$, y **(c)** $\text{sen}^{-1}(-1)$.

Solución

(a) Si $y = \text{arcsen}\, \frac{1}{2}$, entonces $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ y $\text{sen}\, y = \frac{1}{2}$. Se deduce que $y = \pi/6$.

(b) Si $y = \text{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$, entonces $\text{sen}\, y = -\frac{1}{2}$. Como debemos escoger y tal que $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, encontramos que $y = -\pi/6$.

(c) Si $y = \text{sen}^{-1}(-1)$, tenemos que $\text{sen}\, y = -1$ y $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. En consecuencia, $y = -\pi/2$.

Nota de advertencia: en la parte (b) del ejemplo 1 tuvimos cuidado al escoger y para que $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. Es un *error común* creer que, como $\text{sen}\,(11\pi/6) = -\frac{1}{2}$, $\text{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$ es $11\pi/6$. Recuerde: si $y = \text{sen}^{-1} x$, entonces y está sujeto a la restricción $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.

EJEMPLO 2

Sin utilizar calculadora, encuentre $\tan(\text{sen}^{-1} \frac{1}{4})$.

Solución. Debemos encontrar la tangente del ángulo de t radianes, con un seno igual a $\frac{1}{4}$, es decir, $\tan t$ donde $t = \text{sen}^{-1} \frac{1}{4}$. El ángulo t se observa en la figura 60. Como

$$\tan t = \frac{\text{sen}\, t}{\cos t} = \frac{\frac{1}{4}}{\cos t} \tag{11}$$

necesitamos determinar $\cos t$. De la figura 60 y la identidad $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$, vemos que

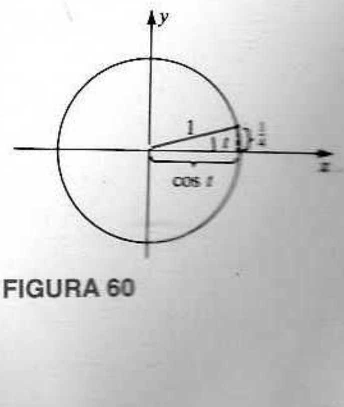


FIGURA 60

$$\cos^2 t + \left(\frac{1}{4}\right)^2 =$$

o
$$\cos t = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Sustituyendo este valor en (11), tenemos

$$\tan t = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{15}/4} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

y así

$$\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}\right) = \tan t = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Otra forma de encontrar $\tan(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4})$ es trazando un triángulo rectángulo que contenga un ángulo t para el que $t = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}$, o $\operatorname{sen} t = \frac{1}{4}$. Esto se observa en la figura 61, donde hemos dado un valor a hip = 4 y op = 1. Podemos luego encontrar ady por medio del teorema de Pitágoras:

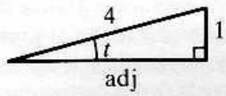


FIGURA 61

$$4^2 = 1^2 + (\text{ady})^2$$
$$\text{ady} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

Así,

$$\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}\right) = \tan t = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

ARCOCOSENO

Si restringimos el dominio de la función coseno al intervalo cerrado $[0, \pi]$, la función que resulta es uno a uno y, por tanto, tiene una inversa. Denotamos esta inversa así:

$$\cos^{-1} x, \quad \text{o} \quad \operatorname{arccos} x$$

lo que nos da la siguiente definición:

DEFINICION 3

La función **arcocoseno**, o **coseno inverso**, se define por

$$y = \operatorname{arccos} x \text{ si y sólo si } x = \cos y$$

donde $0 \le y \le \pi$ y $-1 \le x \le 1$.

Las gráficas de $y = \cos x$ en el intervalo $[0, \pi]$ y $y = \operatorname{arccos} x$ se observan en la figura 62. El dominio de arccos x es $[-1, 1]$ y el rango es $[0, \pi]$.

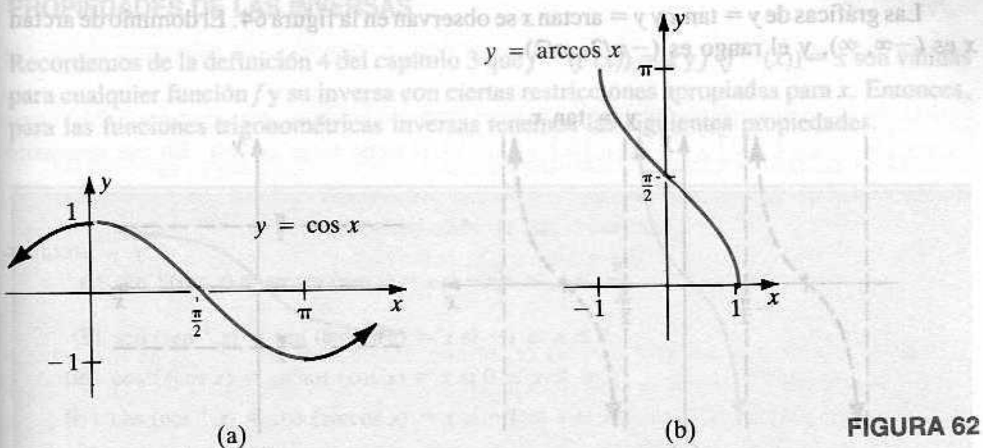


FIGURA 62

EJEMPLO 3

Encuentre **(a)** arccos $(\sqrt{2}/2)$ y **(b)** $\cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$.

Solución

(a) Si $y = \text{arccos}\,(\sqrt{2}/2)$, entonces cos y $\sqrt{2}/2$, $0 \leq y \leq \pi$. De esta manera, $y = \pi/4$.

(b) Si $y = \cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$, tenemos que $\cos y = -\sqrt{3}/2$, y debemos encontrar y tal que $0 \leq y \leq \pi$. Por tanto, $y = 5\pi/6$ ya que $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$.

EJEMPLO 4

Escriba sen $(\cos^{-1}x)$ como una expresión algebraica en x.

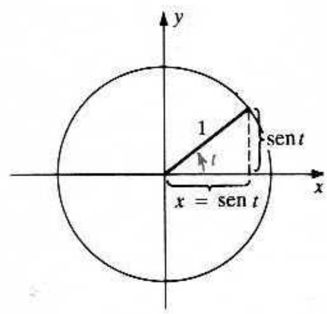


FIGURA 63

Solución. En la figura 63 hemos construido un ángulo de t radianes con un coseno igual a x. Entonces, $t = \cos^{-1}x$, o $x = \cos t$, donde $0 \leq t \leq \pi$. Ahora, para encontrar sen $(\cos^{-1}x)$ = sen t, utilizamos la identidad $\cos^2 t + \text{sen}^2\, t = 1$. Así,

$$x^2 + \text{sen}^2\, t = 1$$
$$\text{sen}^2\, t = 1 - x^2$$
$$\text{sen}\, t = \sqrt{1 - x^2}$$

Usamos la raíz cuadrada *positiva* de $1 - x^2$, ya que el rango de $\cos^{-1}x$ es $[0, \pi]$, y el seno de un ángulo en el cuadrante I o II es positivo.

ARCOTANGENTE

Si restringimos el dominio de tan x al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, la función resultante es uno a uno y, por tanto, tiene una inversa. Esta inversa se denota así:

$$\tan^{-1} x, \text{ o arctan } x$$

DEFINICION 4

La función **arcotangente** o **tangente inversa** se define por

$$y = \arctan x \text{ si y sólo si } x = \tan y$$

donde $-\pi/2 < y < \pi/2$ y $-\infty < x < \infty$.

Las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \arctan x$ se observan en la figura 64. El dominio de arctan x es $(-\infty, \infty)$, y el rango es $(-\pi/2, \pi/2)$.

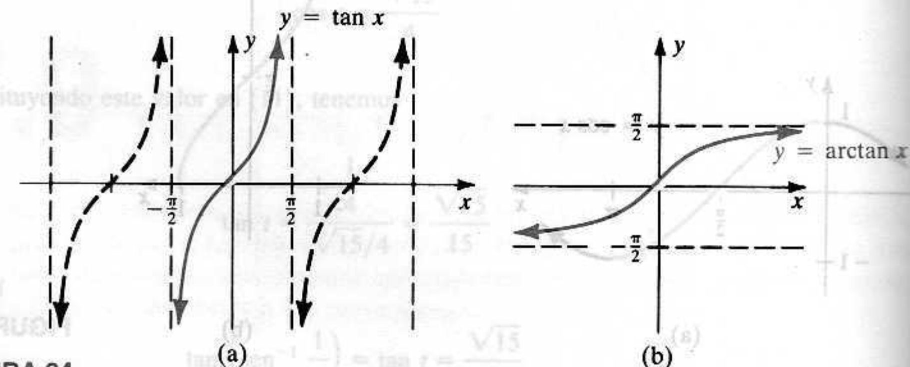


FIGURA 64

EJEMPLO 5

Encuentre $\tan^{-1}(-1)$.

Solución. Si $\tan^{-1}(-1) = y$, entonces $\tan y = -1$, donde $-\pi/2 < y < \pi/2$. Se deduce que $\tan^{-1}(-1) = y = -\pi/4$.

EJEMPLO 6

Sin utilizar calculadora, encuentre sen $(\tan^{-1}(-\frac{5}{3}))$.

Solución. Si $t = \tan^{-1}(-\frac{5}{3})$, entonces $\tan t = -\frac{5}{3}$. Utilizamos la identidad $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$ para hallar $\sec t$:

$$1 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \sec^2 t$$

$$\sec t = \sqrt{\frac{25}{9} + 1} = \sqrt{\frac{34}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{34}$$

Tomamos la raíz cuadrada positiva, ya que el rango de $\tan^{-1} t$ es $(-\pi/2, \pi/2)$, y la secante de un ángulo del cuadrante I o IV es positiva. Ahora podemos hallar $\cos t$ de la identidad recíproca:

$$\cos t = \frac{1}{\sec t} = \frac{1}{\frac{1}{3}\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

Finalmente, podemos usar la identidad $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$ para calcular sen $(\tan^{-1}(-\frac{5}{3}))$. Encontramos que

$$\operatorname{sen} t = \tan t \cos t = -\frac{5}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) = -\frac{5\sqrt{34}}{34}$$

PROPIEDADES DE LAS INVERSAS

Recordemos de la definición 4 del capítulo 3 que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ son válidas para cualquier función f y su inversa con ciertas restricciones apropiadas para x. Entonces, para las funciones trigonométricas inversas tenemos las siguientes propiedades.

Propiedades de las inversas

(i) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$ si $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

(ii) $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ si $-1 \leq x \leq 1$

(iii) $\cos^{-1}(\cos x) = \arccos(\cos x) = x$ si $0 \leq x \leq \pi$

(iv) $\cos(\cos^{-1} x) = \cos(\arccos x) = x$ si $-1 \leq x \leq 1$

(v) $\tan^{-1}(\tan x) = \arctan(\tan x) = x$ si $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

(vi) $\tan(\tan^{-1} x) = \tan(\arctan x) = x$ si $-\infty < x < \infty$

EJEMPLO 7

Sin utilizar calculadora, evalúe cada uno de los siguientes casos:

(a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}\right)$

(b) $\cos\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{3\pi}{4}\right)$

Solución

(a) Basándonos en (i),

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}$$

(b) Basándonos en (iv), $\cos(\cos^{-1}\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

(c) *No podemos* utilizar la propiedad inversa (v), pues $3\pi/4$ *no* está en $(-\pi/2, \pi/2)$. Si evaluamos primero $\tan(3\pi/4) = -1$, entonces tenemos

$$\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

USO DE LA CALCULADORA

La calculadora puede usarse para obtener aproximaciones a los valores de las funciones trigonométricas inversas. Para tal efecto, debe colocarse en el modo de radianes, pues los valores de las funciones trigonométricas inversas se definen como números reales (o ángulos medidos en radianes) y no como ángulos medidos en grados. (Si usted coloca su calculadora en el modo de grados para calcular, por ejemplo, $\tan^{-1} x$, obtendrá el ángulo en grados, entre $-90°$ y $90°$, cuya tangente es x). Si no dispone de calculadora, las tablas pueden "leerse hacia atrás" para obtener aproximaciones. En el apéndice encontrará más detalles.

EJEMPLO 8

Evalúe sen ($\tan^{-1}$ 3.75).

Solución. Con una calculadora colocada en el modo de radianes, presionamos 3.75, luego $\boxed{\texttt{INV}}$ y $\boxed{\texttt{tan}}$ (o $\boxed{\texttt{arctan}}$ o $\boxed{\texttt{tan}^{-1}}$ si tiene estas teclas). En ese momento aparecerá 1.3101939. Completamos la solución presionando $\boxed{\texttt{sin}}$ para obtener

$$\text{sen}\,(\tan^{-1} 3.75) \approx 0.9662$$

En la sección 7.8 la mayoría de las ecuaciones trigonométricas tenían soluciones que por los ángulos de referencia se relacionaban con los ángulos especiales 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ ó $\pi/2$. Si este no es el caso, las funciones trigonométricas inversas y las calculadoras o las tablas pueden usarse para encontrar las soluciones, como se observa en el ejemplo 9.

EJEMPLO 9

Encuentre las soluciones de

$$4\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución. Reconocemos que esta es una ecuación de segundo grado en términos de $\cos x$. Como no es factorizable, aplicamos la fórmula de la ecuación cuadrática para obtener

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{8}$$

En este momento descartamos el valor $(3 + \sqrt{37})/8 \approx 1.14$, pues es mayor que 1. Entonces sólo tenemos

$$\cos x = \frac{3 - \sqrt{37}}{8}$$

o

$$x = \cos^{-1}\left(\frac{3 - \sqrt{37}}{8}\right) \approx 1.97$$

Es interesante notar que, si hubiéramos tratado de calcular $\cos^{-1}[(3 + \sqrt{37})/8]$ con una calculadora, habríamos obtenido un mensaje de error.

Como se observa en el siguiente ejemplo, trabajar con las gráficas de las funciones trigonométricas inversas permite mejorar la asimilación de este material (véanse problemas 75 al 84).

EJEMPLO 10

Grafique cada uno de los siguientes casos:

(a) $y = \text{sen}\,(\text{sen}^{-1} x)$

(b) $y = \text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\, x)$

Solución

(a) De la propiedad de la inversa (ii) tenemos

$$\text{sen}\,(\text{sen}^{-1}x) = x, \quad \text{si } -1 \le x \le 1$$

Sin embargo, para $|x| \ge 1$, $\text{sen}^{-1}x$ no está definido; en consecuencia, $\text{sen}\,(\text{sen}^{-1}x)$ no se define. Por tanto, la gráfica de $y = \text{sen}\,(\text{sen}^{-1}x)$ es el segmento de recta $y = x$ para $-1 \le x \le 1$. Véase figura 65(a).

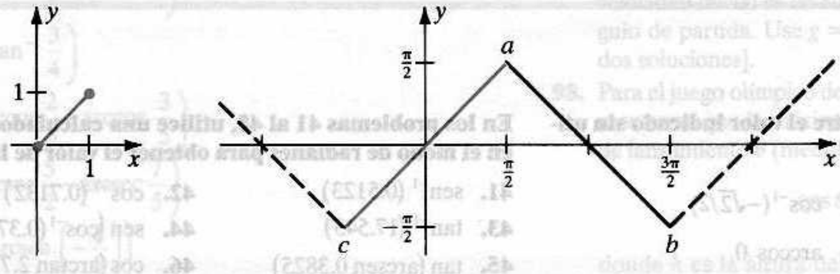


FIGURA 65 (a) (b)

(b) De la propiedad de la inversa (i), tenemos

$$\text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,x) = x, \quad \text{si } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

Así, obtenemos el segmento de recta ac de la figura 65(b). Luego observamos que $\text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,x)$ se define para cualquier número real, ya que $-1 \le \text{sen}\,x \le 1$. La tabla adjunta da los valores de $y = \text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,x)$ para ciertos valores de x en el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$. Usando estos datos, obtenemos el segmento de recta ab de la figura 65(b). Como la función seno tiene un periodo de 2π, se deduce que

$$\text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,x) = \text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,(x + 2\pi))$$

En consecuencia, completamos la gráfica [líneas punteadas de la figura 65(b)] por medio de la periodicidad.

Observe que $-\pi/2 \le \text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,x) \le \pi/2$ para cualquier número real x.

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\text{sen}\,x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$

ARCCSC, ARCSEC Y ARCCOT

Las funciones $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$ también tienen inversas cuando se restringen a los dominios $(0, \pi)$, $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ y $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$, respectivamente. (Véanse problemas 55 al 57). Otras restricciones del dominio diferentes de las analizadas aquí se utilizan algunas veces para definir las funciones inversas de cotangente, secante y cosecante. (Véase problema 58).

Estas funciones no se utilizan con tanta frecuencia como arctan, arccos y arcsen y, por ende, la mayoría de calculadoras científicas no traen teclas para estas funciones. Sin embargo, cualquier calculadora que resuelva arcsen, arccos y arctan puede usarse para obtener los valores de arccsc, arcsec y arccot. A diferencia del hecho de que $\sec x = 1/\cos x$, $\sec^{-1} x \neq 1/\cos^{-1} x$; por el contrario $\sec^{-1} x \neq \cos^{-1}(1/x)$ para $|x| \geq 1$. Relaciones similares son válidas para $\csc^{-1} x$ y $\cot^{-1} x$ (véanse problemas 87 al 89).

EJERCICIO 7.9

En los problemas 1 al 14, encuentre el valor indicado sin utilizar la calculadora.

1. $\text{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$
2. $\cos^{-1}(-\sqrt{2}/2)$
3. arcsen 1/2
4. arccos 0
5. $\tan^{-1}(-1)$
6. $\arctan(\sqrt{3}/3)$
7. $\text{sen}^{-1}(-\sqrt{2}/2)$
8. $\cos^{-1}(-1)$
9. arcsen (−1)
10. $\text{arccos}(\sqrt{2}/2)$
11. $\tan^{-1}(\sqrt{3})$
12. arctan 1
13. $\text{arccos}(-\sqrt{3}/2)$
14. arcsen (0)

En los problemas 15 al 32, encuentre el valor indicado sin utilizar calculadora.

15. $\text{sen}\left(\cos^{-1}\frac{2}{3}\right)$
16. $\cos\left(\text{sen}^{-1}\frac{3}{4}\right)$
17. $\tan\left(\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$
18. $\text{sen}\left(\arctan\frac{1}{5}\right)$
19. $\cos(\arctan(-3))$
20. $\tan\left(\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$
21. $\csc\left(\text{sen}^{-1}\frac{2}{5}\right)$
22. $\cos\left(\cos^{-1}\left(-\frac{3}{7}\right)\right)$
23. $\text{sen}(\text{sen}^{-1} 0.6)$
24. $\cos(\cos(-0.1))$
25. $\tan(\tan^{-1} 2.3)$
26. sen (arcsen (0.8))
27. $\text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$
28. $\text{arccos}\left(\cos\frac{3}{5}\pi\right)$
29. $\tan^{-1}(\tan 2\pi)$
30. $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,\pi)$
31. $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
32. $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{11}\right)$

En los problemas 33 al 40, escriba la expresión dada como una expresión algebraica en función de x.

33. $\text{sen}(\cos^{-1} x)$
34. $\text{sen}(\cot^{-1} x)$
35. $\text{sen}(\arctan x)$
36. $\cos(\text{arcsec}\, x)$
37. $\csc(\cos^{-1} x)$
38. $\tan(\csc^{-1} x)$
39. $\cot(\arccos x)$
40. $\cos(\arctan x)$

En los problemas 41 al 48, utilice una calculadora adaptada en el modo de radianes para obtener el valor de la expresión.

41. $\text{sen}^{-1}(0.5123)$
42. $\cos^{-1}(0.7132)$
43. $\tan^{-1}(17.543)$
44. $\text{sen}(\cos^{-1}(0.3725))$
45. tan (arcsen 0.3825)
46. cos (arctan 2.77)
47. $\text{sen}(\tan^{-1}(37.25))$
48. $\cos(\text{sen}^{-1}(0.5826))$

En los problemas 49 al 54, encuentre las soluciones de la ecuación dada en el intervalo indicado (aproxime la respuesta a la centésima más cercana).

49. $20\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 2 = 0;\ x \in [0, \pi/2]$
50. $3\cos^2 x - 8\cos x + 4 = 0;\ x \in [0, \pi/2]$
51. $\cot^2 x + \cot x - 1 = 0;\ x \in (\pi/2, \pi)$
52. $4\,\text{sen}\, 2x - \cos x = 0;\ x \in (\pi/2, \pi)$
53. $5\,\text{sen}^3 x - 3\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x = 0;\ x \in (0, \pi/2)$
54. $\cot^4 x - 3\cot^2 x + 1 = 0;\ x \in (0, \pi)$
55. La función cotangente inversa puede definirse por $y = \text{arccot}\, x$ (o $y = \cot^{-1} x$) si y sólo si $x = \cot y$, donde $0 < y < \pi$. Grafique $y = \text{arccot}\, x$ y dé el dominio y el rango de esta función.
56. La función cosecante inversa puede definirse por $y = \text{arccsc}\, x$ (o $y = \csc^{-1} x$) si y sólo si $x = \csc y$, donde $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ y $y \neq 0$. Grafique $y = \text{arccsc}\, x$ y dé el dominio y el rango de esta función.
57. Una definición de la función secante inversa es $y = \text{arcsec}\, x$ (o $y = \sec^{-1} x$) si y sólo si $x = \sec y$, donde $0 \leq y \leq \pi$ y $y \neq \pi/2$ (véase problema 58 para una definición alterna). Grafique $y = \text{arcsec}\, x$ y dé el dominio y el rango de arcsec x para esta definición.
58. Una definición alterna de la función secante inversa puede obtenerse restringiendo el dominio de la función secante $a[0, \pi/2] \cup a[\pi, 3\pi/2]$. Con esta restricción, defina la función arcsec, formule su dominio y su rango, y grafique $y = \text{arcsec}\, x$.

En los problemas 59 al 70, encuentre los valores indicados sin utilizar calculadora.

59. $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\frac{13\pi}{5}\right)$
60. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{2\pi}{3}\right)$
61. $\tan(\tan^{-1}(-3))$
62. $\text{sen}\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$

63. $\operatorname{sen}\left(2\cos^{-1}\dfrac{2}{3}\right)$

64. $\operatorname{sen}\left(2\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)\right)$

65. $\tan\left(\arctan 2+\operatorname{arcsen}\dfrac{4}{5}\right)$

66. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\dfrac{4}{5}+\operatorname{arcsec} 3\right)$

67. $\tan\left(2\tan^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$

68. $\operatorname{sen}\left(\arccos\dfrac{2}{5}+\arccos\dfrac{3}{5}\right)$

69. $\cos\left(\operatorname{arcsec}\dfrac{5}{2}-\operatorname{arcsec}\dfrac{7}{5}\right)$

70. $\cos\left(2\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{2}{5}\right)\right)$

En los problemas 71 al 74, escriba la expresión dada como una expresión algebraica de *x*.

71. $\tan\left(\cot^{-1}2x+\cot^{-1}3x\right)$ **72.** $\cos\left(\sec^{-1}3x-\sec^{-1}2x\right)$

73. $\sec\left(\csc^{-1}5x+\csc^{-1}3x\right)$ **74.** $\sec\left(\cos^{-1}2x-\cos^{-1}x\right)$

En los problemas 75 al 84, trace la gráfica de la función dada.

75. $y=\dfrac{\pi}{2}+\arctan x$ **76.** $y=\operatorname{arccot} x-\dfrac{\pi}{2}$

77. $y=\operatorname{arcsen}(x-1)$ **78.** $y=\arccos(x+1)$

79. $y=\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$ **80.** $y=\tan^{-1}(\tan x)$

81. $y=3\operatorname{sen}^{-1}x$ **82.** $y=\operatorname{sen}(\arccos x)$

83. $y=3+\operatorname{sen}^{-1}x$ **84.** $y=2+\cos^{-1}x$

85. ¿Para qué valores de x es verdad que (a) $\tan(\arctan x)=x$ y (b) $\arctan(\tan x)=x$?

86. ¿Para qué valores de x es verdad que (a) $\sec(\operatorname{arcsec} x)=x$ y (b) $\operatorname{arcsec}(\sec x)=x$?

87. Verifique que

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$$

88. Verifique que

$$\arccos x=\operatorname{arcsec}\frac{1}{x}\quad \text{para } |x|\le 1,\quad x\ne 0$$

89. Verifique que

$$\operatorname{arcsen} x=\operatorname{arccsc}\frac{1}{x}\quad \text{para } |x|\le 1,\quad x\ne 0$$

En los problemas 90 al 95, utilice los resultados de los problemas 87 al 89, y con la ayuda de la calculadora halle el valor indicado.

90. $\sec^{-1}3.5$ **91.** $\cot^{-1}(0.25)$

92. $\csc^{-1}(-2.3)$ **93.** $\operatorname{arcsc}(1.8)$

94. $\operatorname{arccot}(-0.37)$ **95.** $\operatorname{arcsec}(-2.8)$

96. En ciertas condiciones, la corriente i de un circuito eléctrico en un tiempo t es dada por

$$i=I[\operatorname{sen}(\omega t+\theta)\cos\phi+\cos(\omega t+\theta)\operatorname{sen}\phi]$$

Resuelva para t. [*Sugerencia*: use la fórmula de la suma de seno para escribir la expresión en paréntesis como una sola función seno].

97. El ángulo de partida θ para que una bala golpee el blanco a una distancia R (suponiendo que el blanco y el arma están a la misma altura) satisface lo siguiente:

$$R=\frac{v_0^2\operatorname{sen}2\theta}{g}$$

donde la v_0 es la velocidad inicial y g es la aceleración que imprime la gravedad. Si el blanco está a 50 pies del arma y la velocidad inicial es de 80 pies por segundo, encuentre el ángulo de partida. Use $g = 32$ pies/segundo^2. [*Sugerencia*: hay dos soluciones].

98. Para el juego olímpico de lanzamiento de martillo, puede demostrarse que la máxima distancia es lograda por el ángulo de lanzamiento θ (medido desde la horizontal), que satisface

$$\cos\theta=\frac{gh}{v^2+gh}$$

donde h es la altura del martillo sobre el suelo en el momento del lanzamiento, v es la velocidad inicial, y g es la aceleración que imprime la gravedad. Encuentre el ángulo de lanzamiento óptimo para $v = 14.3$ m/s y $h = 2.2$ m. Use $g = 9.81$ m/s^2.

99. En el diseño de autopistas y vías férreas las curvas se inclinan para evitar los riesgos de la fuerza centrífuga. El ángulo de inclinación óptimo θ (véase figura 66) es dado por

$$\tan\theta=\frac{v^2}{Rg}$$

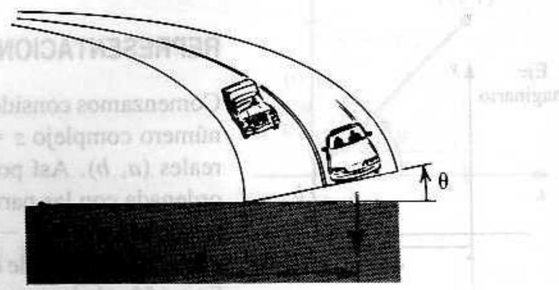


FIGURA 66

donde v es la velocidad del vehículo, R es el radio de la curva y g es la aceleración que imprime la gravedad. Como lo indica la fórmula, para un radio dado no hay un solo ángulo correcto para todas las velocidades. Como consecuencia, las curvas son inclinadas para el promedio de velocidad del tráfico que transita las vías. Encuentre el ángulo de inclinación correcto para una curva de radio de 800 pies en una vía cuya velocidad en promedio es de 50 mph. Use $g = 32$ pies/s^2. [*Sugerencia*: utilice unidades compatibles].

100. Si μ es el coeficiente de fricción entre el auto y el camino, entonces la velocidad máxima v_m que un auto puede alcanzar en una curva sin deslizarse es dada por:

$$v_m^2=gR\tan\left(\theta+\tan^{-1}\mu\right)$$

donde θ es el ángulo de inclinación de la curva. Encuentre v_m para la carretera del problema 99 si $\mu = 0.28$.

101. Visto lateralmente, un cono volcánico suele parecer un trapezoide simétrico (véase figura 66). Estudios de volcanes de menos de 50 mil años indican que la altura del cono H_{co} y la abertura del cráter W_{cr} están relacionados con la amplitud del cono W_{co} por las ecuaciones

$$H_{co} = 0.18\, W_{co}$$
y
$$W_{cr} = 0.40\, W_{co}$$

Si $W_{co} = 1.00$, use estas ecuaciones para determinar el ángulo de base del trapezoide en la figura 67.

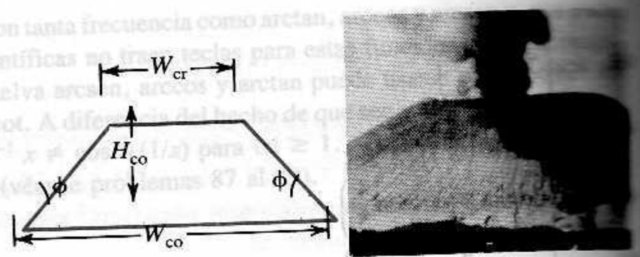


FIGURA 67

7.10 Forma trigonométrica y raíz *n*-ésima de números complejos

Ahora desarrollaremos la forma trigonométrica para representar los números complejos que se analizaron en la sección 2.4.

REPRESENTACION GEOMETRICA

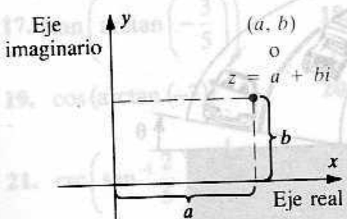


FIGURA 68

Comenzamos considerando una **representación geométrica**, para números complejos. Un número complejo $z = a + bi$ está determinado en forma única por la pareja de números reales (a, b). Así podemos identificar el primero y el segundo elementos de una pareja ordenada con las partes real e imaginaria de z, respectivamente. Por ejemplo, $(2, -5)$ corresponde a $z = 2 - 5i$. Cuando cada punto en un plano coordenado se identifica con un número complejo de esta forma, el plano se llama **plano complejo***. Como se observa en la figura 68, el eje y o vertical se llama **eje imaginario**, y el eje x u horizontal se llama **eje real.**

EJEMPLO 1

Grafique los números complejos

$$z_1 = 5 + 4i, \quad z_2 = -2i, \quad z_3 = -2 - 3i, \quad \text{y} \quad z_4 = -4 + 2i$$

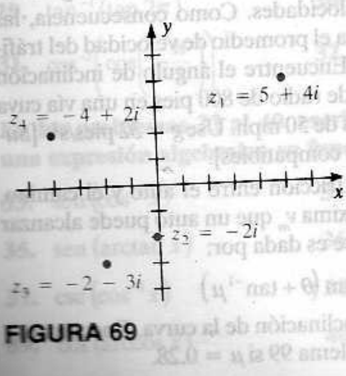


FIGURA 69

Solución. Como se observa en la figura 69, z_1, z_2, z_3 y z_4 se identifican por los puntos $(5, 4)$, $(0, -2)$, $(-2, -3)$ y $(-4, 2)$, respectivamente.

* Algunas veces se hace referencia al **plano de Argand**, en honor del matemático francés Jean R. Argand (1768-1822).

FORMA TRIGONOMETRICA DE UN NUMERO COMPLEJO

Si $z = a + bi$ es un número complejo diferente de cero y $P(a, b)$ es su representación geométrica como se observa en la figura 70, entonces la distancia de P al origen se da por $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Esta distancia se llama **módulo** o **valor absoluto**, de z y se denota por $|z|$. Sea θ el ángulo en posición normal cuyo lado terminal pasa por $P(a, b)$. Entonces, $\cos\theta = a/r$ y $\operatorname{sen}\theta = b/r$, de donde obtenemos

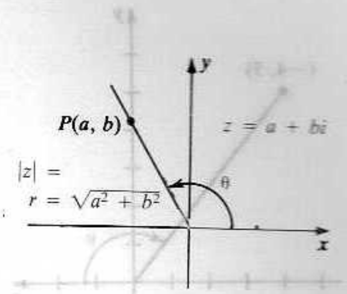


FIGURA 70

$$a = r\cos\theta \quad \text{y} \quad b = r\operatorname{sen}\theta$$

Sustituyendo estas expresiones por a y b en $z = a + bi$, obtenemos

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\operatorname{sen}\theta)i$$

$$z = r[\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta] \tag{12}$$

donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Decimos que (12) es una **forma trigonométrica** o **forma polar** del número complejo z. El ángulo θ se llama **argumento** o **amplitud** de z y satisface $\tan\theta = b/a$. Sin embargo, θ no es necesariamente $\arctan(b/a)$, pues θ no se restringe a $(-\pi/2, \pi/2)$. (Véanse ejemplos 2 y 3). También el argumento θ no está determinado únicamente, pues $\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi)$ y $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi)$ para cualquier número entero k. Si $z = a + bi = 0$, entonces $a = b = 0$. En este caso, $r = 0$ y podemos tomar cualquier ángulo θ como argumento. De hecho, sabemos que si $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$, entonces $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. Sin embargo, si $r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$ entonces $r_1 = r_2$, pero θ_1 no necesariamente es igual a θ_2.

EJEMPLO 2

Escriba en forma trigonométrica **(a)** $1 + i$ y **(b)** $1 - \sqrt{3}i$.

Solución

(a) Identificamos $a = 1$ y $b = 1$. Entonces,

$$r = |1 + i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

Como $\tan\theta = b/a = 1$ y $(1, 1)$ está situada en el primer cuadrante, tomamos $\theta = \pi/4$, como se ve en la figura 71. Así,

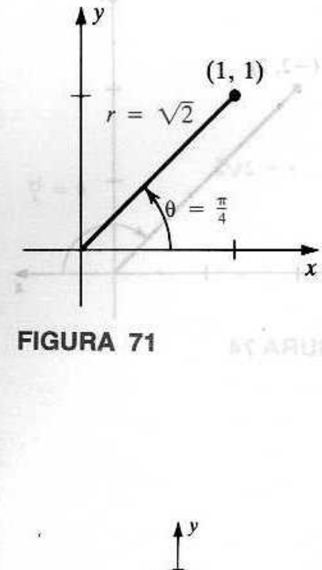


FIGURA 71

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right]$$

(b) En este caso,

$$r = |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

De $\tan\theta = -\sqrt{3}/1 = -\sqrt{3}$ y el hecho de que $(1, -\sqrt{3})$ esté situado en el cuarto cuadrante, tomamos $\theta = 5\pi/3$, como se ve en la figura 72. Así,

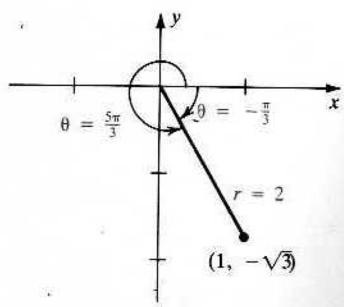


FIGURA 72

$$z = 2\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right]$$

De manera alterna, podríamos tomar $\theta = -\pi/3$ y escribir

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

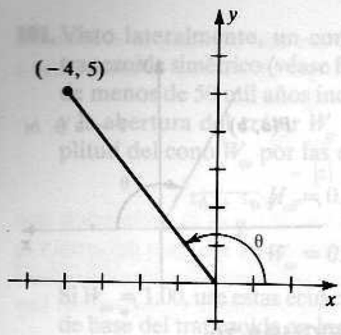


FIGURA 73

EJEMPLO 3

Encuentre la forma trigonométrica de $z = -4 + 5i$.

Solución. El módulo es

$$r = |-4 + 5i| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

Como $\tan\theta = -\frac{5}{4}$, observemos que θ no está relacionado con ninguno de los ángulos especiales $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$. Ya que $(-4, 5)$ se sitúa en el segundo cuadrante (figura 73), debemos tener cuidado al ajustar el valor de θ obtenido con una calculadora o con las tablas, para que nuestra respuesta final sea un ángulo del cuadrante II. Una forma de hacerlo es usando una calculadora en el modo de radianes para obtener el ángulo de referencia $\theta' = \tan^{-1}\frac{5}{4} \approx 0.8961$ radianes. El ángulo del cuadrante II que deseamos es, entonces,

$$\theta = \pi - \theta' \approx 2.2455$$

Así, $$z \approx \sqrt{41}[\cos 2.2455 + i \operatorname{sen} 2.2455]$$

De manera alterna, la forma trigonométrica anterior puede escribirse usando un ángulo medido en grados. Con una calculadora en modo de grados, obtendríamos θ 51.34° y $\theta = 180° - \theta' \approx 128.66°$, de donde se deduce que

$$z \approx \sqrt{41}[\cos 128.66° + i \operatorname{sen} 128.66°]$$

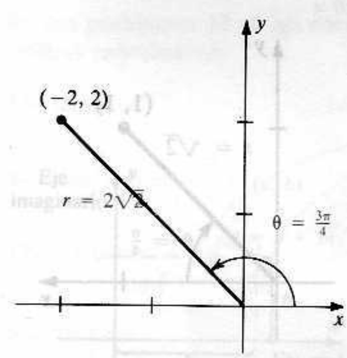


FIGURA 74

EJEMPLO 4

Encuentre el módulo y el argumento de z_1z_2, donde $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$,

Solución. El producto es

$$z_1z_2 = 2i(1 + i) = -2 + 2i$$

y, en consecuencia,

$$r = |z_1z_2| = |-2 + 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Identificando $a = -2$ y $b = 2$ tenemos $\tan\theta = -1$. Como θ es un ángulo en el cuadrante II, concluimos que $\theta = 3\pi/4$ (véase figura 74).

MULTIPLICACION Y DIVISION EN LA FORMA TRIGONOMETRICA

En el anterior ejemplo observamos que el módulo $r = 2\sqrt{2}$ del producto z_1z_2 es el producto del módulo $r_1 = 2$ de z_1 y el módulo $r_2 = \sqrt{2}$ de z_2. También el argumento $\theta = 3\pi/4$ de z_1z_2 es la suma de los argumentos $\theta_1 = \pi/2$ y $\theta_2 = \pi/4$ de z_1 y z_2, respectivamente. Hemos ilustrado un ejemplo particular del siguiente teorema, que describe cómo multiplicar y dividir números complejos cuando están escritos en forma trigonométrica.

TEOREMA 1

Si $z_1 = r_1[\cos\,\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1]$ y $z_2 = r_2[\cos\,\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2]$, entonces,

(a) $z_1z_2 = r_1r_2[\cos\,(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)]$

(b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos\,(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)],\ r_2 \neq 0$

DEMOSTRACION Probaremos (b) y dejaremos la prueba de (a) como ejercicio (véase problema 84). Si multiplicamos el numerador y el denominador de

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r\,[\cos\,\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1]}{r_2[\cos\,\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2]}$$

por $\cos\,\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2$, obtenemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{[\cos\,\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1][\cos\,\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2]}{\cos^2\,\theta_2 + \text{sen}^2\,\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos\,\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1][\cos\,\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2]$$

Realizando la multiplicación y luego utilizando las fórmulas de la diferencia de la sección 7.5, tenemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[(\cos\,\theta_1\,\cos\,\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)$$

$$+ i(\text{sen}\,\theta_1\,\cos\,\theta_2 - \cos\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos\,(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)]$$

EJEMPLO 5

Si $z_1 = 4[\cos 75° + i\,\text{sen}\,75°]$ y $z_2 = \frac{1}{2}[\cos 45° + i\,\text{sen}\,45°]$, encuentre $z\,z_2$ y z_1/z_2.

Exprese cada respuesta en la forma $a + bi$.

Solución. Del teorema 1 tenemos

$$z_1z_2 = 4 \cdot \frac{1}{2}[\cos\,(75° + 45°) + i\,\text{sen}\,(75° + 45°)]$$

$$= 2[\cos\,120° + i\,\text{sen}\,120°] = 2\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$= -1 + \sqrt{3}i$$

y

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{\frac{1}{2}}[\cos\,(75° - 45°) + i\,\text{sen}\,(75° - 45°)]$$

$$= 8[\cos\,30° + i\,\text{sen}\,30°] = 8\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$$

$$= 4\sqrt{3} + 4i$$

POTENCIAS DE z

Veamos ahora cómo usar la forma trigonométrica para calcular potencias y raíces de los números complejos. Suponga que deseamos calcular z_1^3, donde

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right]$$

Del teorema 1(a) con $z_1 = z_2$ obtenemos el cuadrado de z_1:

$$z_1^2 = z_1 \cdot z_1 = (\sqrt{2})(\sqrt{2})\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= (\sqrt{2})^2\left[\cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\,2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Entonces,

$$z_1^3 = z_1^2 \cdot z_1 = (\sqrt{2})^2(\sqrt{2})\left[\cos\left(\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= (\sqrt{2})^3\left[\cos 3\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\,3\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Esto ilustra un caso particular del **teorema de DeMoivre***. La demostración de este teorema se basa en la inducción matemática, que se analiza en la sección 11.3.

TEOREMA 2

Teorema de DeMoivre

Si $z = r[\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta]$ y n es un entero positivo, entonces,

$$z^n = r^n[\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta]$$

EJEMPLO 6

Evalúe $(\sqrt{3} + i)^8$.

Solución. Primero calculamos

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \quad y \quad \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

así que $\theta = \pi/6$, ya que $(\sqrt{3}, 1)$ está en el cuadrante I. Luego, se deduce del teorema de DeMoivre, que

$$(\sqrt{3} + i)^8 = 2^8\left[\cos 8\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\,8\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 256\left[\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right]$$

$$= 256\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = -128 - 128\sqrt{3}i$$

* Llamado así en honor del matemático francés Abraham DeMoivre (1667-1754).

RAICES DE z

Decimos que w es la raíz n-ésima de un número complejo z si $w^n = z$. En el siguiente análisis consideraremos un método para expresar la raíz n-ésima de un número complejo cuando esté escrito en forma trigonométrica.

Denotemos el módulo y el argumento de w por ρ y ϕ, respectivamente, así que $w = \rho\,[\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi]$. Si w es una raíz n-ésima de $z = r[\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta]$ entonces, por el teorema de DeMoivre, tenemos que

$$w^n = z$$

puede escribirse así:

$$\rho^n[\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi] = r[\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta]$$

Cuando dos números complejos son iguales, sus módulos son necesariamente iguales. Entonces, tenemos

$$\rho^n = r \quad \text{o} \quad \rho = r^{1/n}$$

y

$$\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Igualando las partes reales e imaginarias de esta ecuación, tenemos

$$\cos n\phi = \cos\theta, \qquad \operatorname{sen} n\phi = \operatorname{sen}\theta$$

de donde se deduce que $n\phi = \theta + 2k\pi$, o

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

donde k es un entero cualquiera. Como k adopta los valores enteros sucesivos $0, 1, 2, \ldots, n-1$, obtenemos n raíces diferentes de z. Para $k \geq n$, los valores de sen ϕ y cos ϕ repiten los valores obtenidos cuando $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Para ver esto, supongamos que $k = n + m$ donde $m = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces,

$$\phi = \frac{\theta + 2(n+m)\pi}{n} = \frac{\theta + 2m\pi}{n} + 2\pi$$

Como el seno y coseno tienen un periodo de 2π, tenemos

$$\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right) \quad \text{y} \quad \cos\phi = \cos\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right)$$

y así no se obtienen nuevas raíces cuando $k \geq n$. Resumiendo estos resultados, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 3

Las raíces n-ésimas de un número complejo z diferente de cero $z = r[\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta]$ se dan por

$$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

en donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, y θ se miden en radianes.

Denotamos los n valores de w por $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ (correspondientes a $k = 0, 1, \ldots, n-1$, respectivamente).

EJEMPLO 7

Encuentre las tres raíces cúbicas de i.

Solución. En la forma trigonométrica para i, $r = 1$ y $\theta = \pi/2$, entonces

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}$$

Con $n = 3$ encontramos según el teorema 3 que

$$w = 1^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Ahora para

$$k = 0, \quad z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$k = 1, \quad z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{6}$$

$$k = 2, \quad z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}$$

Por tanto,

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \qquad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \qquad z_2 = -i$$

Las tres raíces cúbicas de i encontradas en el ejemplo 7, se marcan en la figura 75. Observemos que están espaciadas equitativamente alrededor de la circunferencia de radio 1, centrada en el origen. En general, las raíces n-ésimas de un número complejo diferente de cero z están distribuidas proporcionalmente en las circunferencias del círculo de radio $|z|^{1/n}$ con centro en el origen (véase problema 87).

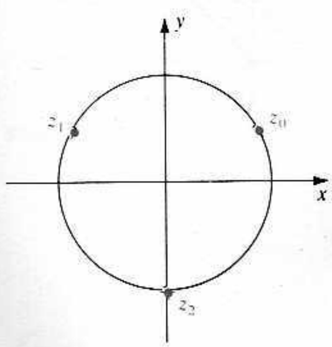


FIGURA 75

EJEMPLO 8

Encuentre las cinco raíces quintas de $1 + i$.

Solución. El módulo y el argumento de $1 + i$ son $\sqrt{2}$ y 45° respectivamente.

Así que, $\quad 1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i\,\text{sen}\,45°)$

Hemos elegido expresar el argumento en grados porque 45° es divisible por 5. Con $n = 5$, $r^{1/n} = (\sqrt{2})^{1/5} = 2^{1/10}$. Así, según el teorema 3, obtenemos

$$k = 0, \quad z_0 = 2^{1/10}[\cos 9° + i\,\text{sen}\,9°]$$

$$k = 1, \quad z_1 = 2^{1/10}[\cos 81° + i\,\text{sen}\,81°]$$

$$k = 2, \quad z_2 = 2^{1/10}[\cos 153° + i\,\text{sen}\,153°]$$

$$k = 3, \quad z_3 = 2^{1/10}[\cos 225° + i\,\text{sen}\,225°]$$

$$k = 4, \quad z_4 = 2^{1/10}[\cos 297° + i\,\text{sen}\,297°]$$

Con una calculadora podemos obtener estas aproximaciones:

$$z_0 \approx 1.0586 + 0.1677i$$
$$z_1 \approx 0.1677 + 1.0586i$$
$$z_2 \approx -0.9550 + 0.4866i$$
$$z_3 \approx -0.7579 - 0.7579i$$
$$z_4 \approx 0.4866 - 0.9550i$$

EJERCICIO 7.10

En los problemas 1 al 10, grafique los números complejos dados, y evalúe y grafique el número complejo indicado.

1. $z_1 = 3+2i;\ \bar{z}_1$
2. $z_1 = 3+2i;\ 2\bar{z}_1$
3. $z_1 = 1+2i,\ z_2 = -2-i;\ z_1+z_2$
4. $z_1 = -2i,\ z_2 = -2+i;\ z_1-z_2$
5. $z_1 = 3-4i,\ z_2 = -i;\ z_1+z_2$
6. $z_1 = 4+3i,\ z_2 = -2+3i:\ z_1+\bar{z}_2$
7. $z_1 = -3i,\ z_2 = 1+i;\ z_1 \cdot z_2$
8. $z_1 = 2+i,\ z_2 = 1-i;\ z_1 \cdot \bar{z}_2$
9. $z_1 = \sqrt{3}+2i,\ z_2 = 2-\sqrt{3}\,i;\ \dfrac{z_1}{z_2}$
10. $z_1 = -i,\ z_2 = 1+i;\ \dfrac{z_1}{z_2}$

En los problemas 11 al 22, encuentre el módulo y el argumento del número complejo dado.

11. $z = 2\sqrt{3}-2i$ **12.** $z = 2-7i$
13. $z = \sqrt{5}+4i$ **14.** $z = -2i$
15. $z = -3+i$ **16.** $z = 7$
17. $z = -4i$ **18.** $z = 8+8i$
19. $z = 16$ **20.** $z = -3+4i$
21. $z = -\sqrt{6}-5i$ **22.** $z = -2-7i$

En los problemas 23 al 32, escriba el número complejo dado en la forma trigonométrica.

23. $z = -7i$ **24.** $z = 12i$
25. $z = 6\sqrt{3}-6i$ **26.** $z = 6+2i$
27. $z = -3+4i$ **28.** $z = \dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{4}i$
29. $z = 2+2i$ **30.** $z = -10+4i$
31. $z = 3-3\sqrt{2}\,i$ **32.** $z = 5+5\sqrt{7}$

En los problemas 33 al 42, escriba el número complejo dado en la forma $z = a + bi$. No utilice calculadora.

33. $z = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ **34.** $z = 7\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{6}\right)$
35. $z = 3\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$
36. $z = 5(\cos 150° + i\,\text{sen}\,150°)$
37. $z = \sqrt{3}(\cos 390° + i\,\text{sen}\,390°)$
38. $z = 6\left[\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{6}\right]$
39. $z = \dfrac{3}{5}\left[\cos\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)\right]$
40. $z = \dfrac{3}{2}\left[\cos\left(\tan^{-1}3\right) + i\,\text{sen}\left(\tan^{-1}3\right)\right]$
41. $z = 6\left[\cos\left(\tan^{-1}\dfrac{2}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\tan^{-1}\dfrac{2}{5}\right)\right]$
42. $z = 10\left[\cos\left(\sec^{-1}5\right) + i\,\text{sen}\left(\sec^{-1}5\right)\right]$

En los problemas 43 al 48, encuentre $z_1 \cdot z_2$ y z_1/z_2 en forma trigonométrica, escribiendo primero z_1 y z_2 en forma trigonométrica.

43. $z_1 = 1-i,\ z_2 = 3+3i$
44. $z_1 = \dfrac{1}{5}+\dfrac{\sqrt{3}}{5}i,\ z_2 = \sqrt{2}+i$
45. $z_1 = 4-4\sqrt{2}i,\ z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{1}{3}i$
46. $z_1 = -\sqrt{8}+\sqrt{8}i,\ z_2 = 5\sqrt{8}+5\sqrt{8}i$
47. $z_1 = i,\ z_2 = 1+i$
48. $z_1 = -\sqrt{3}-i,\ z_2 = -3+3i$

En los problemas 49 al 52, encuentre $z_1 \cdot z_2$ y z_1/z_2 en forma trigonométrica. Escriba la respuesta en la forma $a + bi$.

49. $z_1 = 6\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\right);\ z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{9}\right)$
50. $z_1 = 12(\cos 210° + i\,\text{sen}\,210°);\ z_2 = 3(\cos 100° + i\,\text{sen}\,100°)$
51. $z_1 = 5\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{6}\right);\ z_2 = \dfrac{1}{5}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)$
52. $z_1 = 6(\cos 210° + i\,\text{sen}\,210°);\ z_2 = 3(\cos(-120°) + i\,\text{sen}\,(-120°))$

53. Demuestre que

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

54. Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, escriba $\dfrac{1}{z}$ y $\bar{z}$ en forma trigonométrica.

En los problemas 55 al 68, utilice el teorema de DeMoivre para calcular la potencia dada.

55. i^{20}

56. $(-i)^{13}$

57. $\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^5$

58. $\left[2\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{4}\right)\right]^3$

59. $(1-i)^6$

60. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right]^{12}$

61. $\left(1+\sqrt{3}\right)^6$

62. $\left[\left(\cos\dfrac{5\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{16}\right)\right]^{48}$

63. $\left(\dfrac{i}{1-i}\right)^3$

64. $\left(\dfrac{3-3i}{2+2i}\right)^5$

65. $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^4$

66. $\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$

67. $\left[\sqrt{5}\left(\cos\dfrac{\pi}{24} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{24}\right)\right]^8$

68. $\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{7}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{7}\right)\right]^{35}$

En los problemas 69 al 78 evalúe las raíces dadas.

69. Las seis raíces sextas de 1.

70. Las tres raíces cúbicas de i.

71. Las cuatro raíces cuartas de $16 + 16i$.

72. Las tres raíces cúbicas de $1 + i\sqrt{3}$.

73. Las cuatro raíces cuartas de $-1 + i\sqrt{3}$.

74. Las seis raíces sextas de -8.

75. Las tres raíces cúbicas de -125.

76. Las cuatro raíces cuartas de $-6 - 6i\sqrt{3}$.

77. Las seis raíces sextas de $\cos(330°) + i\,\text{sen}(330°)$.

78. Las ocho raíces octavas de $\cos(240°) + i\,\text{sen}(240°)$.

79. Factorice el polinomio $z^2 + 4 - 4\sqrt{3}i$.

80. Factorice el polinomio $z^4 + 81i$.

81. ¿Para cuáles enteros n, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^n$ será igual a 1, igual a -1, igual a i, igual a $\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$, igual a $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$?

82. Evalúe

$$\frac{\left[\cos\dfrac{\pi}{18} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{18}\right]^9}{\left[\sqrt{5}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{12}\right)\right]^4}$$

83. Evalúe

$$\frac{\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{24} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{24}\right)\right]^8}{\left[4\left(\cos\dfrac{\pi}{30} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{30}\right)\right]^5}$$

84. Demuestre el teorema 1 (a).

85. Demuestre que el teorema de DeMoivre es válido para los enteros negativos n. [*Sugerencia:* use $z^{-n} = 1/z^n$ y aplique el teorema de DeMoivre al denominador].

86. Utilice la información que da el teorema de DeMoivre para $n = 2$ y $n = 3$ para obtener una identidad trigonométrica para cos 2θ, sen 2θ, cos 3θ y sen 3θ, desarrollando las potencias e igualando las partes reales e imaginarias.

87. **(a)** Si el número complejo z diferente de cero tiene módulo r, demuestre entonces que cualquier raíz n–ésima de z está colocada en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ centrada en el origen. [*Sugerencia*: encuentre el módulo de $z^{1/n}$].

(b) Demuestre que las raíces n-ésimas de z están espaciadas equitativamente en esta circunferencia. [*Sugerencia:* encuentre la diferencia entre los argumentos de dos raíces n-ésimas sucesivas cualesquiera de z].

88. Sean $1, u, u^2, u^3, \ldots, u^{15}$ las 16 raíces n-ésimas de 1. Calcule cada una de las siguientes expresiones. Busque la forma más sencilla.

(a) $1 + u + u^2 + \ldots + u^{15}$

(b) $u.\,u^2.\,u^3 \ldots u^{15}$

(c) $(1-u)(1-u^2)(1-u^3)\ldots(1-u^{15})$

(d) $(1+u)(1+u^2)(1+u^4)(1+u^8)(1+u^{16})$

CONCEPTOS IMPORTANTES

Funciones circulares
- circunferencia unitaria

Funciones periódicas
- periodo
- amplitud
- ciclo
- desplazamiento de fase

Movimiento armónico

Identidades
- pitagóricas
- recíprocas
- cociente
- par - impar

Fórmulas especiales
- suma
- diferencia
- ángulo doble
- ángulo medio
- producto y suma

Ecuaciones trigonométricas

Funciones trigonométricas inversas
- arcoseno
- arcocoseno
- arcotangente

Eje imaginario

Eje real
- Forma trigonométrica de un número complejo
- módulo
- argumento

Teorema de DeMoivre

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 10, responda verdadero o falso.

1. La recta $x = \dfrac{3\pi}{2}$ es una asíntota para la gráfica de $y = \sec x$. ____
2. La gráfica de $y = \sec x$ no intersecta al eje x. ____
3. La recta $y = 1$ es una asíntota para la gráfica de $y = \cos t$. ____
4. $\sec(-2.5) = \sec(2.5)$. ____
5. Las gráficas de $f(x) = 3\cos 3x$ y $g(x) = 3\operatorname{sen}\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ son idénticas. ____
6. La ecuación $\tan(\alpha^2) + 1 = \sec(\alpha^2)$ es una identidad. ____
7. Para todo número real x, $\cot^{-1}(\cot x) = x$. ____
8. Si $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ es la forma trigonométrica de $z = a + bi$, entonces $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $a\tan\theta = b$ si $a \neq 0$. ____
9. Si $|z| = 3$, entonces $|z^4| = 12$. ____
10. Si el argumento de z es $\dfrac{\pi}{4}$ entonces el argumento de z^2 es $\dfrac{\pi}{2}$.

En los problemas 11 al 26, grafique la función dada si corresponde; determine la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase.

11. $y = 2(3 + \operatorname{sen} t)$
12. $y = -\dfrac{5}{2}\cos 3t$
13. $y = \tan\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$
14. $y = \pi + 3\sec t$
15. $y = -\csc t$
16. $y = \pi + 2\cot t$
17. $y = t + \cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$
18. $y = 2\operatorname{sen} t + \cos t$
19. $y = 3\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$
20. $y = \sec t + \cot t$
21. $y = 2\operatorname{sen}(2\pi t + \pi)$
22. $y = 3\cos\left(5t - \dfrac{\pi}{2}\right)$
23. $y = -3\sec(-2\pi t)$
24. $y = 3 + 2\cos(4t - \pi)$
25. $y = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \pi t\right)$
26. $y = 5\cos(3t + 6)$

En los problemas 27 al 34, encuentre el valor exacto de la expresión dada.

27. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$
28. $\tan\left(\dfrac{3\pi}{16}\right)$
29. $\tan\dfrac{5\pi}{12}$
30. $\operatorname{sen} 165°$
31. $\sec 105°$
32. $\cot\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$
33. $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$
34. $\operatorname{sen} 15° \cos 45°$
35. Dado $\operatorname{sen} t = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$, encuentre
 $\operatorname{sen} 1/2t$, $\cos 1/2t$, $\tan 1/2t$, $\operatorname{sen} 2t$, $\cos 2t$, $\tan 2t$,
36. Si $\cos u = 2/5$ y $\operatorname{sen} v = \dfrac{5}{13}$ encuentre
 $\operatorname{sen}(u+v)$ y $\cos(u-v)$, donde $\dfrac{3\pi}{2} < u < 2\pi$ y $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$.

En los problemas 37 al 40, verifique la identidad dada.

37. $\cos^2 x \cdot \csc x = \csc x - \operatorname{sen} x$
38. $(\operatorname{sen} x + \cos x - 1)(\operatorname{sen} x + \cos x + 1) = \operatorname{sen} 2x$
39. $\dfrac{\cot^2\alpha}{\csc\alpha + 1} = \csc\alpha - 1$
40. $\dfrac{\cos t + \cot t}{1 + \csc\alpha} = \cos t$

En los problemas 41 y 42, demuestre que la ecuación trigonométrica dada no es una identidad.

41. $\operatorname{sen} 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
42. $1 + \csc^2 x = \tan^2 x$

En los problemas 43 al 46, encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica dada si x es un número real y θ es un ángulo medido en grados.

43. $\cos 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta = 0$
44. $\tan^2\theta + \tan 2\theta = 0$
45. $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 3$
46. $\cos x - \sqrt{\cos x} = 0$

En los problemas 47 al 52, encuentre el valor indicado sin usar calculadora.

47. $\sec^{-1}(-2)$
48. $\operatorname{arcsec}(-1)$
49. $\operatorname{sen}\left(\sec^{-1}\dfrac{4}{3}\right)$

50. $\cos\left(\arctan\frac{2}{5}\right)$

51. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 2\pi)$

52. $\tan(\arctan \pi)$

En los problemas 53 y 54, escriba la expresión dada como una expresión algebraica en función de x.

53. $\tan(\operatorname{arcsec} x)$

54. $\cos(\operatorname{arcsen} x)$

En los problemas 55 y 56, encuentre las soluciones (aproximadas a la centésima más cercana) de la ecuación dada en el intervalo indicado.

55. $3\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0 \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

56. $\csc^2 x + \csc x - 1 = 0 \quad x \in (0, \pi)$

En los problemas 57 y 58, trace la gráfica de la función dada.

57. $y = \operatorname{arcsec}(x-1)$

58. $y = \operatorname{arccsc}(x-1)$

59. **(a)** Demuestre que el área A de un triángulo isósceles cuyos lados iguales tienen longitud "a" es $A = \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo en el vértice determinado por los dos lados iguales.

(b) Determine qué valor debe tener θ si $a = 4$ y $A = 4$.

60. ¿Cuál es el área de un triángulo equilátero de lado 4?

En los problemas 61 y 62, dados z_1 y z_2, evalúe y grafique los números complejos indicados.

61. $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i, \quad z_2 = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}; \quad z_1 - z_2, \ \bar{z}_1 z_2, \ \frac{z_1}{z_2}$

62. $z_1 = -3 + 2i, \quad z_2 = \frac{1}{2}i; \quad z_1 - z_2, \ \bar{z}_1 z_2, \ \frac{z_1}{z_2}$

En los problemas 63 al 66, encuentre el módulo y el argumento del número complejo dado y escriba el número en forma trigonométrica.

63. $-2 + 2i$

64. $3 - 2i$

65. $1 - \sqrt{3}i$

66. $4 + i$

En los problemas 67 y 68, escriba el número complejo dado en la forma $z = a + bi$.

67. $z = 3\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right]$

68. $z = \frac{2}{3}[\cos 345° + i \operatorname{sen} 345°]$

En los problemas 69 y 70, encuentre $z_1 \cdot z_2$, y $\frac{z_1}{z_2}$ en forma trigonométrica escribiendo primero z_1 y z_2 en forma trigonométrica.

69. $z_1 = -1 + i \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

70. $z_1 = \sqrt{3} + i \quad z_2 = 2 + 2i$

En los problemas 71 y 72, use el teorema de DeMoivre para calcular la potencia dada.

71. $(1-i)^8$

72. $\left[3\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{9\pi}{6}\right)\right]^9$

En los problemas 73 y 74, evalúe las raíces indicadas.

73. Las cinco raíces quintas de -32.

74. Las tres raíces cúbicas de i.

75. Factorice el polinomio $z^3 + 27i$.

76. Una partícula se mueve por una vía circular, centrada al origen, con velocidad angular constante. La coordenada x de la posición que ocupa la partícula en cualquier tiempo t es dada por

$$x = 24\cos\left(\frac{\pi}{6}(t+1)\right)$$

(a) ¿Cuál es la coordenada x de la posición de la partícula cuando $t = 0$ segundos?

(b) ¿Cuál es el radio de la vía si la coordenada y de la posición de la partícula es $y = 0$ cuando $t = 0$?

77. Un corte transversal a una poceta de 40 metros de largo es como se muestra en la figura 76. Si la poceta está completamente llena de agua, exprese el volumen como una función del ángulo ϕ.

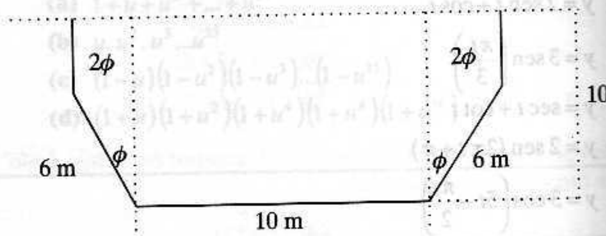


FIGURA 76

78. Demuestre que $\operatorname{arcsen}\frac{3}{5} + \operatorname{arcsen}\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$

79. Puede demostrarse que una bola de baloncesto de diámetro d, al acercarse a la cesta desde un ángulo θ con la horizontal, pasará a través de un aro de diámetro D si

$$D\operatorname{sen}\theta > d, \quad 0° \le \theta \le 90°$$

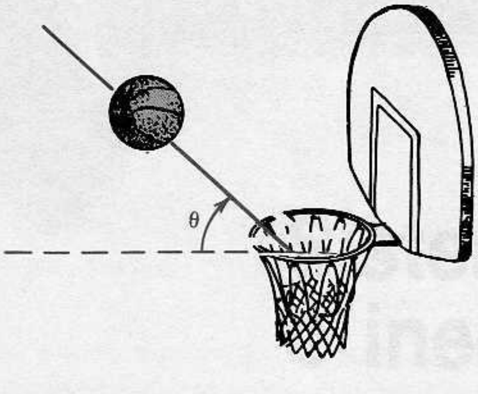


FIGURA 77

(véase figura 77). Si la bola tiene un diámetro de 26.4 cm y el aro de 42 cm, ¿qué rango de ángulos de acercamiento θ resultarán en una cesta?

80. El aceite para calefacción doméstica suele almacenarse en un tanque cilíndrico apropiado que debe estar horizontal. Como se observa en la figura 78, la profundidad del aceite debe medirse sumergiendo una vara a través de un diámetro vertical.

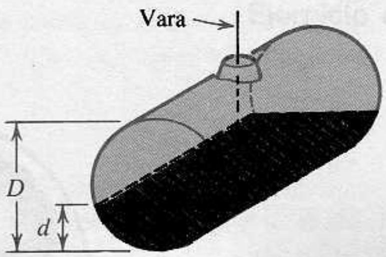


FIGURA 78

(a) Si la vara indica que la profundidad del aceite es d pulgadas, demuestre que el volumen V del aceite es dado por la fórmula

$$V = (V_0/\pi)\left[\cos^{-1}(1-2d/D) - (1-2d/D)\sqrt{(1-d/D)d/D}\right]$$

donde V_0 es la capacidad del tanque.

(b) Demuestre que la fórmula de la parte (a) puede reescribirse de la siguiente forma

$$V = \frac{V_0}{\pi}\left[\cos^{-1}x - x\sqrt{(1-x^2)/2}\right]$$

donde $x = 1 - 2d/D$.

81. En ciertas condiciones puede demostrarse que el ángulo de desplazamiento θ (medido en radianes) de un péndulo plano en un tiempo de t segundos está dado por

$$\theta = c_1 \cos\sqrt{g/Lt} + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{g/Lt}$$

donde L es la longitud del péndulo, g es la aceleración que imprime la gravedad y c_1 y c_2 son constantes que dependen de cómo se coloque en movimiento el péndulo (véase figura 79). Si $c_1 = 1$ y $c_2 = \sqrt{3}$, determine A, b, y ϕ tal que $= A \operatorname{sen}(bt - \phi)$.

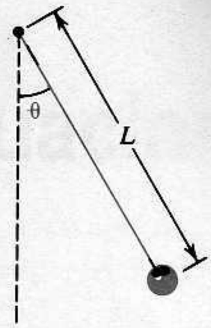


FIGURA 79

82. Una vaca está atada a una estaca a la orilla de una laguna circular de radio R metros, por medio de una cuerda de longitud l, donde l no es mayor de 2 metros. Encuentre una fórmula explícita para su área de pastoreo en términos de R y l.

83. Desde una nave espacial s se observa el punto P en la Tierra, como se ve en la figura 80. Para localizar P debemos determinar el ángulo β formado por la línea que va de P al centro C de la Tierra y la recta que va de s a C. Sea A un punto en la circunferencia del horizonte (véase problema 86 del ejercicio de repaso en el capítulo 6) tal que $AS \perp AC$, como se observa en la figura. Las medidas del ángulo formado por PS y CS y el ángulo θ formado por AS y CS pueden hacerse desde la nave.

(a) Demuestre que $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\beta}{1 - \operatorname{sen}\theta\cos\beta}$

[*Sugerencia*: trace una perpendicular desde P a CS].

(b) Si las medidas $\alpha = 25°$ y $\theta = 30°$ se obtienen, encuentre β.

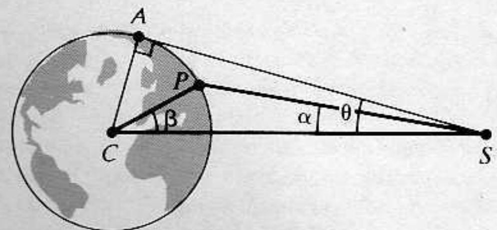


FIGURA 80

84. Un mes lunar consta de 29.5 días, esto significa que la parte de la luna que se ve en el ciclo (llamada fase de la luna) se repite cada 29.5 días. Si representamos la fase de la luna mediante una función del tipo seno, en términos del día del mes lunar, ¿cuál es el periodo de esta función? ¿Cuál es su gráfica?

8

Sistemas de ecuaciones e inecuaciones

George B. Dantzig

Muchos de los conceptos matemáticos considerados en este texto datan de cientos de años. En este capítulo hay una rara oportunidad de examinar, aunque brevemente, un tema que tiene su origen en el siglo XX. La *programación lineal*, como muchas otras ramas de las matemáticas, se originó en un intento por resolver problemas prácticos. Pero, a diferencia de las matemáticas de siglos anteriores, que estaban a menudo enraizadas en las ciencias de la física y la astronomía, la programación lineal se desarrolló a partir de un esfuerzo por resolver los problemas de negocios, manufacturas, embarques, economía y planeación militar. En estos problemas fue generalmente necesario encontrar los valores óptimos (esto es, valores máximos y mínimos) de una función lineal cuando ciertas restricciones eran colocadas en las variables. No había un procedimiento matemático general para resolver esta clase de problemas, hasta que George B. Dantzig publicó su *método símplex* en 1947. Dantzig y sus colegas de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos desarrollaron este método para encontrar valores óptimos de una función lineal al investigar ciertos problemas del transporte y la planeación logística militar. La palabra "programación", debe señalarse, no se refiere al programa de computador sino, más bien, a un programa de acción.

Aunque no estudiaremos el método símplex en sí mismo, veremos en la sección 8.5 que los problemas de programación lineal que incluyen dos variables pueden resolverse de manera geométrica.

8.1 Sistemas de ecuaciones no lineales

ECUACIONES SIMULTANEAS

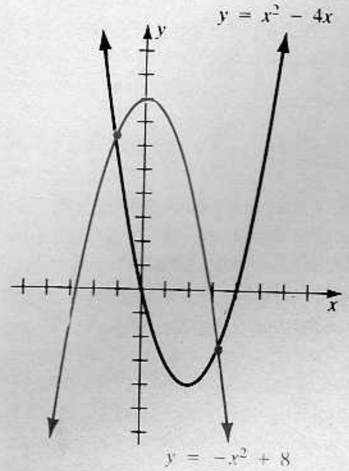


FIGURA 1

Como lo ilustra la figura 1, los gráficos de las parábolas $y = x^2 - 4x$ y $y = -x^2 + 8$ se cortan en dos puntos. Así, las coordenadas de los puntos de intersecto deben satisfacer ambas ecuaciones, y decimos que

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x^2 + 8 \end{cases} \tag{1}$$

son **ecuaciones simultáneas**, o que (1) es un **sistema de ecuaciones.** Específicamente, (1) es un **sistema de ecuaciones no lineal***. La **solución** de un sistema de ecuaciones con dos variables, o incógnitas, x y y es cualquier par ordenado de números reales (a, b) que satisfaga cada ecuación del sistema cuando a y b son sustituidas por x y y, respectivamente. La solución de un sistema de ecuaciones que incluye tres variables es una tripla ordenada de números reales (a, b, c), y así sucesivamente. Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen precisamente las mismas soluciones.

METODO DE SUSTITUCION

En esta sección y en la próxima usaremos dos métodos para solucionar los sistemas de ecuaciones. La primera técnica considerada se llama **método de sustitución.** Los siguientes pasos resumen este método para sistemas de *dos* ecuaciones con *dos* variables.

Método de sustitución

(i) Use una de las ecuaciones del sistema para expresar una variable en términos de la otra.
(ii) Sustituya esta expresión en la otra ecuación.
(iii) La ecuación obtenida en el paso (ii), entonces, contiene una variable. Resuelva esta ecuación.
(iv) Sustituya cada número obtenido de esta ecuación en la expresión obtenida en el paso (i). Esto da los correspondientes valores de la otra variable. Escriba cada solución usando notación de par ordenado.

EJEMPLO 1

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x^2 + 8 \end{cases}$$

* Recuerde que una ecuación lineal con dos variables es cualquier ecuación que pueda expresarse en la forma $ax + by + c = 0$. En esta ecuación, el exponente de ambas variables es 1.

Solución. Puesto que la primera ecuación ya expresa y en términos de x, sustituimos esta expresión por y en la segunda ecuación y simplificamos

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= -x^2 + 8 \\ 2x^2 - 4x - 8 &= 0 \\ x^2 - 2x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

De la fórmula cuadrática encontramos $x = 1 - \sqrt{5}$ y $x = 1 + \sqrt{5}$. Usando la primera ecuación para obtener los valores correspondientes de y tenemos

$$y = (1 - \sqrt{5})^2 - 4(1 - \sqrt{5}) = 2 + 2\sqrt{5}$$

y $$y = (1 + \sqrt{5})^2 - 4(1 + \sqrt{5}) = 2 - 2\sqrt{5}$$

Así $(1 - \sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5})$ y $(1 + \sqrt{5}, 2 - 2\sqrt{5})$ son soluciones del sistema dado.

EJEMPLO 2

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^4 - 2(10^{2y}) - 3 = 0 \\ x - 10^y = 0 \end{cases}$$

Solución. De la segunda ecuación, tenemos que

$$x = 10^y$$

y por consiguiente $$x^2 = 10^{2y}$$

Al sustituir este último resultado dentro de la primera ecuación tenemos

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$$

o $$(x^2 - 3)(x^2 + 1) = 0$$

Puesto que $x^2 + 1 > 0$ para todos los números reales x, se deduce que

$$x^2 = 3, \quad \text{o} \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Pero $x = 10^y > 0$ para toda y; por consiguiente, debemos tomar $x = \sqrt{3}$. Resolviendo $\sqrt{3} = 10^y$ para y tenemos

$$y = \log_{10}\sqrt{3}, \quad \text{o} \quad y = \tfrac{1}{2}\log_{10} 3$$

Por tanto, $(\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\log_{10} 3)$ es la única solución del sistema.

EJEMPLO 3

Considere un rectángulo en el cuadrante I limitado por los ejes x y y y la gráfica de $y = 20 - x^2$. (Véase figura 2). Halle las dimensiones de tal rectángulo si su área es de 16 unidades cuadradas.

Solución. Sean (x, y) las coordenadas del punto P en la gráfica de $y = 20 - x^2$ mostrado en la figura. Entonces, el

$$\text{área del rectángulo} = xy \text{ o } 16 = xy$$

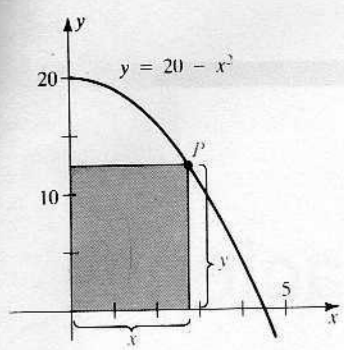


FIGURA 2

Así obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xy = 16 \\ y = 20 - x^2 \end{cases}$$

La primera ecuación del sistema produce $y = 16/x$. Después de sustituir esta expresión por y en la segunda ecuación, obtenemos

$$\frac{16}{x} = 20 - x^2$$

$$16 = 20x - x^3$$

o

$$x^3 - 20x + 16 = 0$$

Ahora la regla de los signos de Descartes indica que esta última ecuación tiene bien sea dos raíces o ninguna raíz positiva. Las raíces racionales positivas posibles son 1, 2, 4, 8 y 16. Probando estos números por división sintética, eventualmente se muestra que

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & 0 & -20 & 16 \\ & & 4 & 16 & -16 \\ \hline & 1 & 4 & -4 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

y así 4 es una solución. Pero la división anterior de la factorización

$$x^3 - 20x + 16 = (x - 4)(x^2 + 4x - 4)$$

Aplicando la fórmula cuadrática a

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

nos da dos raíces reales más:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

El número positivo $-2 + 2\sqrt{2}$ es otra solución. (Puesto que las dimensiones son positivas, rechazamos el número negativo $-2 - 2\sqrt{2}$). En otras palabras, hay dos rectángulos con el área de 16 unidades cuadradas.

Para hallar y usamos $y = 16/x$. Si $x = 4$, entonces $y = 4$, y si $x = -2 + 2\sqrt{2}) \approx 0.83$, entonces $y = 16/(-2 + 2\sqrt{2}) \approx 19.31$. Así, las dimensiones de los dos rectángulos son

4 unidades × 4 unidades y (aproximadamente) 0.83 unidades × 19.31 unidades.

Nota de advertencia: en el ejemplo 3 observamos que la ecuación $16 = 20x - x^3$ fue obtenida al multiplicar la ecuación que la precede por x. Recuerde: cuando las ecuaciones son multiplicadas por una variable, hay la posibilidad de introducir una solución extraña. Para asegurarse de que éste no sea el caso, usted debe probar cada solución.

METODO DE ELIMINACION

El siguiente método que ilustramos usa **operaciones de eliminación.** Cuando se aplica a un sistema de ecuaciones, estas operaciones producen un sistema equivalente de ecuaciones.

Operaciones de eliminación

(i) Intercambie cualquier par de ecuaciones en un sistema.
(ii) Multiplique una ecuación por una constante diferente de cero.
(iii) Súmele un múltiplo constante diferente de cero de una ecuación de un sistema a otra ecuación del mismo sistema.

A menudo le sumamos un múltiplo constante diferente de cero de una ecuación a otras ecuaciones de un sistema, con la intención de eliminar una variable de aquellas ecuaciones.

EJEMPLO 4

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ -2x^2 + 7y^2 = 7 \end{cases}$$

Solución. Como preparación para eliminar el término x^2, empezamos multiplicando la primera ecuación por 2. El sistema

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 8 \\ -2x^2 + 7y^2 = 7 \end{cases} \tag{2}$$

es equivalente al sistema dado. Ahora sumándole la primera ecuación de este último sistema a la segunda, obtenemos otro sistema equivalente al original. En este caso, hemos eliminado x^2 de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 8 \\ 9y^2 = 15 \end{cases}$$

De la última ecuación vemos que $y = \pm\sqrt{15}/3$. Sustituyendo estos dos valores de y en $x^2 + y^2 = 4$ entonces tenemos

$$x^2 + \frac{15}{9} = 4, \quad \text{o} \quad x^2 = \frac{21}{9}$$

así que

$$x = \pm\frac{\sqrt{21}}{3}$$

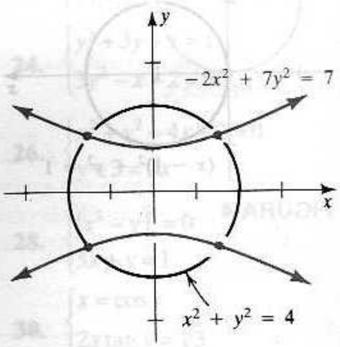


FIGURA 3

Así $(\sqrt{21}/3, \sqrt{15}/3)$, $(-\sqrt{21}/3, \sqrt{15}/3$, $(\sqrt{21}/3, -\sqrt{15}/3)$, y $(-\sqrt{21}/3, -\sqrt{15}/3)$ son todas soluciones. Las gráficas de las ecuaciones dadas y los puntos correspondientes a los pares ordenados están en la figura 3.

En el ejemplo 4 no hay necesidad de escribir el sistema (2). El sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 9y^2 = 15 \end{cases}$$

se obtiene inmediatamente combinando los pasos de multiplicar la primera ecuación por 2 y luego sumársela a la segunda. Además, como manera alternativa para resolver el sistema, podemos multiplicar la primera ecuación por -7 y sumársela a la segunda* para obtener

* Esto es lo mismo que multiplicar por 7 y restar.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ -9x^2 \quad = -21 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 9x^2 \quad = 21 \end{cases}$$

La última ecuación de este caso da $x = \pm\sqrt{21}/3$. Entonces, usamos $x^2 + y^2 = 4$ para encontrar los valores correspondientes de y. Finalmente, notamos que el sistema también puede resolverse por el método de sustitución, al hacerlo, por ejemplo, en $y^2 = 4 - x^2$ de la segunda ecuación.

En el siguiente ejemplo, usamos la tercera operación de eliminación para simplificar el sistema antes de aplicar el método de sustitución.

EJEMPLO 5

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ x^2 - 2y + y^2 = 0 \end{cases}$$

Solución. Al multiplicar la primera ecuación por -1 y sumarle el resultado a la segunda, eliminamos x^2 de la ecuación:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ \quad 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

La segunda ecuación del último sistema implica que $y = x$. Al sustituir esta expresión en la primera ecuación, produce

$$x^2 - 2x + x^2 = 0, \quad \text{o} \quad 2x(x - 1) = 0$$

Se deduce que $x = 0$, $x = 1$ y correspondientemente, $y = 0$. $y = 1$. Así, las soluciones del sistema son $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

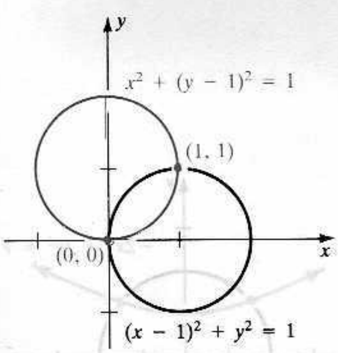


FIGURA 4

Al completar el cuadrado en x y y, podemos escribir el sistema en el ejemplo 5 como

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 1 \end{cases}$$

De esto vemos que ambas ecuaciones describen circunferencias de radio $r = 1$. Las circunferencias y sus puntos de intersección están ilustrados en la figura 4.

En ciertos problemas que incluyen encontrar los valores máximo y mínimo de una función, a menudo es necesario resolver un sistema de ecuaciones no lineales con tres (o más) variables. Las variables del ejemplo siguientes son x, y, y λ (la letra griega lambda minúscula). Aunque describimos el método de sustitución para sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas, puede usarse en sistemas más grandes.

EJEMPLO 6

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Solución. La solución del sistema dado es una tripla ordenada (x, y, λ).

Sustituyendo $\lambda = y/2x$ de la primera ecuación en la segunda ecuación nos da

$$x - \frac{y^2}{x} = 0, \quad \text{o} \quad x^2 - y^2 = 0$$

Sustituyendo $y^2 = x^2$ dentro de la tercera ecuación del sistema, se produce

$$x^2 + x^2 - 2 = 0, \quad \text{o} \quad x^2 = 1$$

Así, $x = \pm 1$. Cuando $x = 1$, tenemos, $y^2 = 1$, así $y = \pm 1$. También cuando $x = -1$, de nuevo tenemos $y^2 = 1$ o $y = \pm 1$. Al usar $\lambda = y/2x$, llegamos a cuatro soluciones del sistema para encontrar λ:

$$(1, 1, \tfrac{1}{2}), \quad (1, -1, -\tfrac{1}{2}), \quad (-1, 1, -\tfrac{1}{2}), \quad \text{y} \quad (-1, -1, \tfrac{1}{2})$$

En cálculo el tipo de problemas del ejemplo 6 ocurre en las aplicaciones del llamado **método de multiplicadores Lagrange.** La variable λ se llama multiplicadora Lagrange.

EJERCICIO 8.1

En los problemas 1 al 6, determine gráficamente si el sistema de ecuaciones dado tiene alguna solución.

1. $\begin{cases} y = 6 \\ y = x^2 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 3 \\ y = x^2 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} y = e^x - 1 \\ y = \ln(x+1) \end{cases}$

En los problemas 7 al 38, encuentre las soluciones de los sistemas de ecuaciones dadas.

7. $\begin{cases} y = 2x \\ y^2 = -8x - 4 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 3y = x \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 16x + y = -3 \\ x^3 + y = -3 \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x^2 - y = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3y - x = 2 \\ x = y^2 \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = y \end{cases}$

13. $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y^2 = \dfrac{6}{x} + 1 \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x = \sqrt{8}y^2 \\ y = \sqrt{8}x \end{cases}$

15. $\begin{cases} xy = 6 \\ x - y = 5 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} xy = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

17. $\begin{cases} (x-1)^2 = y^2 \\ y = x + 4 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} (y-3)^2 = (x-1)^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x^2 - y^3 = 6y \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 1 \\ xy = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2 \cdot y^4 = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} (2x - y)^2 = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

23. $\begin{cases} y^4 + 1 = x \\ x - 2y^2 = 0 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} y^3 + 3y + x = 1 \\ 3y^2 - x + 2 = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x - 3y^2 + 3 = 0 \\ y^3 - x + 1 = 0 \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0 \\ y + 3 = 2x \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^3 - 12x - y^2 = 0 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} (x^2 - y)^2 = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} y = \tan x \\ y = \operatorname{sen} x \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} x = \cos y \\ 2x \tan y = \sqrt{3} \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x \operatorname{sen} y = 1 \\ x - 2 \operatorname{sen} y = 0 \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} x = \operatorname{sen} 2y \\ x = \cos y \end{cases}$

33. $\begin{cases} y = \ln x \\ y^2 = 6 - 5\ln x \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} \ln(y - x) = 3 \\ \ln(y + x) = 0 \end{cases}$

35. $\begin{cases} \log_{10}(x+y)^2 = 4 \\ -2x + y = 10 \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} x + \log_{10} y = 6 \\ x - \log y^2 = 0 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x = e^y \\ e^{2y} - x = 20 \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} y = 3^{x^2} \\ 2x = \log_3 y \end{cases}$

39. Un terreno rectangular tiene 300 metros de perímetro y 5,000 metros cuadrados de área. ¿Cuáles son sus dimensiones?

40. El volumen de una caja rectangular de 20 cm de altura es de 10,000 cm^3. Si el área de la base es 1,000 cm^2, ¿cuáles son las otras dos dimensiones?

41. La suma de los perímetros de dos círculos es 16π, y la diferencia de sus áreas es 32π. ¿Cuáles son sus radios?

42. Halle los dos puntos de intersección de las circunferencias mostradas en la figura 5, si el radio de cada una de ellas es 2.

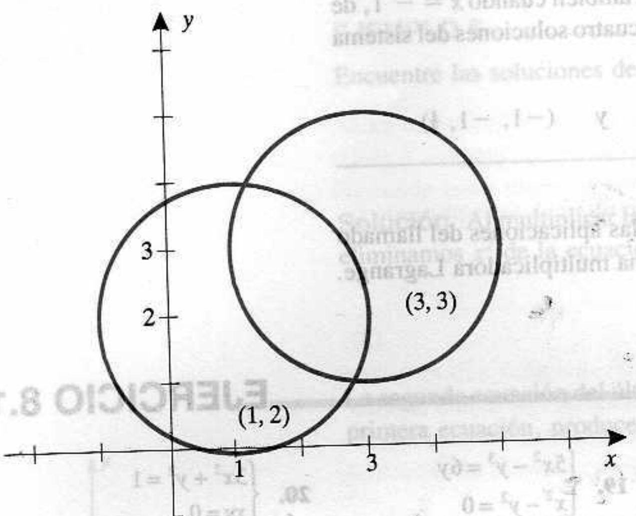


FIGURA 5

43. Un rectángulo tiene sus lados consecutivos a, b en proporción áurea si

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$

(esta proporción se usa a menudo en arquitectura y en pintura). Determine las dimensiones del rectángulo que se muestra en la figura 6, que tiene sus lados en proporción áurea, si su área es de 20 cm^2.

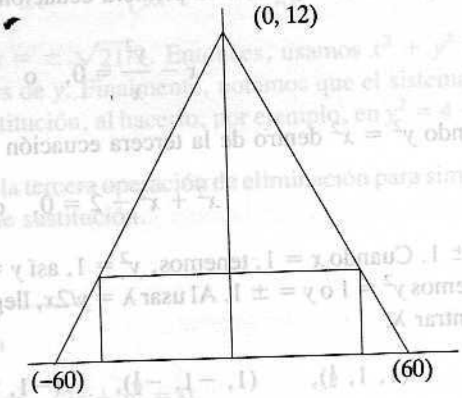


FIGURA 6

44. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 40 cm. Si el cateto mayor mide 3 veces el otro cateto, ¿cuáles son sus longitudes?

45. El volumen de un cilindro es 108π cm^3. Si se conoce que su altura es 4 veces su radio, encuentre las dimensiones del cilindro.

46. Encuentre la ecuación y el radio del círculo que pasa por (0, 0), (4, 0) y (72/25, 96/25).

En los problemas 47 al 50, encuentre la solución del sistema de ecuaciones dado.

47. $\begin{cases} 3x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ xy - 6 = 0 \end{cases}$

48. $\begin{cases} 2x - \lambda y = 0 \\ 2y - \lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

49. $\begin{cases} x^2 = 2y\lambda \\ xy = y\lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

50. $\begin{cases} 3y - \lambda x = 0 \\ 4x + \lambda y = 0 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$

8.2 Sistemas de ecuaciones lineales

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Recuerde que cuando a y b no son ambas cero, la gráfica de la ecuación lineal es una recta.

$$ax + by + c = 0$$

Así, un **sistema de dos ecuaciones lineales** con dos incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{3}$$

determina dos líneas rectas en el plano xy

SISTEMAS CONSISTENTES E INCONSISTENTES

Como vemos en las figuras 7(a), 7(b), y 7(c), respectivamente, hay tres casos posibles para las gráficas de las ecuaciones en el sistema (3):

(i) las rectas se intersecan en un solo punto,
(ii) las ecuaciones describen la misma recta, o
(iii) las dos rectas son paralelas

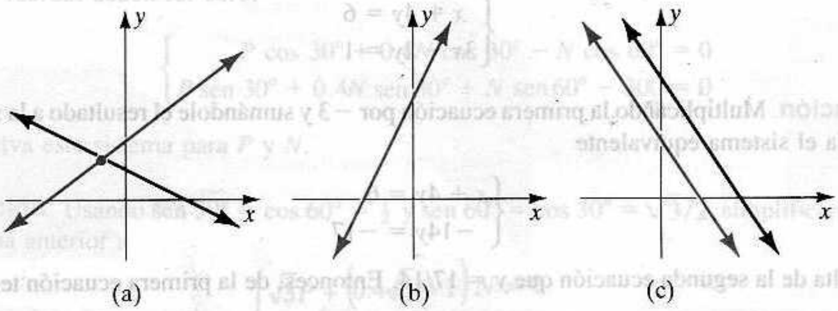


FIGURA 7

En estos tres casos decimos, respectivamente:

(i) El sistema es consistente y las ecuaciones son independientes. Tiene exactamente una solución, es decir, el par ordenado de números reales correspondientes al punto de intersección de las rectas.
(ii) El sistema es consistente, pero las ecuaciones son dependientes. Tiene infinitas soluciones, esto es, todos los pares de números reales correspondientes a los puntos de una recta.
(iii) El sistema es inconsistente. No hay soluciones.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, podemos usar ya sea el método de sustitución o el método de eliminación.

EJEMPLO 1

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

Solución. Resolviendo la segunda ecuación para y, tenemos que

$$y = 2x - 4$$

Sustituimos esta expresión en la primera ecuación y despejamos x

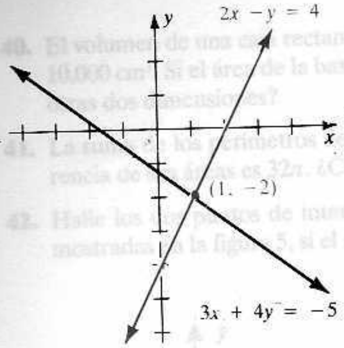


FIGURA 8

$$3x + 4(2x - 4) = -5$$
$$11x = 11$$
$$x = 1$$

Entonces, la primera ecuación da

$$3(1) + 4y = -5$$
$$4y = -8$$
$$y = -2$$

Así, la única solución del sistema es $(1, -2)$. El sistema es consistente y las ecuaciones son independientes. Las gráficas de las ecuaciones dadas se muestran en la figura 8.

EJEMPLO 2

Halle las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + 4y = 6 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

Solución. Multiplicando la primera ecuación por -3 y sumándole el resultado a la segunda, da el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 4y = 6 \\ -14y = -17 \end{cases}$$

Resulta de la segunda ecuación que $y = 17/14$. Entonces, de la primera ecuación tenemos

$$x + 4(\tfrac{17}{14}) = 6$$

así que $x = \frac{8}{7}$. La solución es $(\frac{8}{7}, \frac{17}{14})$.

EJEMPLO 3

La inspección del sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -10x + 5y = -25 \end{cases}$$

muestra que multiplicar la primera ecuación por -5 produce la segunda ecuación. Por consiguiente, el sistema es equivalente al de dos ecuaciones idénticas.

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

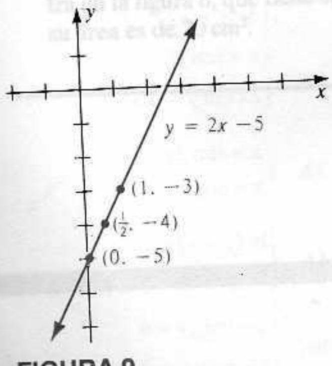


FIGURA 9

El sistema dado es consistente, pero las ecuaciones son dependientes. Si denotamos x por α sus soluciones pueden escribirse como el par ordenado

$$(\alpha, 2\alpha - 5)$$

donde α es un número real. Por cada elección de α, obtenemos una solución del sistema dado. Por ejemplo, para $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, y $\alpha = 1$, obtenemos las soluciones $(0, -5)$, $(\frac{1}{2}, -4)$, y $(1, -3)$, respectivamente. (Véase figura 9).

EJEMPLO 4

El sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

es inconsistente. Note que si restamos las ecuaciones, obtenemos la ecuación $0 = 3$, la cual nunca es verdadera. Así, el sistema no tiene soluciones. (Véase figura 10).

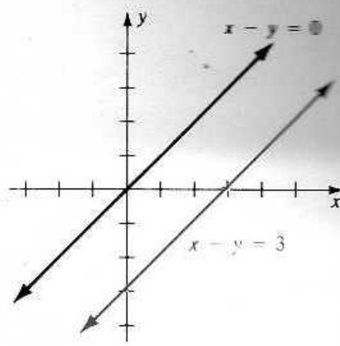


FIGURA 10

EJEMPLO 5

Una fuerza de mínima magnitud P se le aplica a un bloque de 300 libras que está sobre un plano inclinado para impedir que se resbale hacia abajo (véase figura 11). Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es de 0.4 entonces la magnitud de la fuerza de rozamiento es $0.4\,N$, donde N es la magnitud de la fuerza normal ejercida sobre el bloque por el plano. Puesto que el sistema está en equilibrio, los componentes horizontal y vertical de las fuerzas deben ser cero:

$$\begin{cases} P\cos 30° + 0.4N\cos 30° - N\cos 60° = 0 \\ P\,\mathrm{sen}\,30° + 0.4N\,\mathrm{sen}\,30° + N\,\mathrm{sen}\,60° - 300 = 0 \end{cases}$$

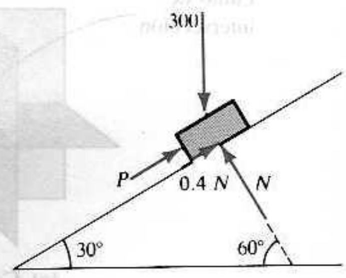


FIGURA 11

Resuelva este sistema para P y N.

Solución. Usando $\mathrm{sen}\,30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$ y $\mathrm{sen}\,60° = \cos 30° = \sqrt{3}/2$, simplificamos el sistema anterior a

$$\begin{cases} \sqrt{3}P + \left(0.4\sqrt{3} - 1\right)N = 0 \\ P + \left(0.4 + \sqrt{3}\right)N = 600 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por $\sqrt{3}$ y restando, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} \sqrt{3}P + (0.4\sqrt{3} - 1)N = 0 \\ \qquad\qquad 4N = 600\sqrt{3} \end{cases}$$

La segunda ecuación del último sistema da $N = 600\sqrt{3}/4 \approx 259.81$ lb.
La primera ecuación, entonces, produce $P = (1 - 0.4\sqrt{3})600/4 \approx 46.08$ lb.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES VARIABLES

Una **ecuación lineal con tres variables**

$$ax + by + cz + d = 0$$

donde a, b y c no son todos cero, determina un *plano* en el espacio tridimensional. La solución de un sistema de tres ecuaciones con tres variables

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{4}$$

es una tripla ordenada de la forma (x, y, z) que satisface cada ecuación del sistema. La intersección de los tres planos descrita por el sistema (4) puede ser

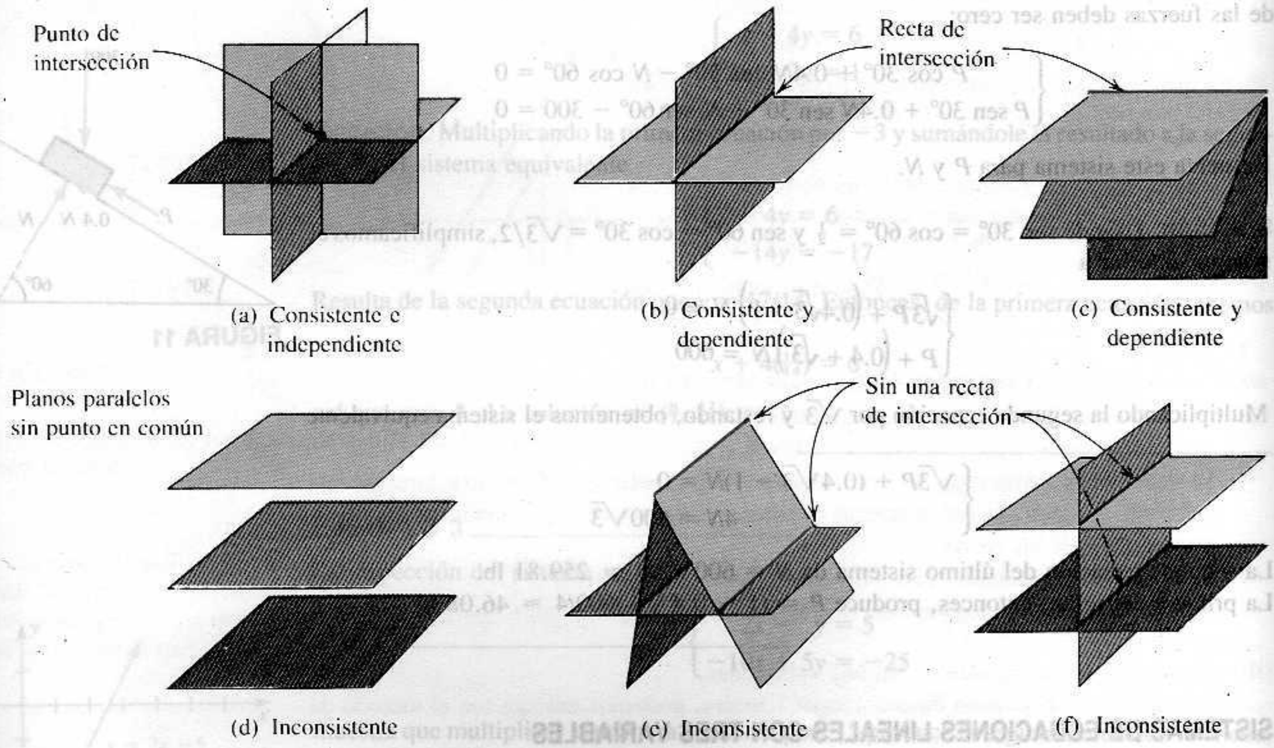
(i) un solo punto,
(ii) infinitos puntos, o
(iii) ningún punto

Como antes, a cada uno de estos casos le aplicamos los términos (i) consistente e independiente, (ii) consistente y dependiente y (iii) inconsistente, respectivamente. Cada uno se ilustra en la figura 12.

METODO DE SOLUCION

Por el método de eliminación es posible reducir el sistema (4) de tres ecuaciones lineales con tres variables a un sistema equivalente en forma triangular,

$$\begin{cases} a_1'x + b_1'y + c_1'z = d_1' \\ \qquad b_2'y + c_2'z = d_2' \\ \qquad\qquad c_3'z = d_3' \end{cases}$$



(a) Consistente e independiente (b) Consistente y dependiente (c) Consistente y dependiente

(d) Inconsistente (e) Inconsistente (f) Inconsistente

FIGURA 12

del cual puede obtenerse una solución (si existe) por **sustitución hacia atrás.** El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 6

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + \ \ z = -6 \\ 4x - 2y - \ \ z = -4 \\ 2x - \ \ y + 3z = 19 \end{cases}$$

Solución. *Multiplicando la primera ecuación por −4, sumándole el resultado a la segunda, multiplicando la primera ecuación por −2 y sumándole el resultado a la tercera, se elimina x de estas dos ecuaciones:*

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ -10y - 5z = 20 \\ -5y + z = 31 \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

Si la segunda ecuación en (5) se multiplica por $-\frac{1}{2}$ y se le suma a la tercera ecuación, eliminamos y de la tercera ecuación y se obtiene un sistema equivalente en forma triangular:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ -10y - 5z = 20 \\ \frac{7}{2}z = 21 \end{cases} \qquad \textbf{(6)}$$

Pero al multiplicar la segunda fila por $-\frac{1}{10}$ y la tercera fila por $\frac{2}{7}$, llegamos a otra forma triangular que es equivalente al sistema original:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ y + \frac{1}{2}z = -2 \\ z = 6 \end{cases}$$

De este último sistema, es inmediatamente obvio que $z = 6$. Usando este valor y sustituyendo hacia atrás en la segunda ecuación, resulta

$$y = -\tfrac{1}{2}z - 2 = -\tfrac{1}{2}(6) - 2 = -5$$

Finalmente, sustituyendo $y = -5$ y $z = 6$ en la primera ecuación, obtenemos:

$$x = -2y - z - 6 = -2(-5) - 6 - 6 = -2$$

Por consiguiente, la solución del sistema es $(-2, -5, 6)$.

EJEMPLO 7

Halle las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 5x - 2y + 2z = 0 \\ 8x + y + 5z = 6 \end{cases} \qquad \textbf{(7)}$$

Solución. Usando la primera ecuación para eliminar la variable x de la segunda y tercera ecuaciones, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -7y - 3z = -10 \\ -7y - 3z = -10 \end{cases}$$

Este sistema, a su vez, es equivalente al sistema de forma triangular:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 7y + 3z = 10 \\ 0z = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(8)}$$

En este sistema no podemos determinar valores únicos para x, y y z. Cuando más, podemos despejar dos variables en términos de la variable que queda. Por ejemplo, de la segunda ecuación en (8), obtenemos y en términos de z:

$$y = -\tfrac{3}{7}z + \tfrac{10}{7}$$

Entonces, despejando x de la primera ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= -y - z + 2 \\ &= -(-\tfrac{3}{7}z + \tfrac{10}{7}) - z + 2 \\ &= -\tfrac{4}{7}z + \tfrac{4}{7} \end{aligned}$$

Así, en las soluciones para y y x podemos escoger z *arbitrariamente*; si denotamos z con el símbolo α, donde α es un número real, entonces las soluciones del sistema son todas ternas ordenadas de la forma $(-\frac{4}{7}\alpha + \frac{4}{7}, -\frac{3}{7}\alpha + \frac{10}{7}, \alpha)$. Enfatizamos que para cada número real α, obtenemos una solución de (7). Por ejemplo, al escoger que α sea, digamos, 0, 1 y 2, obtenemos las soluciones $(\frac{4}{7}, \frac{10}{7}, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(-\frac{4}{7}, \frac{4}{7}, 2)$, respectivamente. En otras palabras, el sistema es consistente y tiene infinitas soluciones.

En el ejemplo 7 no hay nada especial para resolver (8) para x y y en términos de z. Por ejemplo, al resolver (8) despejando x y z en términos de y, obtenemos la solución $(\frac{4}{3}\beta - \frac{4}{3}, \beta, -\frac{7}{3}\beta + \frac{10}{3})$, donde β es cualquier número real. Nótese que, al colocar β igual a $\frac{10}{7}$, 1 y $\frac{4}{7}$, obtenemos las mismas soluciones del ejemplo 7 correspondientes, a su vez, a $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, y $\alpha = 2$.

EJEMPLO 8

El sistema

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x + 3y = 1 \\ 8x - 3z = 4 \end{cases}$$

es equivalente a

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 4y + z = 1 \\ 4y + z = 4 \end{cases}$$

el que, a su vez, es equivalente al sistema en forma triangular:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 4y + z = 1 \\ 0z = 3 \end{cases}$$

Puesto que $0z = 0$ para cualquier número z, la última ecuación nunca se satisface. Así, el sistema es inconsistente y no tiene soluciones.

EJEMPLO 9

Una concesión del gobierno de US\$1,360,000 se dividió entre 100 científicos de tres grupos de investigación A, B, C. Cada científico del grupo de investigación A recibió US\$20,000, cada científico de B recibió US\$8,000 y cada científico de C recibió US\$10,000. El grupo de investigación A recibió cinco veces los fondos del grupo de investigación B. ¿Cuántos científicos pertenecen a cada grupo?

Solución. Sea

x = el número de científicos del grupo A
y = el número de científicos del grupo B
z = el número de científicos del grupo C

entonces

$20{,}000x$ = la cantidad de dinero recibido por el grupo A.
$8{,}000y$ = la cantidad de dinero recibido por el grupo B.
$10{,}000z$ = la cantidad de dinero recibido por el grupo C.

Además, si el grupo de investigación A recibe cinco veces los fondos que recibió el grupo B, entonces tenemos que

$$20{,}000x = 5(8{,}000y),$$

Así tenemos el sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 20{,}000x + 8{,}000y + 10{,}000z = 1{,}360{,}000 \\ 20{,}000x - 40{,}000y = 0 \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 10x + 4y + 5z = 680 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este último sistema por los métodos usados en esta sección, obtenemos $x = 40$, $y = 20$, y $z = 40$.

SISTEMAS HOMOGENEOS

Se dice que un sistema de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases} \tag{9}$$

o

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \tag{10}$$

es **homogéneo.** Los sistemas lineales homogéneos (9) y (10) *siempre* tienen las soluciones triviales (0, 0) y (0, 0, 0), respectivamente. Por consiguiente, *estos sistemas son siempre consistentes*. Además de la solución trivial, sin embargo, pueden existir infinitas soluciones no triviales.

EJEMPLO 10

Los mismos pasos usados para resolver el sistema del ejemplo 7 pueden usarse para resolver el sistema homogéneo relacionado

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 5x - 2y + 2z = 0 \\ 8x + y + 5z = 0. \end{cases}$$

En este caso, encontramos

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 7y + 3z = 0 \\ 0z = 0. \end{cases}$$

Al escoger $z = \alpha$, donde α es un número real, tenemos que $x = -\frac{4}{7}\alpha$ y $y = -\frac{3}{7}\alpha$. Por consiguiente, las soluciones del sistema constan de todas las triplas ordenadas de la forma $(-\frac{4}{7}\alpha,\ -\frac{3}{7}\alpha,\ \alpha)$. Nótese que para $\alpha = 0$, obtenemos la solución trivial $(0, 0, 0)$ pero para $\alpha = -7$, obtenemos la solución no trivial $(4,\ 3,\ -7)$.

El análisis de esta sección es también aplicable a los sistemas de n ecuaciones lineales con n variables para $n > 3$.

EJERCICIO 8.2

En los problemas 1 al 26, halle las soluciones del sistema dado. Diga si el sistema es consistente, con ecuaciones dependientes, independientes o si es inconsistente.

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ x + 4y = -5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 5y = -2 \\ y + \dfrac{2}{5}x = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + y - 13 = 0 \\ x - 11y = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x - y + 3 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - 0.5y + 1 = 0 \\ 2x - y + 6 = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x - 4y = 8 \\ 2x + 9y = 3 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x - 3y + 5 = 0 \\ 6x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 7x + 8y - 5 = 0 \\ 12x - y + 4 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} -4x + y + z = 18 \\ -7x + 2y - 2z = 4 \\ -11x + 3y - z = 22 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x - y - z = 10 \\ x - 2y - 5z = 18 \\ -8x + 5y + 8z = 48 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x - y - 3z = -1 \\ 2x - y + z = -9 \\ x + 2y - 4z = 17 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - 4y + 5z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3y - 2x + 5z = -10 \\ x - 4z = 8 \\ 2x + z = 7 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x - 2y + z = -2 \\ 9x - 6y + 3z = -6 \\ -6x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -4x + 3y + 6z = 16 \\ -x + 3y + z = 6 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x - y + 4z = 6 \\ 4y - z = 5 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 0 \\ x - y + 3z = 1 \\ 4x + 2y - z = 3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 3x - 6y + 9z = 6 \\ 2x - 4y + 6z = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 5x + 4y + 2z = 23 \\ x - 2z = 7 \\ 5x + 2z = -1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x - 24y + z = 2 \\ x + \dfrac{y}{2} - z = 1 \\ y + z = 5 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + 6y - 2z = 1 \\ 3x - 4y + 5z = 2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 18x - y = 2 \\ 3y + 4z = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x + y + 2z + 3w = 2 \\ y - 2z + 5w = 2 \\ z + 3w = 4 \\ 2z + 7w = 4 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x - y + z - 4w = 6 \\ 3x + y - z + 5w = 3 \\ -x - y + 3z = -2 \\ 4x + 2y + 3w = 4 \end{cases}$

En los problemas 27 al 30, resuelva el sistema dado.

27. $\begin{cases} -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = 3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 3 \\ -\dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} = -1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{3}{z} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

29. $\begin{cases} \log_{10} x + 3\log_{10} y = 2 \\ 2\log_{10} x + 5\log_{10} y = 1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} \operatorname{sen} x - \cos y = 1 \\ \operatorname{sen} x + 2\cos y = -1 \end{cases}$

31. Se desea obtener 200 litros de una solución de ácido nítrico al 34%. Si tiene soluciones al 28%, 40% y 45%, y se requiere que la cantidad a utilizar de la solución que está al 28% sea dos veces la cantidad de la solución al 40%, ¿qué cantidad de cada solución se debe usar?

32. Dos ciudades A y B distan 3,000 millas. Con viento a favor, un aeroplano hace el viaje en 5 horas 20 minutos, pero si lo hace en sentido contrario se demora en 6 horas. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano y la velocidad del viento?

33. Se desea obtener 200 litros de una mezcla que tenga 19% de la sustancia A, 34% de la sustancia B y 47% de la sustancia C. Se tienen mezclas de tres marcas diferentes X, Y, Z que poseen respectivamente:

X: 10% de A, 30% de B, 60% de C

Y: 20% de A, 40% de B, 40% de C

Z: 20% de A, 30% de B, 50% de C

¿Cuántos litros de cada marca se deberán utilizar para formar la mezcla deseada?

34. Tres personas A, B y C realizan el mismo tipo de trabajo. Cuando A y B lo realizan juntas lo terminan en 72/5 horas; cuando lo hacen juntas A y C lo hacen en 16 horas, pero si lo hacen B y C, lo hacen en 144/7 horas. ¿Cuánto se demora cada una en hacer el trabajo?

35. Las magnitudes T_1 y T_2 de las tensiones de cables mostrados en la figura 13 satisfacen

$T_1 \cos 15° - T_2 \cos 25° = 0$

$T_1 \operatorname{sen} 15° + T_2 \operatorname{sen} 25° - 200 = 0$

Encuentre T_1 y T_2.

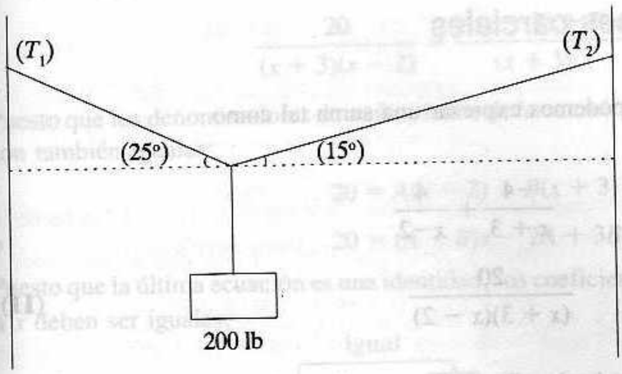


FIGURA 13

36. Si el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + ay = b \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones, ¿cuáles deben ser los valores de a y b?

37. Una persona afirma tener US$880.00 en billetes de US$5, US$10 y US$50. Dice que la cantidad de billetes de US$10 es dos veces la cantidad de US$50 y que tiene 44 billetes en total. ¿Es esto posible? Si lo es, determine cuántos billetes tiene de cada tipo.

38. De acuerdo con la ley de voltajes de Kirchoff, las corrientes i_1, i_2 e i_3 del circuito en paralelo mostrado en la figura 14 satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} i_1 + 2(i_1 - i_2) + 0i_3 = 6 \\ 3i_2 + 4(i_2 - i_3) + 2(i_2 - i_1) = 0 \\ 2i_3 + 4(i_3 - i_2) + 0i_1 = 12 \end{cases}$$

Resuelva para i_1, i_2 e i_3.

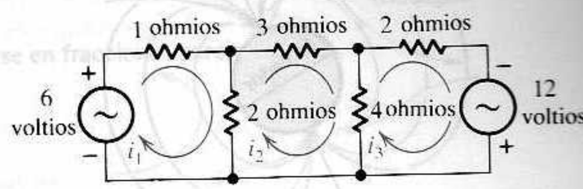


FIGURA 14

39. La gráfica de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa a través de los puntos (1, 1), (−1, 2) y (2, 2). Encuentre su ecuación.

40. Un tanque de 100 galones está lleno de agua en la cual se han diluido 60 lb de sal. Un segundo tanque contiene 200 galones de agua con 80 lb de sal diluida. ¿Cuánto deberá mezclarse de cada tanque para lograr una solución de 100 galones con 1/2 libra de sal por galón?

41. El contador de una grabadora registra el número de revoluciones del carrete que enrolla. Para hacer que la cinta mantenga en movimiento las cabezas de grabación de manera uniforme, el carrete que enrolla debe girar más rápidamente al principio y luego más lentamente. Puede demostrarse que la relación entre el tiempo t al que la cinta ha estado grabando (empezando en $t = 0$), y el número del contador x (empezando en $x = 0$) está dada por una función cuadrática de la forma

$$t(x) = ax^2 + bx$$

(a) Suponga que una cinta tiene un total de grabación de 45 minutos. Halle las constantes a y b si la cinta produce 400 revoluciones en 25 minutos y 600 revoluciones en 45 minutos.

(b) Suponga que una cinta en la parte (a) se devuelve completamente y luego se adelanta hasta que pase el material previamente grabado a la posición 550 del contador. ¿Cuántos minutos de grabación le quedan?

42. Los rayos cósmicos son desviados hacia los polos por el campo magnético de la Tierra, de tal manera que solamente los rayos más enérgicos pueden penetrar las regiones ecuatoriales (véase figura 15). Como resultado, el porcentaje de ionización y, por tanto, la conductividad σ de la estratosfera son mayores cerca de los polos que cerca del ecuador. La conductividad puede ser aproximada por la fórmula

$$\sigma = (A + B \operatorname{sen}^4 \phi)^{1/2}$$

donde ϕ es la latitud y A y B son constantes que deben escogerse de tal forma que se ajusten a los datos físicos. Las medidas del globo hechas en el hemisferio sur indicaron una conductividad de aproximadamente 3.8×10^{-12} siemens/metro a una latitud sur de 35.5° y 5.6×10^{-12} siemens/metro en

51° latitud sur (un siemens es el recíproco de un ohmio, el cual es una unidad de resistencia eléctrica). Determine las constantes A y B. ¿Cuál es la conductividad a 42° latitud sur?

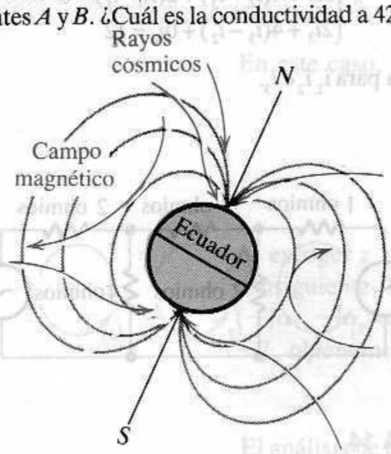


FIGURA 15

43. Para terminar su grado de magíster una persona completó 20 cursos en los cuales recibió calificaciones de A, B y C. Su promedio final fueron de 3.5. Si la cantidad de calificaciones de A que recibió fue el doble que las de B y las de B fueron el triple de las de C, ¿cuántas calificaciones de A, B y C respectivamente recibió, si por cada A recibe 4 puntos, por cada B recibe 3 puntos y por cada C recibe 2 puntos?

44. Determine condiciones a_1, a_2, b_1, y b_2 de modo que el sistema (9) tenga solamente la solución trivial.

45. Determine un valor de A y otro de B para que el sistema

$$\begin{cases} 2x - Ay = 10 \\ 6x - 9y = B \end{cases}$$

sea

(a) inconsistente

(b) dependiente

(c) consistente e independiente

8.3 Fracciones parciales

En la sección 1.8 vimos que podemos expresar una suma tal como

$$\frac{-4}{x+3} + \frac{4}{x-2}$$

como una fracción

$$\frac{20}{(x+3)(x-2)} \tag{11}$$

usando el mínimo común denominador. En cursos posteriores de matemáticas estamos frecuentemente interesados en el problema inverso: dada una fracción tal como (11), descomponerla en fraccionarios individuales o **parciales**, con denominadores $x + 3$ y $x - 2$. La solución de este tipo de problemas incluye sistemas de ecuaciones lineales.

Supongamos que $f(x)/g(x)$ es una expresión racional donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios tales que el grado de $f(x)$ es menor que el grado de $g(x)$. Cuando el denominador $g(x)$ se expresa como un producto de $(cx + d)^n$ y $(ax^2 + bx + c)^m$, con $n = 1, 2, \ldots$, y $m = 1, 2, \ldots$, donde $ax^2 + bx + c$ es **irreducible** (esto es, no se descompone en factores con coeficientes reales), la expresión $f(x)/g(x)$ puede descomponerse en una suma de fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_k}{(cx+d)^k} \quad \text{y} \quad \frac{B_k x + C_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

Consideremos dos casos.

Caso I. Correspondiendo a cada factor $(cx + d)^n$, $n = 1, 2, \ldots$, del denominador $g(x)$, la descomposición de $f(x)/g(x)$ contiene las fracciones parciales

$$\frac{A_1}{cx+d} + \frac{A_2}{(cx+d)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(cx+d)^n}$$

donde el A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son números reales.

Como primer ejemplo mostraremos cómo (11) puede escribirse en fracciones parciales.

EJEMPLO 1

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de (11).

Solución. Puesto que el exponente para cada uno de los factores $x + 3$ y $x - 2$ del denominador es $n = 1$, la descomposición de (11) contiene las fracciones parciales

$$\frac{A}{x+3} \quad \text{y} \quad \frac{B}{x-2}$$

donde A y B son constantes. Esto es,

$$\frac{20}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$$

Volviendo a escribir el lado derecho de la última ecuación con el mínimo común denominador $(x + 3)\,(x - 2)$, obtenemos

$$\frac{20}{(x+3)(x-2)} = \frac{A(x-2) + B(x+3)}{(x+3)(x-2)}$$

Puesto que los denominadores de ambos lados de la ecuación son iguales, los numeradores son también iguales:

$$20 = A(x-2) + B(x+3)$$

o

$$20 = (A+B)x - 2A + 3B$$

Puesto que la última ecuación es una identidad, los coeficientes de las potencias semejantes a x deben ser iguales:

$$\overbrace{0x + 20 = (A+B)x}^{\textbf{igual}} + \underbrace{(-2A + 3B)}_{\textbf{igual}}$$

Estas igualdades llevan al sistema de ecuaciones lineales con las variables A y B:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + 3B = 20 \end{cases}$$

Solucionando este sistema obtenemos $A = -4$ y $B = 4$ (Verifique esto). Por tanto,

$$\frac{20}{(x+3)(x-2)} = \frac{-4}{x+3} + \frac{4}{x-2}$$

EJEMPLO 2

Halle la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{2x^2 - x + 5}{x^3 - 2x^2 + x}$$

Solución. El denominador se factoriza como $x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$. Ahora, puesto que el exponente para el factor x es $n = 1$ y el exponente para el factor $(x-1)^2$ es $n = 2$, se deduce de la exposición del caso 1 que la descomposición de la expresión racional debe contener las fracciones parciales

$$\frac{A}{x} \quad \text{y} \quad \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

donde A, B y C son constantes. De

$$\frac{2x^2 - x + 5}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

obtenemos $\qquad 2x^2 - x + 5 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx,$

o $\qquad 2x^2 - x + 5 = (A + B)x^2 + (-2A - B + C)x + A$

Igualando los coeficientes de potencias semejantes a x en la última identidad, resulta

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -2A - B + C = -1 \\ A = 5 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $A = 5$, $B = -3$, y $C = 6$ y así

$$\frac{2x^2 - x + 5}{x(x-1)^2} = \frac{5}{x} + \frac{-3}{x-1} + \frac{6}{(x-1)^2}$$

Caso II. Correspondiendo a cada factor $(ax^2 + bx + c)^m$, $m = 1, 2, \ldots$, del denominador $g(x)$, la descomposición de $f(x)/g(x)$ contiene las fracciones parciales

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_mx + C_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

Donde el B_i y C_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ son números reales.

EJEMPLO 3

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 3x - 2}{(x^2 + x + 4)^2}.$$

Solución. Podemos fácilmente verificar de la fórmula cuadrática que $x^2 + x + 4$ es irreducible. Con $m = 2$, se deduce de la exposición del caso II que la forma de la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional dada debe ser

$$\frac{x^3+7x^2+3x-2}{(x^2+x+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+4)^2}$$

Colocando el lado derecho de la ecuación sobre el mínimo común denominador e igualando los numeradores, obtenemos

$$x^3+7x^2+3x-2 = (Ax+B)(x^2+x+4) + Cx + D$$

o $$x^3+7x^2+3x-2 = Ax^3 + (A+B)x^2 + (4A+B+C)x + 4B + D$$

Esta última identidad origina el sistema

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = 7 \\ 4A + B + C = 3 \\ 4B + D = -2 \end{cases}$$

el cual tiene la solución $A = 1$, $B = 6$, $C = -7$, $D = -26$. Así,

$$\frac{x^3+7x^2+3x-2}{(x^2+x+4)^2} = \frac{x+6}{x^2+x+4} + \frac{-7x-26}{(x^2+x+4)^2}$$

Si el grado de $f(x)$ es mayor o igual al grado de $g(x)$ en $f(x)/g(x)$, entonces debemos llevar a cabo una división antes de usar fracciones parciales. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 4

Halle la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{12x^3}{(2x+1)(3x^2+1)}$$

Solución. Puesto que el grado del numerador es el mismo del denominador, empezamos con una división

$$\frac{12x^3}{(2x+1)(3x^2+1)} = 2 - \frac{6x^2+4x+2}{(2x+1)(3x^2+1)}$$

Ahora, puesto que $3x^2 + 1$ es irreducible, tenemos

$$\frac{6x^2+4x+2}{(2x+1)(3x^2+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx+C}{3x^2+1}$$

De esto obtenemos

$$\begin{aligned} 6x^2+4x+2 &= A(3x^2+1) + (Bx+C)(2x+1) \\ &= (3A+2B)x^2 + (B+2C)x + A + C \end{aligned}$$

y $$\begin{cases} 3A + 2B = 6 \\ B + 2C = 4 \\ A + C = 2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema $A = \frac{6}{7}$, $B = \frac{12}{7}$, y $C = \frac{8}{7}$. Por tanto, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{12x^3}{(2x+1)(3x^2+1)} = 2 - \frac{\frac{6}{7}}{2x+1} - \frac{\frac{12}{7}x + \frac{8}{7}}{3x^2+1}$$

EJERCICIO 8.3

En los problemas 1 al 28, encuentre la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional dada.

1. $\dfrac{1}{x(x+3)}$

2. $\dfrac{1}{x(3x+1)}$

3. $\dfrac{x+4}{x^2-3x+2}$

4. $\dfrac{-3x+1}{x^2-5x+6}$

5. $\dfrac{2x^2+1}{x[x^2+x-6]}$

6. $\dfrac{3}{(x^2-1)(x-2)}$

7. $\dfrac{2x-3}{(x-2)^2}$

8. $\dfrac{3x^2+x-1}{x^2(x-3)}$

9. $\dfrac{x}{x^2-4}$

10. $\dfrac{2x}{9x^2-1}$

11. $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$

12. $\dfrac{-2x+1}{x^2(x-1)^2}$

13. $\dfrac{3x+1}{(x-2)(x^2+1)}$

14. $\dfrac{3x+5}{x(2x^2+4)}$

15. $\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)(x^2-x+1)}$

16. $\dfrac{t+6}{t^4-16}$

17. $\dfrac{t}{t^4-1}$

18. $\dfrac{x^2+2}{x^3-1}$

19. $\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$

20. $\dfrac{x-7}{(x^2+2x+4)(x^2+1)}$

21. $\dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)}$

22. $\dfrac{3x^2}{(x^2+2)(x-2)}$

23. $\dfrac{x^5+3x^2}{x^2-4}$

24. $\dfrac{x^2-1}{(x^2-4)^2}$

25. $\dfrac{y^3+y}{(y^2+1)^2}$

26. $\dfrac{x^5+x+4}{x^2+3x+2}$

27. $\dfrac{x^3}{x^3+3x^2+3x+1}$

28. $\dfrac{x^5}{x^3-2x^2+2x-1}$

En los problemas 29 y 30, encuentre la descomposición en fracciones parciales de la expresión dada.

29. $\dfrac{\cos t}{\cos^2 t+5\cos t+6}$

30. $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3 t+\operatorname{sen}^2 t}$

8.4 Sistemas de inecuaciones lineales

SEMIPLANOS

Una **inecuación lineal con dos variables *x* y *y*** es una desigualdad que tiene una de las formas

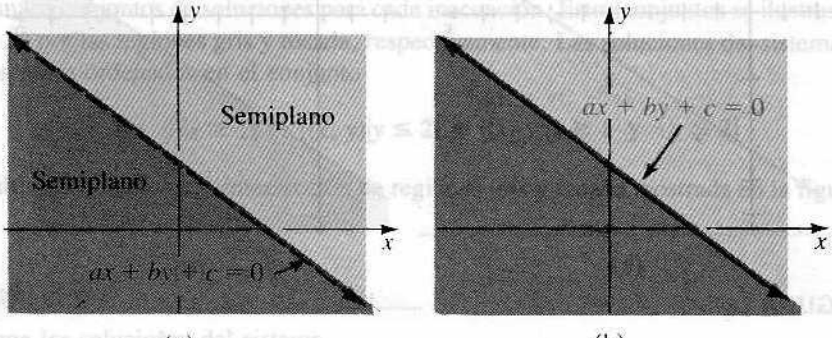
$$ax+by+c<0, \qquad ax+by+c>0 \tag{12}$$

$$ax+by+c\le 0, \qquad ax+by+c\ge 0 \tag{13}$$

Una **solución** de una inecuación lineal con dos variables es un par ordenado de números reales (x_0, y_0) que satisface la desigualdad cuando x_0 y y_0 son sustituidos por x y y, respectivamente. Puesto que las inecuaciones en (12) y (13) tienen infinitas soluciones, la notación

$$\{(x, y)|ax+by+c<0\},\ \{(x, y)|ax+by+c\ge 0\}$$

y así sucesivamente, se usa para denotar un conjunto de soluciones. Geométricamente, cada uno de estos conjuntos describe un **semiplano**. Como se muestra en la figura 19, la gráfica de la ecuación lineal $ax+by+c=0$, divide el plano xy en dos regiones, o semiplanos. Uno de estos semiplanos es la gráfica del conjunto de soluciones de la inecuación lineal. Si la desigualdad es estricta, como en (12) dibujamos la gráfica de $ax + by + c = 0$ como una recta punteada, puesto que los puntos sobre la recta no están en el conjunto de soluciones de la inecuación. Véase figura 16(a). Por otra parte, si la desigualdad no es estricta, como en (13), el conjunto de soluciones incluye los puntos que satisfacen $ax + by + c = 0$, y así dibujamos el gráfico de la ecuación como una recta continua. Véase figura 16(b).



(a) (b)

FIGURA 16

EJEMPLO 1

Sobre la recta numérica la desigualdad $x \geq 1$ se satisface con todos los *números* a la derecha de $x = 1$, incluido $x = 1$. Sin embargo en el plano cartesiano, el conjunto $\{(x, y)|x \geq 1)\}$ incluye todos los *puntos* a la derecha de la recta vertical $x = 1$ incluyendo la recta. Este semiplano se ilustra en la figura 17.

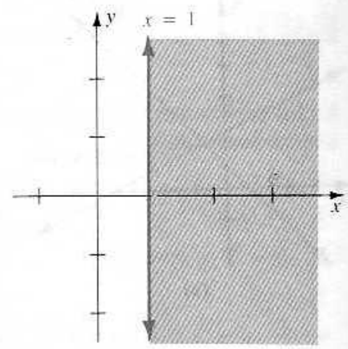


FIGURA 17

EJEMPLO 2

Grafique las soluciones de la inecuación

$$2x - 3y \geq 12 \qquad \textbf{(14)}$$

Solución. Primero, graficamos la recta,

$$2x - 3y = 12 \qquad \textbf{(15)}$$

como se muestra en la figura 18 (a). Resolviendo la inecuación (14) para y obtenemos

$$y \leq \tfrac{2}{3}x - 4 \qquad \textbf{(16)}$$

Puesto que la coordenada y de cualquier punto (x, y) en la gráfica (14) debe satisfacer (16), concluimos que el punto (x, y) debe estar sobre la recta o debajo de ella (15). Véase figura 18 (b).

Alternativamente, el conjunto

$$\{(x, y)|2x - 3y - 12 \geq 0\}$$

describe un semiplano limitado por la gráfica de (15). Así podemos determinar si la gráfica de la inecuación incluye la región sobre la recta o debajo de ella (15), determinando si un punto que no esté en la recta tal como (0, 0) satisface la inecuación original. Sustituyendo $x = 0$, $y = 0$ en (14), obtenemos la proposición falsa $0 \geq 12$. Esto implica que la gráfica de la inecuación incluye la región del otro lado de la recta

$$2x - 3y = 12$$

esto es, el lado que no contiene el origen.

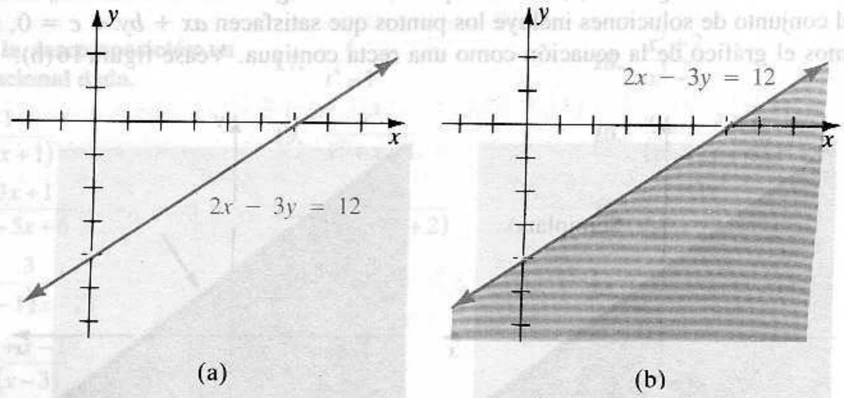


FIGURA 18

En general, dada una inecuación lineal de las formas (12) ó (13), podemos hacer la gráfica de las soluciones procediendo de la siguiente manera:

Cómo graficar una inecuación lineal

1. Haga la gráfica de la recta $ax + by + c = 0$.
2. Seleccione un punto que no esté sobre esta recta.
3. Sombree el semiplano que contiene el punto seleccionado si sus coordenadas satisfacen la inecuación original. Si no satisfacen la inecuación, sombree el otro semiplano.

EJEMPLO 3

Grafique las soluciones de $3x + y - 2 < 0$.

Solución. En la figura 19 indicamos la gráfica de $3x + y - 2 = 0$ con una recta punteada, puesto que no será parte del conjunto de soluciones. Entonces, seleccionamos (0, 0) como un punto que no está sobre la recta. Puesto que $x = 0$, $y = 0$ satisface la inecuación original, sombreamos la región que contiene el origen.

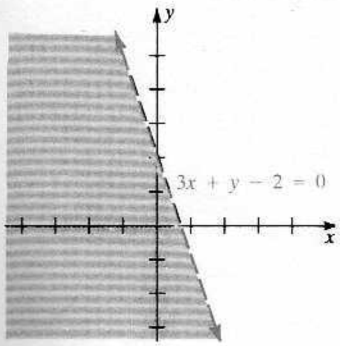


FIGURA 19

SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES

En la próxima sección examinaremos algunas aplicaciones que requieran soluciones de un **sistema de inecuaciones lineales.** Una **solución** de tal sistema es cualquier par ordenado de números reales (x_0, y_0) que satisfaga cada inecuación. En otras palabras, (x_0, y_0) es una solución de un sistema de inecuaciones lineales cuando es miembro del conjunto de soluciones *comunes* a todas las inecuaciones. Este conjunto de soluciones comunes es, simplemente, la *intersección* de conjuntos solución de las inecuaciones.

EJEMPLO 4

Haga la gráfica de las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

Solución. Los conjuntos

$$\{(x, y)|x \geq 1\} \quad \text{y} \quad \{(x, y)|y \leq 2\}$$

denotan los conjuntos de soluciones para cada inecuación. Estos conjuntos se ilustran en la figura 20 por las regiones gris y rosada, respectivamente. Las soluciones del sistema dado son los pares ordenados en el conjunto

$$\{(x, y)|x \geq 1\} \cap \{(x, y)|y \leq 2\} = \{(x, y)|x \geq 1 \ \text{y} \ \ y \leq 2\}$$

Este último conjunto es la intersección de regiones gris y rosada mostrada en la figura 23.

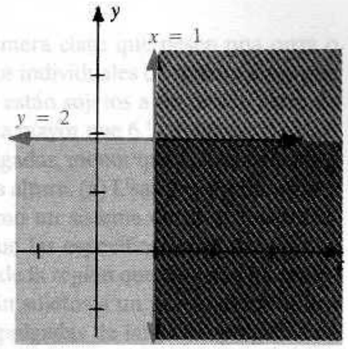


FIGURA 20

EJEMPLO 5

Grafique las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + \ \ y \leq 1 \\ -x + 2y \geq 4 \end{cases}$$

Solución. La gráfica de cada recta se muestra en la figura 21(a). La sustitución de (0, 0) en la primera inecuación da la proposición verdadera $0 \leq 1$, lo cual implica que la gráfica de las soluciones de $x + y \leq 1$, es el semiplano de *abajo* (e incluyendo) la recta $x + y = 1$. Esta es la región rosada de la figura 21(b). De igual forma, sustituyendo (0, 0) en la segunda inecuación obtenemos la proposición falsa $0 \geq 4$, y así la gráfica de las soluciones de $-x + 2y \geq 4$ es el semiplano de *arriba* (e incluyendo) la recta $-x + 2y = 4$. Esta es la región gris de la figura 21(b). La gráfica de las soluciones del sistema de inecuaciones es, entonces, la intersección de las gráficas de estos dos conjuntos solución. Esta es la intersección de las regiones gris y rosada en la figura 21(b).

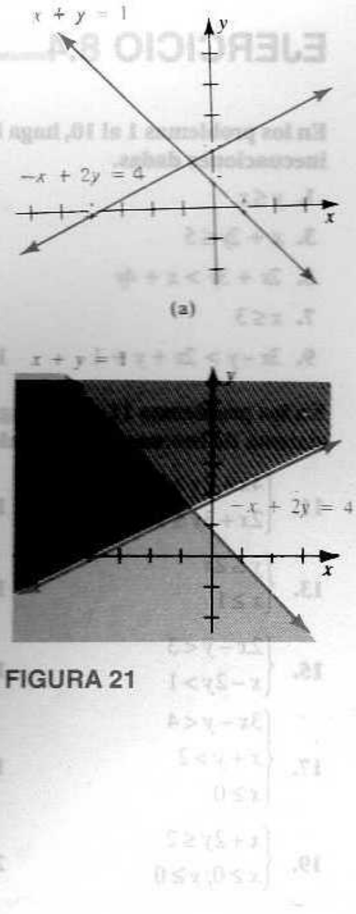


FIGURA 21

A menudo nos interesamos en las soluciones de un sistema de inecuaciones lineales sujetas a las restricciones $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Esto significa que la gráfica de las soluciones es un subconjunto de un conjunto que consiste en el primer cuadrante y los ejes coordenados no negativos. Por ejemplo, la inspección de la figura 21(b) revela que el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x + \ \ y \leq 1 \\ -x + 2y \geq 4 \end{cases}$$

sujeto a los requisitos agregados de $x \geq 0$, $y \geq 0$, no tienen soluciones.

EJEMPLO 6

La gráfica de las soluciones del sistema de inecuaciones lineales

$$\begin{cases} -2x + \ \ y \leq 2 \\ \ \ \ \ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

es la región que se muestra en la figura 22(a).

La gráfica de las soluciones de

$$\begin{cases} -2x + y \le 2 \\ x + 2y \ge 8 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

es la región que se muestra en la figura 22(b).

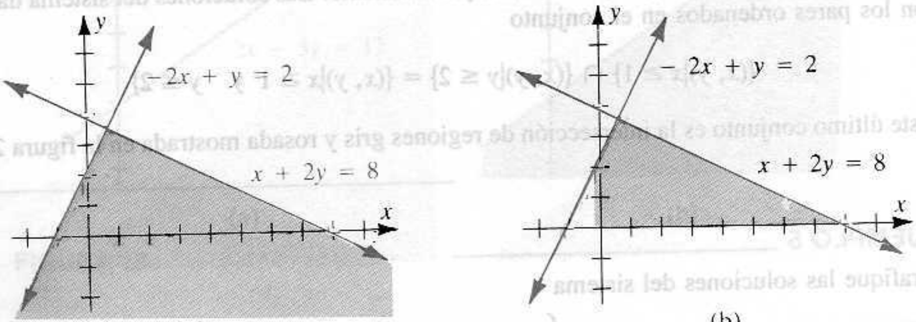


FIGURA 22

EJERCICIO 8.4

En los problemas 1 al 10, haga la gráfica de la solución de las inecuaciones dadas.

1. $y \le x$

2. $y \ge 3x + 1$

3. $x + 2y \le 5$

4. $x - 2y \le 6$

5. $2x + 3y > x + 4y$

6. $3x + 5y < 2x - y + 4$

7. $x \le 3$

8. $y \ge 4$

9. $3x - y > 2x + y + 1$

10. $2x + 4y - 5 > 3x + 6y - 4$

En los problemas 11 al 30, haga la gráfica de la solución del sistema de inecuaciones lineales dado.

11. $\begin{cases} 4x + 2y \ge 8 \\ 2x + 3y \le 9 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x + 2y \le 20 \\ x + 4y \le 14 \end{cases}$

13. $\begin{cases} y \le 2x \\ x \ge 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x + y \le 20 \\ y \ge 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x - y < 3 \\ x - 2y > 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y < 1 \\ x - y > 1 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x - y < 4 \\ x + y > 2 \\ x \ge 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x + y \le 1 \\ x + y \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + 2y \le 2 \\ x \ge 0; y \ge 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x + y \ge 2 \\ x \ge 0; y \ge 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2y \le 3x + 4 \\ 0 \le x \le 2; y \ge 1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} y > 2x \\ x \le 2 \\ y \ge 1 \end{cases}$

23. $\{-1 \le 2x + y \le 2$

24. $\{x \le y \le -x$

25. $\begin{cases} x + y \ge 4 \\ x \ge 2 \\ y \ge 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} -2 \le x - 2y \le 2 \\ 3x - 2y \ge 10 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4x + y \ge 7 \\ 2x + 3y \ge 6 \\ x \ge 1, y \ge 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x - 2y \ge 2 \\ y \ge 2 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x - y \ge -1 \\ x - 2y \le 5 \\ 3x + y \ge 10 \\ y \ge 0 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x + 5y \le 2 \\ x - 2y \le 1 \\ x \ge 0 \end{cases}$

En los problemas 31 y 32, encuentre un sistema de inecuaciones lineales que describa la región mostrada en la figura.

31.

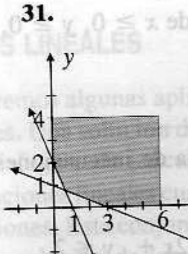


FIGURA 23

32.

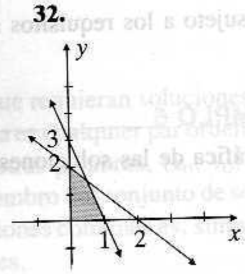


FIGURA 24

33. Considere el sobre de longitud x y altura y mostrado en la figura 25 y la siguiente regulación postal, de noviembre de 1978:

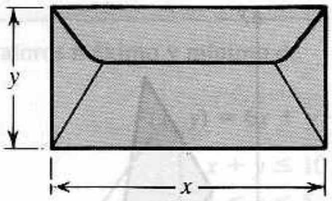


FIGURA 25

Todos los artículos de primera clase que pesen una onza o menos, y todos los artículos individuales de tercera clase que pesen dos onzas o menos están sujetos a un precio extra de correo cuando la altura sea mayor que 6 $^1/_8$ pulgadas o el largo sea mayor que $11^1/_2$ pulgadas, menor que 1.3 veces la altura, o mayor que 2.5 veces la altura. (a) Usando x y y, interprete la regulación anterior como un sistema de inecuaciones lineales. (b) Asumiendo que las especificaciones de peso se satisfacen, haga la gráfica de la región que describa los tamaños del sobre que no están sujetos a un precio extra de correo. (c) ¿Un sobre de 8 pulgadas de largo y 4 pulgadas de altura requiere precio extra?

8.5 Introducción a la programación lineal

EL PROBLEMA BASICO

Una **función lineal con dos variables** es una función de la forma

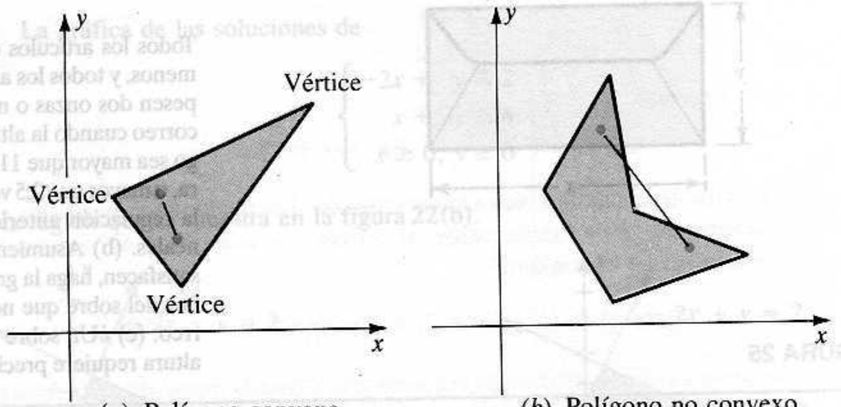
$$F(x, y) = ax + by + c \text{ donde } a, b \text{ y } c \text{ son constantes} \tag{17}$$

con dominio en un subconjunto del plano cartesiano. El problema básico en la **programación lineal** es encontrar el valor máximo (más grande) o el valor mínimo (más pequeño) de una función lineal que está definida en un conjunto determinado por un sistema de inecuaciones lineales. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} &\textbf{maximice} \quad F(x, y) = 5x + 10y \\ &\textbf{sujeta a} \quad \begin{cases} x + 2y \le 6 \\ 3x + \ \ y \le 9 \\ x \ge 0, \ y \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

es un problema típico de programación lineal. En este contexto, F se llama **función objetivo** y las inecuaciones lineales se llaman **restricciones**. Se dice que cualquier par ordenado de números reales (x_0, y_0) que satisfaga todas las restricciones es una **solución factible** del problema. El conjunto de soluciones factibles se denotará por S. Se puede demostrar que para cualquier par de puntos de la gráfica de S, el segmento de recta que los une está completamente en la gráfica de S. Cualquier conjunto del plano que tenga esta propiedad se llama **convexo.** La figura 26(a) ilustra un polígono convexo y la figura 26(b), un polígono que no es convexo. Los puntos de las esquinas del conjunto convexo S determinados por las restricciones se llaman **vértices**.

En todo este análisis nos preocuparemos por la gráfica del conjunto S de las soluciones factibles del sistema de inecuaciones lineales en las cuales $x \ge 0$ y $y \ge 0$. Exponemos el siguiente teorema sin demostración.



(*a*) Polígono convexo (*b*) Polígono no convexo

FIGURA 26

TEOREMA 1

Sea $F(x, y) = ax + by + c$ definida en un conjunto S. Si la gráfica de S es un polígono convexo, entonces F tiene a la vez un valor máximo y uno mínimo sobre S, y cada uno de éstos está localizado en un vértice de S.

EJEMPLO 1

Encuentre los valores máximo y mínimo de

$$F(x, y) = 10x + 15y$$

sujeta a

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ 3x + \ \ y \leq 9 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución. Primero hacemos la gráfica del conjunto S de soluciones factibles y hallamos todos los vértices resolviendo las ecuaciones simultáneas apropiadas. Por ejemplo, el vértice $(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$ se obtiene resolviendo el sistema

$$x + 2y = 6$$
$$3x + \ \ y = 9$$

(Véase figura 27). Se deduce del teorema 1 que los valores máximo y mínimo de F ocurren en los vértices. De la tabla adjunta, vemos que el valor máximo de la función objetivo es

$$F(\tfrac{12}{5}, \tfrac{9}{5}) = 10(\tfrac{12}{5}) + 15(\tfrac{9}{5}) = 51$$

El valor mínimo es $F(0, 0) = 0$.

VERTICE	VALOR DE F
(0, 3)	45
(0, 0)	0
(3, 0)	30
$(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$	51

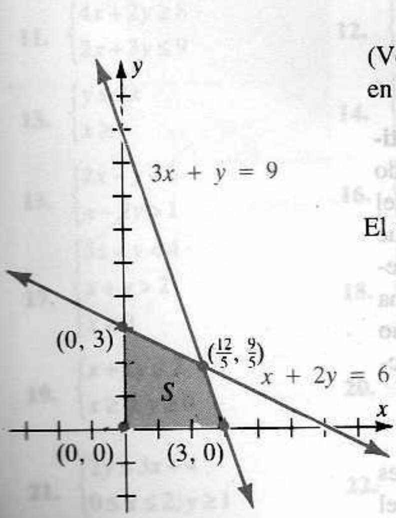


FIGURA 27

EJEMPLO 2

Encuentre los valores máximo y mínimo de

$$F(x, y) = 6x + y + 1$$

sujeta a

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 1 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

Solución. En la figura 28 se da la gráfica de S determinada por las restricciones, y los vértices están marcados. Como vemos en la tabla adjunta, el valor máximo de F es

$$F(5, 5) = 6(5) + 5 + 1 = 36$$

El valor mínimo es

$$F(1, 2) = 6(1) + 2 + 1 = 9$$

VERTICE	VALOR DE F
(1, 6)	13
(1, 2)	9
(5, 2)	33
(5, 5)	36
(4, 6)	31

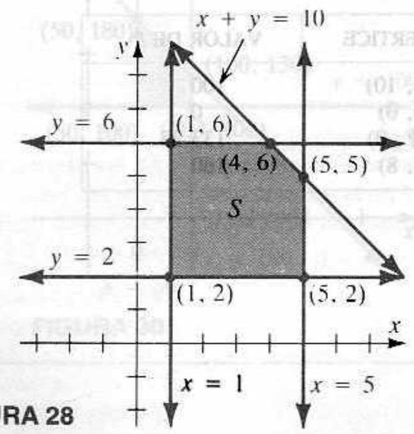


FIGURA 28

EJEMPLO 3

Una pequeña compañía manufacturera de herramientas tiene dos fraguas F_1 y F_2, cada una de las cuales, por las necesidades de mantenimiento, puede operar máximo 20 horas por día. La compañía hace dos tipos de herramientas: A y B. La herramienta A requiere 1 hora en la fragua F_1 y 3 horas en la fragua F_2. La herramienta B requiere 2 horas en la fragua F_1 y 1 hora en la fragua F_2. La compañía obtiene una utilidad de US\$20 por herramienta A y de US\$10 en la herramienta B. Determine el número de cada tipo de herramienta que la compañía debe hacer para maximizar su utilidad diaria.

Solución. Sea $x =$ el número de herramientas A que se producen cada día y $y =$ el número de herramientas B producidas cada día. La función objetivo es la utilidad diaria

$$P(x, y) = 20x + 10y$$

El número total de horas por día que ambas herramientas requieren en la fragua F_1 debe satisfacer

$$1 \cdot x + 2 \cdot y \leq 20$$

De forma similar, el número total de horas por día que ambas herramientas requieren en la fragua F_2 debe satisfacer

$$3 \cdot x + 1 \cdot y \leq 20$$

Así necesitamos

$$\text{maximizar} \quad P(x, y) = 20x + 10y$$

$$\text{sujeta a} \quad \begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 3x + \ \ y \leq 20 \\ x \geq 0, \ y \geq 0 \end{cases}$$

La gráfica de S determinada por las restricciones se muestra en la figura 29. En la tabla vemos que la utilidad máxima diaria es

$$P(4, 8) = 20(4) + 10(8) = 160$$

Esto es, cuando la compañía hace 4 de las herramientas A y 8 de las herramientas B cada día, su máxima utilidad diaria es de US$160.

VERTICE	VALOR DE P
(0, 10)	100
(0, 0)	0
$(\frac{20}{3}, 0)$	133.33
(4, 8)	160

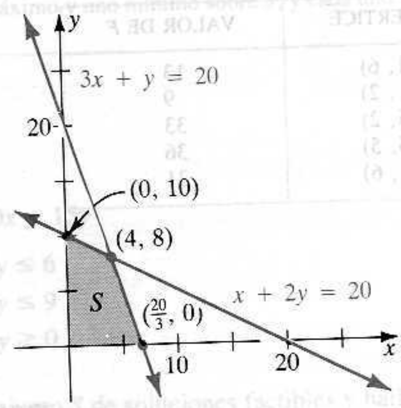


FIGURA 29

EJEMPLO 4

Durante su tiempo libre, John trabaja a destajo en la casa, haciendo pares de mitones, bufandas y gorros en forma de cono. Durante el invierno produce un total de 300 de estos artículos por mes. Tiene un pedido fijo mensual en una compañía grande de las afueras, que ordena por correo de 50 a 100 pares de mitones, por lo menos 100 bufandas y 70 gorros. Los costos del material usado son de US$0.20 por cada par de mitones, US$0.40 por cada bufanda, y US$0.50 por cada gorro. Determine el número de cada artículo que debería hacerse cada mes para minimizar su costo total mensual.

Solución. Si x y y denotan el número de pares de mitones y bufandas, respectivamente, suministrados por John a la compañía de órdenes por correo cada mes, el número de gorros suministrados es, entonces, $300 - x - y$. Sus costos totales mensuales son

$$C(x, y) = 0.2x + 0.4y + 0.5(300 - x - y)$$

o

$$C(x, y) = -0.3x - 0.1y + 150$$

Las restricciones son

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 300 - x - y \geq 0 \\ 50 \leq x \leq 100 \\ y \geq 100 \\ 300 - x - y \geq 70 \end{cases}$$

La última inecuación es equivalente a $x + y \leq 230$. La gráfica del conjunto S de soluciones factibles determinada por las restricciones y los vértices del conjunto se muestran en la figura 30. De la tabla adjunta obtenemos que $C\,(100, 130) = 107$ es el mínimo. Así, John debe hacer 100 pares de mitones, 130 bufandas y 70 gorros cada mes, para minimizar los costos totales.

VERTICE	VALOR DE C
(50, 100)	125
(50, 180)	117
(100, 130)	107
(100, 100)	110

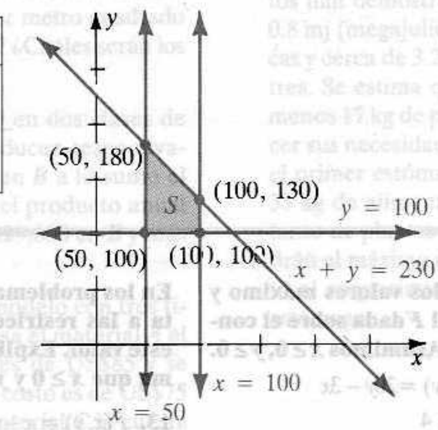


FIGURA 30

Del análisis precedente, Ud. no debe tener la impresión de que una función objetivo debe tener tanto un máximo como un mínimo. Si la gráfica de S no es un polígono convexo, entonces la conclusión del teorema 1 puede no ser verdadera. Dependiendo de las restricciones, podría suceder que una función lineal F tenga un mínimo, pero no un máximo (o viceversa). Sin embargo, se puede demostrar que si F tiene un mínimo (o un máximo) en S, entonces se obtiene en el vértice de la región. También, el máximo (o el mínimo) de una función objetivo puede ocurrir en más de un vértice.

EJEMPLO 5

Considere la función lineal

$$F(x, y) = 5x + 20y$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} 3x + 4y \geq 12 \\ 2x + \ \ y \geq 4 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

La inspección de la figura 31 muestra que la gráfica del conjunto S de las soluciones de las restricciones no es un polígono convexo. Se puede probar que

$$F(4, 0) = 20$$

es mínimo. Sin embargo, en este caso, la funcion objetivo no tiene máximo, puesto que $F(x, y)$ puede aumentar sin límite simplemente aumentando $x(x \geq 4)$ o aumentando y $(y \geq -4)$.

VERTICE	VALOR DE F
(0, 4)	80
$(\frac{4}{5}, \frac{12}{5})$	52
(4, 0)	20

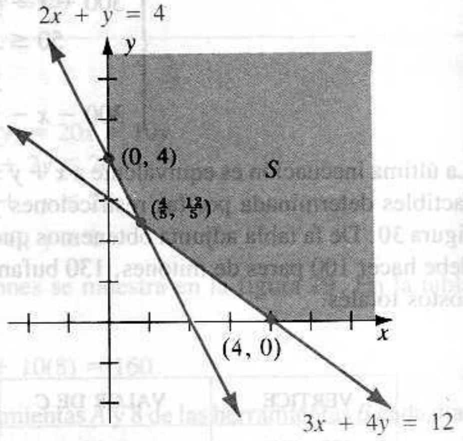


FIGURA 31

EJERCICIO 8.5

En los problemas 1 al 12, encuentre los valores máximo y mínimo, si existen, de la función lineal *F* dada sobre el conjunto *S* definido por las restricciones. Asumimos $x \geq 0, y \geq 0$.

1. $F(x,y) = 3x + 5y$
$$\begin{cases} y \leq 2 \\ y \geq x - 1 \end{cases}$$

2. $F(x,y) = 20y - 3x$
$$\begin{cases} y \leq 4 \\ x + y \geq 3 \\ y - x \leq 0 \end{cases}$$

3. $F(x,y) = 3x - 2y$
$$\begin{cases} 4x + y \leq 8 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

4. $F(x,y) = 3x + y$
$$\begin{cases} 2x + 5y \leq 10 \\ y \leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

5. $F(x,y) = 2x + 5y$
$$\begin{cases} 4x + y \leq 8 \\ y \geq x - 1 \end{cases}$$

6. $F(x,y) = 5x + 8y$
$$\begin{cases} 6 + x - 4y \leq 0 \\ 4 - 3x + y \leq 0 \\ 2x + 3y \leq 18 \end{cases}$$

7. $F(x,y) = 2x + 8y$
$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 6 \\ x + y \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

8. $F(x,y) = 3x + 2y + 4$
$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 18 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ y \leq 6,\ x \leq 4 \end{cases}$$

9. $F(x,y) = 4x + y + 1$
$$\begin{cases} 4x + 5y \leq 20 \\ x + 2y \geq 4 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

10. $F(x,y) = x - 2y + 10$
$$\begin{cases} 5x + 4y \leq 20 \\ x + 2y \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

11. $F(x,y) = -2x + 4y + 8$
$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ 2x + y \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

12. $F(x,y) = 5x + 10y$
$$\begin{cases} 2x + 5y \leq 20 \\ x - 2y \geq 1 \end{cases}$$

En los problemas 13 al 16, la función objetivo dada *F*, sujeta a las restricciones, tiene un valor mínimo. Encuentre este valor. Explique por qué *F* no tiene valor máximo. Asuma que $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

13. $F(x,y) = x - y + 6$
$$\begin{cases} x \leq 5, y \leq 4 \\ 2x + 3y \geq 6 \end{cases}$$

14. $F(x,y) = 4x + 5y + 6$
$$\begin{cases} x \geq 2, y \leq 6 \\ x + y \leq 8 \end{cases}$$

15. $F(x,y) = 2x - y + 7$
$$\begin{cases} 3x + y \geq 12 \\ 3x - 2y \leq 6 \\ 3x + 4y \leq 24 \\ 3x - 2y \geq 2 \end{cases}$$

16. $F(x,y) = 10x + 5y + 6$
$$\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x + 2y \geq 4 \\ x + 4y \leq 8 \end{cases}$$

17. Una compañía fabrica televisores de dos tamaños: de 27 y de 20 pulgadas. Por los televisores de 20 pulgadas tiene una utilidad de US\$30 por cada uno, mientras que por los de 27 recibe US\$50 por cada uno. El número total de televisores que la compañía puede fabricar es 600 al mes. Por la disponibilidad de tubos de pantalla puede fabricar un máximo de 500 televisores de 20 pulgadas al mes. Además, el número de televisores de 20 pulgadas no puede ser menor que el doble de la cantidad de televisores de 27". Determine cuál debe ser la producción mensual de cada televisor para obtener el máximo de sus utilidades.

18. Una refinería de petróleo tiene una capacidad máxima de producción de 3,000 barriles de petróleo diario, y produce dos tipos de petróleo según su calidad, *A* y *B*. El costo de producir un barril del tipo *A* es 1.5 veces lo que cuesta producir un barril del tipo *B*, pero se vende a 1.8 del valor de éste. El barril de petróleo del tipo *A* se vende a US\$27 y tiene un costo de producción de US\$15. Se sabe además que debe producir una cantidad de barriles de petróleo de tipo B al menos superior en 300 barriles al doble de barriles del tipo A, pero no debe exceder los 2,500 barriles diarios.

¿Cuál debe ser la producción diaria de cada tipo de petróleo para maximizar las ganancias? ¿Cuál será la máxima ganancia diaria?

19. Para fertilizar el suelo de una finca se requiere, por metro cuadrado, usar un tipo de fertilizante que tenga como mínimo 60 g de la sustancia A, 40 g de la sustancia B y 35 g de la sustancia C. En una tienda se venden dos marcas X y Y. La unidad de la marca X contiene 5 g de A, 3 g de B y 5 g de C y cuesta US$3 cada unidad. La unidad de la marca Y contiene 2 g de A, 2 g de B y 1 g de C y cuesta US$1.40 la unidad. ¿Cuántas unidades se deben adquirir por metro cuadrado de cada marca para minimizar los costos? ¿Cuáles serán los costos mínimos por metro cuadrado?

20. Una persona desea invertir US$15,000 en dos clases de certificados de depósito A y B que producen respectivamente 7% y 8% anual. Desea invertir en B a lo sumo el triple de lo invertido en A. Determine el producto anual máximo si no puede invertir más de US$9,000 en B y más de US$7,500 en A.

21. Un fabricante de zapatos produce un modelo con tres tipos de materiales diferentes. Cuando usa el material A el costo de producir un par de zapatos es de US$85 y se vende a US$125. Si usa el material B, el costo es de US$75 y se vende a US$110. Cuando usa el material C le cuesta US$60 y se vende a US$80. Por restricciones en su línea de producción sólo puede producir 25,000 pares de zapatos mensuales. Por restricciones en el mercado de ventas, del material tipo A sólo puede producir una cantidad que no exceda la suma de las cantidades de los otros dos materiales. Por necesidades del mercado necesita producir al menos 10,000 zapatos con el material C; y la cantidad de pares del material B no debe exceder a 2 veces la cantidad de pares del tipo A pero debe ser superior a los 2,000 pares. ¿Cuántos pares de zapatos de cada tipo debe producir para que la ganancia sea máxima? ¿Cuál es la ganancia máxima?

22. Una compañía de seguros usa dos computadores, uno IBC 490 y uno CDM 500. Cada hora el IBC puede procesar 8 unidades (1 unidad = 100) de títulos médicos, 1 unidad de títulos de seguros de vida y 2 unidades de títulos de seguros de autos. Cada hora el CDM puede procesar 2 unidades de títulos médicos, 1 unidad de títulos de seguros de vida y 7 unidades de títulos de seguros de autos. La compañía encuentra necesario procesar por lo menos 16 unidades de títulos médicos, 5 unidades de títulos de seguros de vida y 20 unidades de títulos de seguros de autos por día. Si a la compañía le cuesta US$100 la hora hacer funcionar el IBC y US$200 la hora hacer funcionar el CDM, ¿cuántas horas máximo debe funcionar cada computador diariamente para conservar el costo de la compañía al mínimo?, ¿cuál es el costo mínimo?, ¿hay un costo máximo por día?

23. Los alces que viven en un parque nacional de Michigan comen plantas acuáticas que son altas en sodio pero bajas en energía (contienen una gran cantidad de agua), y plantas terrestres, las cuales son altas en contenido de energía pero esencialmente no contienen sodio. Los experimentos han demostrado que un alce puede obtener cerca de 0.8 mj (megajulios) de energía de 1 kilo de plantas acuáticas y cerca de 3.2 mj de energía de 1 kilo de plantas terrestres. Se estima que un alce adulto necesita comer por lo menos 17 kg de plantas acuáticas diariamente para satisfacer sus necesidades de sodio. Se ha estimado también que el primer estómago del alce es incapaz de digerir más de 33 kg de alimento diariamente. Encuentre la dosis diaria tanto de plantas acuáticas como de terrestres que contendrán el máximo de energía para la ingestión del alce, sujeta al requerimiento de sodio y a la capacidad del primer estómago.

CONCEPTOS IMPORTANTES

Sistemas de ecuaciones
solución de
ecuaciones no lineales
Sistema equivalente
Método de sustitución
Operaciones de eliminación
Sistemas de ecuaciones lineales
sistemas consistentes
sistemas inconsistentes
ecuaciones independientes
ecuaciones dependientes
Sustitución hacia atrás
Sistema homogéneo
Fracciones parciales
Cuadrático irreducible
Inecuación lineal
semiplano
solución de
Sistemas de inecuaciones lineales
Programación lineal
función objetivo
restricciones
solución factible
conjunto convexo

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 10, complete o conteste verdadero o falso.

1. El sistema $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ -\frac{2}{3}x+y=b \end{cases}$ es consistente para $b =$ ______ .

2. El sistema $\begin{cases} x+2y=4 \\ ax+by=8 \end{cases}$ está formado por ecuaciones dependientes si $a =$ ______ y $b =$ ______ .

3. El sistema $\begin{cases} y=x^2 \\ y=mx \end{cases}$ tiene dos soluciones si $m \neq 0$. ______

4. El sistema $\begin{cases} y=e^x \\ y=x+a \end{cases}$ no tiene solución si $a < 1$. ______

5. Los sistemas $\begin{cases} y=\sqrt{x+1} \\ y=\sqrt{3-x} \end{cases}$ y $\begin{cases} y^2=x+1 \\ y^2=3-x \end{cases}$ son equivalentes. __

6. Si un sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución, entonces se dice que las ecuaciones son ______ .

7. El origen está en el semiplano determinado por $2x + 3y > 6$. ______

8. La función lineal de un problema de programación lineal no siempre tiene máximo ______ .

9. La forma de la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{1}{x^3(x^2+1)}$ es $\dfrac{A}{x^3}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ ______ .

10. El sistema de inecuaciones $\begin{cases} y-x>1 \\ y<x \end{cases}$ no tiene solución. __

En los problemas 11 al 20, encuentre las soluciones.

11. $\begin{cases} x+2y=10 \\ x^2+y^2-10x=0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+y=10 \\ x^2+y^2-10x-10y=0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2+y^2-4x+6y=12 \\ x^2+y^2+10x+4y=96 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2+y^2-16y=45 \\ x^2+y^2+4x-20y=65 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 101x-10^y-10^{-y}=0 \\ x-10^y=0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} xy=18 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{3} \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x+5y+3z=10 \\ x-y+z=4 \\ x+y-z=2 \end{cases}$

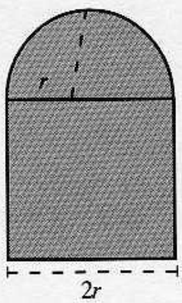
19. $\begin{cases} -x+y+5z=2 \\ x+2y-3z=1 \\ 2x+y+4z=4 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x-y+3z=1 \\ 3x-2y+4z=0 \\ 4x+2y-z=0 \end{cases}$

21. Un número de tres dígitos es 35 veces la suma de sus dígitos. La suma de los dos últimos es dos veces el primero. Cinco veces la suma de los dos primeros es cuatro veces el último. Encuentre el número.

22. El área de un rectángulo es 48 cm². Si una de sus diagonales mide 10 cm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

23. Con una soga de 6 m de largo se rodea exactamente una ventana normanda. Si el área de la ventana es de 11 m^2, ¿cuáles son sus dimensiones?



ventana normanda

FIGURA 32

24. Encuentre las coordenadas del punto de intersección P de la recta y la parábola presentadas en la figura 33.

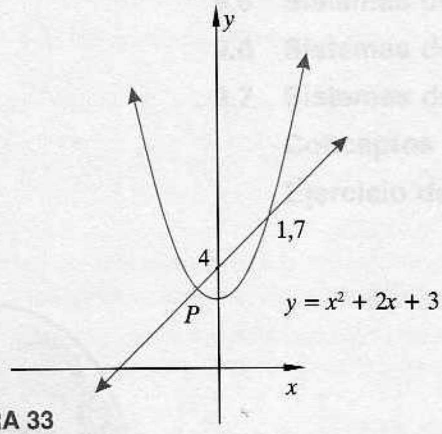


FIGURA 33

En los problemas 25 al 28, encuentre la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional dada.

25. $\dfrac{1}{x^2(x^2+4)}$ **26.** $\dfrac{x^5-2x^4+3x^2+1}{(x-2)^2}$

27. $\dfrac{x^5}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$ **28.** $\dfrac{x^6}{(x^2+3)^2}$

En los problemas 29 al 32, haga la gráfica del conjunto solución del sistema de inecuaciones dado.

29. $\begin{cases} 4x+y\le 5 \\ -2x+3y\le 1 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} 4x+y\le 8 \\ 2x+3y\le 14 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$

31. $\begin{cases} y\le 8-x \\ y\le 12-2x \\ y\le 6x+2 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} 1\le x\le 6 \\ 1\le y\le 4 \\ x+y\ge 3 \\ -x+y\le 1 \end{cases}$

33. Encuentre los valores máximo y mínimo de $F(x,y) = 10x + 15y$ con el conjunto de restricciones

(a) $\begin{cases} y\le 8-x \\ y\le 12-2x \\ y\le 6x+2 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 1\le x\le 6 \\ 1\le y\le 4 \\ x+y\ge 3 \\ -x+y\le 1 \end{cases}$

34. La función $F(x,y) = 2x + 5y$, sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} 2x+3y\ge 6 \\ x+4y\ge 5 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$$

tiene un valor mínimo. Explique por qué no tiene máximo.

35. Una finca tiene 200 acres para ser dedicados a la siembra de maíz y/o avena. Las semillas de avena cuestan US\$10 por acre y las de maíz US\$16 por acre. Los costos laborales son de US\$40 por acre para la avena y de US\$24 por acre para el maíz. Se prevé un ingreso de US\$440 por acre de avena y de US\$50 por acre de maíz. ¿Cuántos acres de cada cosecha se deberán sembrar para maximizar su utilidad, si no se desea gastar más de US\$2,480 por las semillas y de US\$7,200 por la mano de obra? ¿Cuál será la ganancia máxima prevista?

9

Matrices

Arthur Cayley

El enfoque de este capítulo se concentrará en tres temas: **matrices**, **determinantes**, y **sistemas de ecuaciones**. Veremos cómo los primeros dos conceptos se pueden usar para resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

Las matrices fueron creación del eminente matemático inglés Arthur Cayley (1821-1895). Como muchas invenciones matemáticas, la teoría y el álgebra de matrices surgieron como prolongación de sus investigaciones e intereses matemáticos primarios. Cayley era un niño prodigio en matemáticas y sobresalió en esa materia como estudiante del Trinity College en Cambridge. Sin embargo, a pesar de querer trabajar en matemáticas, llegó a ser abogado a la edad de 28 años. Después de soportar durante 14 años esta profesión, le ofrecieron un empleo como profesor de matemáticas en Cambridge en 1863, donde influyó para que la primera mujer fuera admitida. Arthur Cayley también inventó el concepto de la geometría n-dimensional e hizo muchas contribuciones significativas a la teoría de los determinantes. Entre 1881 y 1882, Cayley enseñó en los Estados Unidos en la Universidad de Johns Hopkins.

xD.

¿Quien más lee esto?

9.1 Introducción a las matrices

El método de solución, y la solución misma, de un sistema de ecuaciones lineales no depende de ninguna manera de los símbolos que se usen como variables. En el ejemplo 6 de la sección 8.2, vimos que la solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ 4x - 2y - z = -4 \\ 2x - y + 3z = 19 \end{cases} \tag{1}$$

es $(-2, -5, 6)$. Esta misma terna ordenada es también una solución de

$$\begin{cases} u + 2v + w = -6 \\ 4u - 2v - w = -4 \\ 2u - v + 3w = 19 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} r + 2s + t = -6 \\ 4r - 2s - t = -4 \\ 2r - s + 3t = 19 \end{cases}$$

La solución de un sistema de ecuaciones lineales depende solamente de los números que aparecen en el sistema. Veremos que podremos resolver (1) por operaciones apropiadas en el *arreglo* de números

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Antes de examinar esta idea, necesitamos desarrollar un sistema matemático cuyos elementos sean arreglos de números. Un arreglo rectangular como (2) se llama **matriz.**

DEFINICION 1

Una **matriz** A es un arreglo rectangular de números:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Si hay m filas y n columnas, decimos que el **orden** de la matriz es $m \times n$, y nos referimos a ella como "matriz $m \times n$" o, simplemente, como **matriz rectangular.** Una matriz $n \times n$ se llama **matriz cuadrada** y se dice que tiene un **orden** n. La **entrada,** o

elemento, en la i-ésima fila y en la j-ésima columna de una matriz A de orden $m \times n$ se denota como a_{ij}. Así, la entrada en, digamos, la tercera fila y la cuarta columna es a_{34}.

EJEMPLO 1

(a) El orden de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

es 2×3.

(b) El orden de la matriz

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

es 3×1.

(c) La matriz 2×2

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -3 & \pi \end{bmatrix}$$

es una matriz cuadrada de segundo orden.

NOTACION MATRICIAL

Para ahorrar tiempo y espacio al escribir, es conveniente usar una notación especial para una matriz general. Una matriz A de orden $m \times n$ se abrevia frecuentemente como $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

EJEMPLO 2

Determine la matriz

$$A = (a_{ij})_{3\times 2} \quad \text{si} \quad a_{ij} = i + j$$

para cada i y cada j.

Solución. Para obtener la entrada en la primera fila y la primera columna, tenemos que $i = 1$ y $j = 1$; eso es $a_{11} = 1 + 1 = 2$. El resto de las entradas se obtienen de manera similar:

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \\ 3+1 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Se dice que las entradas $a_{11}, a_{22}, \ldots$, en una matriz cuadrada están sobre su **diagonal principal**. Por ejemplo, las diagonales principales de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

se muestran aquí en círculos.

IGUALDAD

Dos matrices son **iguales** si tienen el mismo orden y si sus correspondientes entradas son iguales.

DEFINICION 2

Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{m \times n}$ entonces $A = B$ si y solamente si $a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y cada j.

EJEMPLO 3

De la definición 2, tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & -3 \\ 0 & -\pi & \sqrt{2} & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{100}{100} & 0.5 & \sqrt{4} & -3 \\ 0 & (-1)\pi & \sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}$$

pero

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

puesto que las correspondientes entradas en la tercera fila no son iguales. También,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

puesto que las matrices no tienen el mismo orden.

EJEMPLO 4

Halle los valores de x y y si

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ x^3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+1 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución. De la definición 2, igualamos las entradas correspondientes. Se deduce que

$$-1 = 2y + 1 \quad \text{y} \quad x^3 = 8$$

Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos $y = -1$ y $x = 2$.

EJERCICIO 9.1

En los problemas 1 al 10, establezca el orden de la matriz dada.

1. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

7. $[3]$

8. $[3\ 4\ 5]$

9. $(b_{ij})_{7\times 8}$

10. $(b_{ij})_{5\times 5}$

En los problemas 11 al 16, suponga que una matriz $A = (a_{ij})_{3\times 5}$ se define como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -8 & 4 & 7 \\ -1 & -4 & 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Encuentre el número indicado.

11. a_{15}

12. a_{34}

13. a_{23}

14. a_{31}

15. $a_{22} + a_{35}$

16. $a_{32} - a_{21}$

En los problemas 17 al 22, determine la matriz $(a_{ij})_{3\times 3}$ que satisfaga la condición dada.

17. $a_{ij} = i + j$

18. $a_{ij} = i^2 + j$

19. $a_{ij} = 2ij$

20. $a_{ij} = 2i + j^2$

21. $a_{ij} = 2i - 3j$

22. $a_{ij} = j^i - 1$

En los problemas 23 al 26, determine si las matrices dadas son o no iguales.

23. $\begin{bmatrix} \pi & |-2| \\ 2^3 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2.4 & 2 \\ 8 & (-1)^2 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 0 & |2-3| & 3 \\ -3/2 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3-3 & 1 & |-3| \\ -1.5 & 0^2 & -6/3 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

En los problemas 27 al 32, halle los valores de las incógnitas.

27. $\begin{bmatrix} -1 & x & 0 \\ -y & 4 & z-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & 2 & v \\ 2 & w & 4 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 2x+y & 1 \\ 3x-y & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 2x-y & 1 \\ 3x+y & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 2 & u \\ v & -u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & v \\ v & -v \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x \\ -y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} x^2-6x & x+y \\ y^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$

9.2 Algebra de matrices

En álgebra común, damos por sentado el hecho de que cualquier par de números reales pueden sumarse, restarse y multiplicarse. En álgebra de matrices, sin embargo, dos matrices pueden sumarse, restarse y multiplicarse solamente en ciertas condiciones.

ADICION DE MATRICES

Solamente las matrices que tienen el mismo orden pueden sumarse. Si A y B son ambas matrices $m \times n$ su **suma** es la matriz $m \times n$ formada al sumar las correspondientes entradas en cada matriz.

DEFINICION 3

Si $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$, entonces su **suma** es

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

EJEMPLO 1

Para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

su suma es

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+1 & 0+3 \\ 7+(-5) & 3+0 & -4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Se deduce directamente de las propiedades de los números reales y de la definción 3, que la operación de adición en el conjunto de matrices $m \times n$ satisface las siguientes propiedades:

Ley asociativa $\quad A + (B + C) = (A + B) + C$

Ley conmutativa $\quad A + B = B + A$

ELEMENTO NEUTRO

La **matriz cero** $m \times n$ denotada por O, es la matriz $m \times n$ con cada entrada igual a cero. Puesto que $A + O = A = O + A$ para cada matriz A $m \times n$ la matriz cero es el **elemento neutro** para el conjunto de las matrices $m \times n$. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

PRODUCTO ESCALAR

Definimos el **producto escalar** de una matriz y un número real como la matriz con cada entrada igual al producto del número real y la entrada correspondiente en la matriz dada.

DEFINICION 4

Si $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y k es cualquier número real, entonces el **producto escalar** de A y k es

$$kA = (ka_{ij})_{m\times n}$$

EJEMPLO 2

Para

$$k = 3 \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

se deduce de la definición 4 que

$$kA = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(2) \\ 3(3) & 3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 3

Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

encuentre $(-1)A + 2B$ y $(-1)A + A$.

Solución. Aplicando la definición 4, tenemos

$$(-1)A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad 2B = \begin{bmatrix} 14 & 4 & -2 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Así, de la definición 3,

$$(-1)A + 2B = \begin{bmatrix} -1+14 & 0+4 & -2+(-2) \\ 3+8 & -4+0 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 4 & -4 \\ 11 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$(-1)A + A = \begin{bmatrix} -1+1 & 0+0 & -2+2 \\ 3+(-3) & -4+4 & -5+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las siguientes propiedades del producto escalar se establecen fácilmente usando las definiciones 3 y 4. Si k_1 y k_2 son números reales, entonces

$$k_1(A + B) = k_1A + k_1B$$
$$(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$$
$$k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$$

INVERSO ADITIVO

Como muestra el ejemplo 3, el **inverso aditivo** $-A$ de la matriz A es $(-1)A$. Así,

$$A + (-A) = O = (-A) + A$$

para cualquier matriz A de orden $m \times n$. Usamos el inverso aditivo para definir la resta de dos matrices A y B de orden $m \times n$, como sigue:

$$A - B = A + (-B)$$

EJEMPLO 4

Si $A = [1\ 2\ 3]$ y $B = [-2\ 7\ 4]$, entonces $-B = [2\ -7\ -4]$, tenemos

$$A - B = [1 \quad 2 \quad 3] + [2 \quad -7 \quad -4] = [3 \quad -5 \quad -1]$$

De

$$A + (-B) = (a_{ij} + (-b_{ij}))_{m\times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$$

vemos que, para restar B de A, necesitamos solamente restar las entradas en B de las correspondientes entradas en A.

EJEMPLO 5

Si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 10 & 6 & 8 \\ 9 & -7 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix}$$

encuentre $A - B$ y $B - A$.

Solución

$$A - B = \begin{bmatrix} 4-5 & 5-1 & -2-3 \\ 10-(-1) & 6-2 & 8-6 \\ 9-4 & -7-9 & -1-(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 11 & 4 & 2 \\ 5 & -16 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 5-4 & 1-5 & 3-(-2) \\ -1-10 & 2-6 & 6-8 \\ 4-9 & 9-(-7) & -8-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -11 & -4 & -2 \\ -5 & 16 & -7 \end{bmatrix}$$

El ejemplo 5 ilustra que $B - A = -(A - B)$.

MULTIPLICACION DE MATRICES

Para encontrar el producto AB de dos matrices A y B, necesitamos que el número de columnas de A sea igual al número de las filas en B. Suponga que $A = (a_{ij})_{m\times n}$ es una matriz $m \times n$ y $B = (b_{ij})_{n\times p}$ es una matriz $n \times p$. Como se ilustra a continuación, para encontrar la entrada c_{ij} en el producto $C = AB$, hacemos parejas con los números de la fila i-ésima de A con los de la columna j-ésima de B. Luego multiplicamos los pares y sumamos los productos, como sigue:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \tag{3}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{Fila} \\ i\text{-ésima} \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{columna } j\text{-ésima} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{Fila} \\ i\text{-ésima} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \text{columna} \\ j\text{-ésima} \\ \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & c_{ij} & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Se deduce del (3) que el producto AB tiene m filas y p columnas. En otras palabras, el orden del producto $C = AB$ se determina por

$$A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Por ejemplo, el producto

$$\begin{array}{c c} & \\ 1^{\text{a}} \text{ fila} & \\ & \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2^{\text{a}} \text{ columna} \\ \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & 2^{\text{a}} \text{ columna} \\ 1^{\text{a}} \text{ fila} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \end{array}$$

es una matriz de dos filas y tres columnas. La entrada c_{12} de la primera fila, segunda columna del producto, se encuentra al aparear la fila y la columna indicadas, multiplicando los pares, y luego sumando:

$$c_{12} = (0)(7) + (1)(10) + (2)(13) = 36$$

Resumimos el análisis anterior con una definición formal.

DEFINICION 5

Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{n \times p}$, entonces el producto AB es la matriz C de orden $m \times p = (c_{ij})_{m \times p}$, donde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Aunque con la primera inspección la definición del producto de las dos matrices puede no parecer natural, tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, en la sección 9.6 se nos dará una nueva técnica para resolver algunos sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 6

Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

encuentre AB.

Solución. Usando la definición 5, tenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(-1) + 1(4) + 5(5) & 2(7) + 1(6) + 5(7) & 2(8) + 1(0) + 5(3) \\ 3(-1) + 0(4) + 4(5) & 3(7) + 0(6) + 4(7) & 3(8) + 0(0) + 4(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 27 & 55 & 31 \\ 17 & 49 & 36 \end{bmatrix}$$

Es posible que el producto AB exista aunque el producto BA pueda no estar definido.

EJEMPLO 7

Si

$$A = [6 \quad -5] \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

entonces se deduce de la definición 5 que

$$\begin{aligned} AB &= [6 \quad -5]\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \\ &= [6(1) + (-5)(3) \quad 6(-2) + (-5)(6)] \\ &= [-9 \quad -42] \end{aligned}$$

Sin embargo, puesto que B tiene dos columnas y A tiene solamente una fila, el producto BA no está definido.

EJEMPLO 8

Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

encuentre AB y BA

Solución

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(-2) + 2(-1) & 1(0) + 2(3) \\ 3(-2) + 4(-1) & 3(0) + 4(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(1) + 0(3) & -2(2) + 0(4) \\ -1(1) + 3(3) & -1(2) + 3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Nótese que en el ejemplo 8, aunque los productos BA y AB están ambos definidos, tenemos $AB \neq BA$. En otras palabras, la multiplicación de matrices no es, en general, conmutativa. Sin embargo, la multiplicación de las matrices satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} &\text{Ley asociativa:} && A(BC) = (AB)C \\ &\text{Leyes distributivas:} && A(B + C) = AB + AC \\ & && (A + B)C = AC + BC \end{aligned}$$

con la condición de que estos productos y sumas estén definidos (véanse problemas 25 al 27).

MATRIZ IDENTIDAD

El conjunto de todas las matrices cuadradas de un orden dado n tiene una identidad mutiplicativa esto es, hay una matriz única I_n de orden $n \times n$ tal que

$$AI_n = I_nA = A$$

para cualquier matriz A de orden $n \times n$. Decimos que I_n es la **matriz identidad de orden n** o, simplemente, la **matriz identidad**. Se puede demostrar que cada entrada sobre la diagonal principal de I_n es 1 y todas las otras entradas son 0:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son matrices identidad de segundo y tercer orden, respectivamente.

EJEMPLO 9

Verifique que

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es la identidad multiplicativa para el conjunto de matrices 2×2.

Solución. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

una matriz 2×2. Entonces

$$AI_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(1) + a_{12}(0) & a_{11}(0) + a_{12}(1) \\ a_{21}(1) + a_{22}(0) & a_{21}(0) + a_{22}(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

y

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)a_{11} + (0)a_{21} & (1)a_{12} + (0)a_{22} \\ (0)a_{11} + (1)a_{21} & (0)a_{12} + (1)a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

EJERCICIO 9.2

En los problemas 1 al 10, encuentre $A + B$, $B - A$, $2A - 3B$.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

5. $A = [1 \;\; 0]; B = [0 \;\; -1]$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & -8 & 7 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

7. $A = [245]; B = [32]$

8. $A = [0]; B = [-1]$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; B = [0]$

10. $A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

En los problemas 11 al 20, encuentre $A \cdot B$ y $B \cdot A$, si es posible.

11. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; B = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

17. $A = [-1 \;\; 1]; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; B = [-1 \;\; 2]$

20. $A = [1 \;\; 2 \;\; 3]; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

En los problemas 21 al 24, dé el orden de la matriz A, de manera que los siguientes productos estén definidos:

21. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} A$ **22.** $A \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **24.** $[3 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 0]\, A\, [1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 5]$

En los problemas 25 al 28, verifique la identidad dada para las matrices 2×2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

y los números reales u y v.

25. $A(B + C) = AB + AC$ **26.** $(B + C)A = BA + CA$

27. $A(BC) = (AB)C$ **28.** $(u + v)A = uA + vA$

29. Demuestre que si $A \cdot B$ y $B \cdot A$ tienen sentido, entonces son matrices cuadradas.

30. Si $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, ¿qué conclusión se puede sacar acerca de A y B? (*Nota:* $A^2 = A \cdot A$ y $B^2 = B \cdot B$)

31. Suponga que A y B son matrices cuadradas, ¿será $(A - B)(A + B) = A^2 + B^2$? Justifique su respuesta. ¿Qué propiedad tiene el producto de números reales que no tiene el producto de matrices cuadradas en general?

32. Sean

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Verifique que $AI_3 = I_3A = A$.

33. Dos personas X y Y contraen hepatitis infecciosa y tienen la posibilidad de contagiar la enfermedad a cuatro personas P_1, P_2, P_3 y P_4. Sea una matriz de 2×4 como sigue:

$$A = \begin{array}{c} \\ X \\ Y \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Si el individuo X (o Y) tiene contacto con cualquiera de las 4 personas, se incluye con 1 en la fila clasificada X (o Y), en la columna apropiada. Si X (o Y) no tiene contacto con una persona en particular se incluye un 0. Se definen los contactos entre P_1, P_2, P_3, P_4 con cuatro personas adicionales P_5, P_6, P_7 y P_8 por:

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Calcule el producto $A \cdot B$ e interprete las entradas.

34. Tres ebanistas: José, Pedro y Arturo trabajan a destajo para una compañía de muebles. Por cada juego de alcoba en caoba les pagan US\$500; si es de cedro les pagan US\$400 y si es de pino tratado les pagan US\$100. A continuación están las matrices A y B que representan sus producciones en enero y febrero. La matriz X es la matriz pago/unidad.

	Producción de enero A			Producción de febrero B			Salario/ unidad X	
	Caoba	Cedro	Pino	Caoba	Cedro	Pino		
José	2	0	3	1	2	3	Caoba	500
Pedro	1	1	4	2	0	3	Cedro	400
Arturo	1	2	3	2	1	4	Pino	100

Calcule las siguientes matrices y decida qué representan.
(a) AX (b) BX (c) $A + B$ (d) $(A + B)X$

35. Dos personas conocen un secreto. Tienen la posibilidad de comunicarse y decir el secreto a 4 amigos P_1, P_2, P_3, P_4. Sea una matriz A de 2×4 como sigue

$$A = \begin{array}{c} \\ X \\ Y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Si X (o Y) tiene contacto con cualquiera de esas 4 personas, se incluye con 1 en la fila clasificada X (o Y), en la columna apropiada; en caso contrario se incluye un 0. Análogamente se define la matriz B de los contactos de P_1, P_2, P_3 y P_4 con otros 4 amigos P_5, P_6, P_7, P_8.

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Calcule $A \cdot B$ e interprete las entradas.

36. Cuatro amigos P_1, P_2, P_3 y P_4 de diferentes países se comunican por correo electrónico. En la matriz A se indica si uno de ellos conoce la dirección electrónica del otro mediante un 1 y si no por 0, según criterio fila-columna.

$$A = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) Calcule A^2 e interprete las entradas. ¿Puede P_4 enviar un mensaje a P_1, vía otras personas de ese grupo?

(b) Halle A^3 e interprete las entradas.

37. Un almacén de ventas al por menor compra a almacenes de venta al por mayor dos marcas de equipos estereofónicos que constan de amplificadores, afinadores y micrófonos. Por lo limitado de las cantidades, el almacén debe comprar estos implementos a tres negociantes mayoristas. La matriz A da el precio al por mayor de cada pieza del equipo en dólares. La matriz B representa el número de unidades de cada pieza de equipo comprado (por ejemplo, $b_{11} = 1$ significa que un amplificador, un afinador y un conjunto de micrófonos de marca 1 se le compran al vendedor mayorista 1).

$$A = \begin{array}{r} \\ \text{Amplificadores} \\ \text{Afinadores} \\ \text{micrófonos} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Precio marca 1} & \text{Precio marca 2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 100 \\ 200 & 150 \\ 400 & 300 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{r} \\ \\ \text{Unidades marca 1} \\ \text{Unidades marca 2} \end{array} \begin{array}{c} \text{negociante} \\ \begin{array}{ccc} \text{por mayor 1} & \text{por mayor 2} & \text{por mayor 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Si

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Estado Impuesto a las ventas} & \text{Ciudad Impuesto a las ventas} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.006 & 0.01 \\ 0.06 & 0.01 \\ .006 & 0.01 \end{bmatrix} \end{array}$$

Encuentre la matriz $P = (AB)C$, e interprete sus entradas.

38. Tres camiones C_1, C_2, C_3 transportan mercancías para su venta desde una finca a tres ciudades diferentes. Las velocidades promedio V_1, V_2, V_3 de los camiones respectivamente en km/h se dan en la matriz V:

$$V = \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \\ 90 \end{bmatrix}$$

El número de horas h_1, h_2, h_3 que se demoran respectivamente en el viaje se dan por la matriz H:

$$H = [4 \quad 6 \quad 8]$$

La parte de un galón de gasolina g_1, g_2, g_3 que conserva cada camión para recorrer un km se da mediante la matriz G:

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} \\ \frac{1}{20} \\ \frac{1}{25} \end{bmatrix}$$

Se sabe que el precio por galón de gasolina es US\$1.50.

(a) Interprete la matriz:

$$D = [V_1h_1 \quad V_2h_2 \quad V_3h_3]$$

(b) Use las operaciones entre matrices para expresar mediante una matriz (a) la distancia total recorrida por los camiones y (b) el consumo total de gasolina.

(c) ¿Cuál es el costo por concepto de combustible que tiene la finca en el transporte de sus mercancías a cada ciudad?

(d) ¿Cuál es el costo total?

39. Una compañía posee cinco almacenes de llantas. El inventario de las llantas en el almacén S_1 se da por

	Marca X	Marca Y	Marca Z
Llantas trenzadas	100	50	40
Radiales	80	20	50
De acero trenzado	200	60	20
Llantas regulares	100	100	100

Los almacenes S_2 y S_3 tienen cada uno 3 veces el número de llantas que S_1; el almacén S_4 tiene la mitad de las llantas que tiene el almacén S_1, y el almacén S_5 tiene el doble del número de llantas que tiene S_1. Encuentre la matriz que muestra el inventario total de llantas que tiene la compañía.

9.3 Determinantes

Para cada matriz cuadrada A, podemos asociar un número llamado **determinante** de A. El determinante de una matriz cuadrada A se denomina generalmente $|A|$ o det A. Usaremos exclusivamente el símbolo anterior. En el caso especial de una matriz cuadrada de primer orden, el determinante de $A = (a_{11})$ es simplemente el número $|A| = a_{11}$.

Nota de advertencia: no confunda $|A|$ con la notación del valor absoluto.

Empezamos con la definición del determinante de una matriz de segundo orden.

DEFINICION 6

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

una matriz cuadrada de segundo orden. Entonces, el determinante de A es el número

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad \textbf{(4)}$$

EJEMPLO 1

Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

entonces, por la definición 6,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(4) - 2(3) = -2$$

Como ayuda para memorizar la fórmula de (4), podemos recordar que el determinante de la matriz A es la diferencia de los productos de los elementos en las diagonales:

restar productos

multiplicar multiplicar

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

La definición 6 nos muestra cómo encontrar el determinante de una matriz de segundo orden. Se requieren los siguientes conceptos para evaluar el determinante de una matriz de más alto orden.

MENOR Y COFACTOR

Para cada entrada a_{ij} en una matriz cuadrada A de orden $n (n \geq 2)$, el **menor** M_{ij} se define como el determinante de la matriz de orden $n - 1$ obtenida al suprimir la fila i-ésima y la columna j-ésima de A. Así, para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

tenemos

suprima la primera columna

suprima la primera fila →

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4(3) - 5(2) = 2$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - 5(1) = 1$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3) - 3(1) = 0$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1(5) - 3(2) = -1$$

y así sucesivamente.

El **cofactor** A_{ij} de la entrada a_{ij} se define como el menor M_{ij} multiplicado por $(-1)^{i+j}$, esto es,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Así, para la matriz A en (5) tenemos de lo anterior que,

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} = 2 \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} = -1 \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} M_{22} = 0 \\ A_{32} &= (-1)^{3+2} M_{32} = -(-1) = 1 \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Para una matriz de tercer orden, el coeficiente $(-1)^{i+j}$ del menor M_{ij} sigue el patrón

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Este patrón de signos de "tablero de damas" se extiende también a matrices de orden mayor que 3.

Ahora estamos en capacidad de establecer la definición del determinante de una matriz de orden n para $n \geq 2$.

DEFINICION 7

El determinante de una matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ de orden n $(n \geq 2)$ es el número

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

donde A_{1j}, $j = 1, 2, \ldots, n$, son los cofactores de las entradas de la primera fila.

Así, encontramos el determinante de una matriz cuadrada A multiplicando cada entrada de la primera fila de A por su cofactor y luego sumando estos productos. Cuando usamos la definición 7 para encontrar el valor de $|A|$, decimos que hemos **expandido o desarrollado el determinante de A por la primera fila.**

Para el determinante de una matriz 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

se deduce de la definición 7 que

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

o

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \textbf{(6)}$$

EJEMPLO 2

Evalúe $|A|$ para

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución. De (6) tenemos

$$|A| = 6\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 6(-22) - 5(-11) + 3(0) = -77$$

Multiplicando y luego factorizando, podemos volver a escribir (6) como

$$\begin{aligned}|A| &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{21}(-a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \\ &\quad + a_{23}(-a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31}) \\ &= a_{21}(-1)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}\end{aligned} \tag{7}$$

En otras palabras, la última línea es simplemente la expansión de A por la segunda fila. En efecto, es un ejercicio de factorización para demostrar que (7) es también igual a

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

y

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

Estos son, a su vez, la expansión de $|A|$ por la tercera fila y la expansión de $|A|$ por la primera columna. Estamos señalando, por supuesto, que el resultado general de un determinante puede expandirse por cualquier fila o cualquier columna.

TEOREMA DE EXPANSION

Establecemos el siguiente **teorema de expansión** sin demostración.

TEOREMA 1

Teorema de expansión

El deteminante de una matriz A de orden n $(n \geq 2)$ puede evaluarse multiplicando cada entrada en cualquier fila (o columna) por su cofactor y sumando los productos resultantes.

Como muestra el siguiente ejemplo, el teorema 1 es muy útil para encontrar el valor de $|A|$ cuando la matriz A tiene una fila o columna con varias entradas cero.

EJEMPLO 3

Calcule el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución. Puesto que la tercera columna tiene sólo una entrada diferente de cero, desarrollamos $|A|$ por la tercera columna. Así,

$$\begin{aligned}|A| &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43}\\ &= (0)A_{13} + (0)A_{23} + (0)A_{33} + (-2)A_{43}\end{aligned}$$

donde $$A_{43} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}$$

Usando (6), desarrollamos el último determinante por la primera fila:

$$\begin{aligned}A_{43} &= (-1)\left((1)\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 3 & 0\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}0 & 4\\ 2 & 0\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\right)\\ &= (-1)(-12 + 0 + 3(2))\\ &= (-1)(-6) = 6.\end{aligned}$$

Así, $$|A| = (-2)A_{43} = (-2)(6) = -12$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Los determinantes tienen muchas propiedades especiales, algunas de las cuales se dan en el siguiente teorema.

TEOREMA 2

Sea A una matriz cuadrada.

(i) Si toda entrada en una fila (o columna) de A es cero, entonces $|A| = 0$.

(ii) Si una matriz B se forma intercambiando dos filas (o columnas) de A, entonces $|B| = -|A|$.

(iii) Si una matriz B se forma multiplicando cada entrada en una fila (o columna) de A por un número real k, entonces $|B| = k|A|$.

(iv) Si dos filas (o columnas) de una matriz A son iguales, entonces $|A| = 0$.

(v) Si una matriz B se forma remplazando cualquier fila (o columna) de A por la suma de esa fila (o columna) y k veces cualquier otra fila (o columna) de A, entonces $|B| = |A|$.

Es fácil probar la parte (i) del teorema 2 a partir del teorema 1: Desarrollemos $|A|$ por la fila (o columna) que tenga todas las entradas cero. Como ejercicio, se le pedirá verificar las partes (ii) - (v) del teorema 2 para matrices de segundo orden (véanse problemas 31 al 34).

EJEMPLO 4

Sin desarrollar, se deduce inmediatamente del teorema 2(i) que

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & -8 & 6\end{vmatrix} = 0$$

EJEMPLO 5

Se deduce del teorema 2(ii) que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & 7 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

intercambiando la primera y la tercera columnas.

EJEMPLO 6

Factorizando 2 de cada entrada de la primera fila, se sigue del teorema 2(iii) que

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 7

Puesto que la primera y la segunda columnas son iguales, se deduce del teorema 2(iv) que

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & 6 \\ 7 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Como muestra el siguiente ejemplo, usando el teorema 2(v) se puede simplificar la evaluación de un determinante.

EJEMPLO 8

Halle $|A|$ para,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Solución. Usamos el teorema 2(v) para obtener una matriz con el mismo determinante que tiene una fila (o columna) con sólo una entrada diferente de cero. Para evitar fraccionarios, es mejor usar una fila (o columna) que contenga el elemento 1 ó -1, si es posible. Así, usaremos la primera fila para introducir ceros en la primera columna como sigue: multiplicamos la primera fila por 2, le sumamos el resultado a la segunda y obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 10 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

Ahora multiplicamos la primera fila por -3 y le sumamos el resultado a la tercera fila para obtener

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 10 \\ 0 & -11 & -13 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Desarrollando (9) por la primera columna encontramos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 10 \\ 0 & -11 & -13 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ -11 & -13 \end{vmatrix} = 19$$

Del teorema 2(v), se deduce que el valor del determinante de la matriz dada en (8) es también 19.

EJERCICIO 9.3

En los problemas 1 al 4, encuentre el menor y el cofactor de cada elemento de la matriz dada.

1. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

En los problemas 5 al 18, halle el valor del determinante de la matriz dada.

5. $[-2]$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} a & 1 & 2 & 3 \\ 0 & b & 3 & 4 \\ 0 & 0 & c & 5 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

En los problemas 19 al 26, establezca por qué la igualdad es verdadera sin calcular los determinantes dados.

19. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

22. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 7 & 8 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 8 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$

26. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

En los problemas 27 al 30, use el teorema 2(v) para introducir ceros, como en el ejemplo 8, antes de hallar el determinante dado.

27. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ **28.** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -4 & -5 & 6 \\ 4 & -6 & -7 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} -2 & -4 & 6 & -1 \\ 3 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ **30.** $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

En los problemas 31 al 34, verifique la identidad dada desarrollando cada determinante.

31. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ **32.** $\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$ **34.** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix}$

35. Pruebe que

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

36. Verifique que la ecuación matricial de una recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

En los problemas 37 al 40, encuentre los valores de λ para los cuales $|A - \lambda I_n| = 0$. Estos números se llaman valores propios (o característicos) de la matriz A.

37. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **38.** $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ **40.** $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

41. Sean $(0, 0)$, (a, b), (c, d), $(a + c, b + d)$ los vértices de un paralelogramo con a, b, c y d números positivos. Demuestre que el área a del paralelogramo es el determinante.

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

42. Si $C = A \cdot B$ donde A y B son matrices cuadradas del mismo orden, entonces $|C| = |A| \cdot |B|$. Demuestre este hecho para matrices de orden 2×2.

9.4 Matrices inversas

En álgebra común, cada número real a diferente de cero tiene un inverso multiplicativo b tal que

$$ab = ba = 1$$

donde el número 1 es la identidad multiplicativa. El número b es el recíproco $a^{-1} = 1/a$. En la teoría de matrices, solamente ciertas clases de matrices cuadradas tienen inversos multiplicativos.

INVERSO MULTIPLICATIVO

Si A es una matriz $n \times n$ y existe una matriz B de orden $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n$$

decimos que B es el **inverso multiplicativo** o, simplemente, el **inverso** de A. El inverso multiplicativo de A se escribe $B = A^{-1}$. Contrario de lo que ocurre en el sistema de números reales, nótese que el símbolo A^{-1} *no* denota el recíproco de A, esto es, A^{-1} no es $1/A$. En la teoría de matrices $1/A$ no está definido. Se dice que una matriz que tiene un inverso multiplicativo es no singular; de lo contrario, es singular.

EJEMPLO 1

Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Concluimos que $B = A^{-1}$

COMO ENCONTRAR EL INVERSO: METODO I

Podemos encontrar el inverso de una matriz no singular por dos métodos diferentes. El primer método que consideraremos usa determinantes. Empezamos con el caso especial donde A es una matriz 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Para que

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

sea el inverso de A, debemos tener

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por la multiplicación y la igualdad de matrices, encontramos que b_{11} y b_{21} deben satisfacer

$$\begin{aligned} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} &= 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

mientras b_{12} y b_{22} deben satisfacer

$$\begin{aligned} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} &= 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} &= 1 \end{aligned} \tag{11}$$

Resolviendo estos dos sistemas de ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, & b_{12} &= \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ b_{21} &= \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, & b_{22} &= \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned} \tag{12}$$

Nótese que cada denominador de (12) es el valor del determinante $|A|$. Así tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 3

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Si el determinante $|A| \neq 0$, entonces el inverso multiplicativo de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{13}$$

De la deducción que precede al teorema 3, hemos demostrado que $AA^{-1} = I_2$. Dejamos como ejercicio (véase problema 32) verificar que $A^{-1}A = I_2$, donde A^{-1} está dado por (13).

EJEMPLO 2

Encuentre A^{-1} para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución. Primero, calculemos el determinante de la matriz:

$$|A| = (3)(-4) - (2)(-7) = 2$$

Así, de (13) del teorema 3 se deduce que

$$A^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{o} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

El teorema 3 es un caso especial del siguiente teorema, el cual establecemos sin demostración.

TEOREMA 4

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{n\times n}$$

Si el determinante $|A| \neq 0$, entonces el inverso multiplicativo de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(14)}$$

donde A_{ij} es el cofactor de la entrada a_{ij} de A.

La matriz de cofactores dada en (14) se llama **adjunta** de A. En la matriz adjunta en (14), notamos que el cofactor A_{ij} está colocado en la fila j-ésima y la columna i-ésima.

EJEMPLO 3

Encuentre A^{-1} para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Solución. El determinante de A es $|A| = -86$. Ahora, para cada entrada en A el correspondiente cofactor es

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -18 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -12 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -26 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -16 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

Así, por (14) del teorema 4, la inversa de A es $-\frac{1}{86}$ veces la matriz adjunta:

$$A^{-1} = -\frac{1}{86}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = -\frac{1}{86}\begin{bmatrix} -18 & -12 & -16 \\ 4 & -26 & -6 \\ -15 & -10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{18}{86} & \frac{12}{86} & \frac{16}{86} \\ -\frac{4}{86} & \frac{26}{86} & \frac{6}{86} \\ \frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{43} & \frac{6}{43} & \frac{8}{43} \\ -\frac{2}{43} & \frac{13}{43} & \frac{3}{43} \\ \frac{15}{86} & \frac{5}{43} & -\frac{1}{86} \end{bmatrix}$$

En los teoremas 3 y 4, vimos que podíamos calcular A^{-1} dado que $|A| \neq 0$. Recíprocamente, si A^{-1} existe, entonces se puede demostrar que $|A| \neq 0$. Concluimos que

una matriz A de orden $n \times n$ es no singular si y solamente si $|A| \neq 0$

EJEMPLO 4

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

no tiene inverso puesto que $|A| = 8 - 8 = 0$. Así A es una matriz singular.

Debe manifestarse que el uso de (14) llega a ser tedioso para matrices de orden $n > 3$. Por ejemplo, para una matriz de orden 4 debemos, primero, calcular *dieciséis* determinantes 3×3. Un método más efectivo para encontrar el inverso multiplicativo de una matriz usa operaciones elementales entre las filas de la matriz.

COMO ENCONTRAR EL INVERSO: METODO II

Para *cualquier* matriz A, las **operaciones elementales entre filas** de A se definen como las tres siguientes transformaciones de A.

Operaciones elementales entre filas

(i) Intercambiar cualquier par de filas.
(ii) Multiplicar cualquier fila por una constante k diferente de cero.
(iii) Sumar un múltiplo constante diferente de cero de una fila a otra fila.

Por conveniencia, representamos estas operaciones entre filas por los siguientes símbolos:

R_{ij}: Intercambie la fila i-ésima con la fila j-ésima.
kR_j: Multiplique la fila i-ésima por k.
$kR_i + R_j$: Multiplique la fila i-ésima por k y sume el resultado a la fila j-ésima.

Exponemos sin demostración:

La secuencia de operaciones elementales entre filas que transforman una matriz A de orden $n \times n$ en la identidad multiplicativa I_n es la misma secuencia de operaciones elementales entre filas que transforma I_n en A^{-1}

Formando la matriz $n \times 2n$, que consiste en las entradas de A y I_n,

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}}_{A}\middle|\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}_{I_n}\right] \tag{15}$$

entonces aplicamos una secuencia de operaciones entre filas en (15) hasta que la transformemos en la nueva matriz:

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}\right]$$

El inverso de A es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Este procedimiento se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5

Encuentre A^{-1} para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución. Empezamos por formar la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La idea es transformar la matriz a la izquierda de la línea vertical en la matriz I_2. Ahora,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_{12}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{9}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-6R_2 + R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right]$$

Puesto que I_2 ahora aparece a la izquierda de la línea verrical, concluimos que la matriz a la derecha de esta línea es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

Este resultado puede verificarse por el método previo o por multiplicación. Al escoger el segundo procedimiento, vemos que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} - \frac{3}{9} & -\frac{2}{3} + \frac{6}{9} \\ \frac{2}{3} - \frac{6}{9} & -\frac{1}{3} + \frac{12}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} - \frac{1}{3} & \frac{6}{3} - \frac{6}{3} \\ -\frac{2}{9} + \frac{2}{9} & -\frac{3}{9} + \frac{12}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 6

Use el segundo método para encontrar A^{-1} para la matriz del ejemplo 3.

Solución. Tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-5R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -26 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 16 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -26 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-10R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 16 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -86 & -15 & -10 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{86}R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 16 & 3 & 2 & 0\\0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & \frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-6R_3+R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 16 & 3 & 2 & 0\\0 & 1 & 0 & -\frac{4}{86} & \frac{26}{86} & \frac{6}{86}\\0 & 0 & 1 & \frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-16R_3+R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{18}{86} & \frac{12}{86} & \frac{16}{86}\\0 & 1 & 0 & -\frac{4}{86} & \frac{26}{86} & \frac{6}{86}\\0 & 0 & 1 & \frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86}\end{array}\right]$$

Como antes, vemos que,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{18}{86} & \frac{12}{86} & \frac{16}{86}\\-\frac{4}{86} & \frac{26}{86} & \frac{6}{86}\\\frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86}\end{bmatrix}=\frac{1}{86}\begin{bmatrix}18 & 12 & 16\\-4 & 26 & 6\\15 & 10 & -1\end{bmatrix}$$

En conclusión, notamos que si una matriz A de orden $n \times n$ *no puede* transformarse en la identidad multiplicativa I_n por operaciones elementales entre filas, entonces A es necesariamente singular. Si, en algún punto de las aplicaciones de las operaciones elementales entre filas encontramos una fila de ceros en la matriz de la izquierda de la línea vertical, entonces la matriz A es singular. Por ejemplo, de

$$\left[\begin{array}{cc|cc}-2 & 4 & 1 & 0\\1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1+R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}-2 & 4 & 1 & 0\\0 & 0 & \frac{1}{2} & 1\end{array}\right]$$

vemos que ahora es imposible usando sólo operaciones entre filas obtener I_2 a la izquierda de la línea vertical. Así,

$$\begin{bmatrix}-2 & 4\\1 & -2\end{bmatrix}$$

es una matriz singular.

EJERCICIO 9.4

En los problemas 1 al 12, use el método I para encontrar el inverso multiplicativo, si existe, de la matriz dada.

1. $\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}6 & 3\\5 & 2\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}2 & -6\\-1 & 2\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix}c & -c\\c & c\end{bmatrix}$; $c \neq 0$

6. $\begin{bmatrix}c & d\\-d & c\end{bmatrix}$; $c \neq 0, d \neq 0$

7. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & 1 & -1\end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\2 & 3 & -8\\-1 & -1 & 5\end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix}-3 & 5 & 8\\2 & 4 & 6\\-1 & 7 & 4\end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\4 & -4 & 3\\6 & 5 & -3\end{bmatrix}$

En los problemas 13 al 24, use el método II para encontrar el inverso multiplicativo, si existe, de la matriz dada.

13. $\begin{bmatrix}1 & -3\\-2 & 4\end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix}3 & 5\\2 & 10\end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix}3 & 6\\-6 & -12\end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 8\end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 8 \\ -2 & \frac{3}{2} & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

25. Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden no singulares. Pruebe que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

26. Sea A una matriz de orden $n \times n$ no singular. Pruebe que A^{-1} es única.

27. Sea A una matriz de orden $n \times n$ no singular. Pruebe que $(A^{-1})^{-1} = A$.

28. Sean A, B, C matrices cuadradas del mismo orden y A diferente de la matriz nula. Si $A \cdot B = A \cdot C$, ¿se deduce que $B = C$? Justifique. Si su respuesta es negativa, ¿qué condición debe cumplir A para que la respuesta sea positiva?

29. Sea una matriz A cuadrada y no singular. Pruebe que $|A^{-1}| = 1/|A|$.

30. Sea $A = (a_{ij})_{n \times m}$ donde $a_{ii} \neq 0$, para todo i, y $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$. Determine A^{-1}.

31. Si $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, encuentre x y y.

32. Si A^{-1} está dado por (13), verifique $A^{-1}A = I_2$.

33. Es posible utilizar la multiplicación de matrices para codificar y decodificar mensajes secretos. Primero, las letras del alfabeto se convierten en números, $a = 1$, $b = 2$, ..., $z = 26$. Entonces los números se convierten en las entradas de una matriz cuadrada M. Para completar el código, M se multiplica por alguna matriz N "clave" no singular, que tenga el mismo orden de M. Por ejemplo,

$$\text{HELP} \rightarrow 8, 5, 12, 16 \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} = M$$

Si

$$K = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

entonces

$$KM = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 70 \\ -28 & -43 \end{bmatrix} = C$$

La matriz C contiene el mensaje codificado.

(a) ¿Cómo puede decodificarse C para obtener la matriz M?

(b) Si

$$K = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 0 & -22 & 59 \\ 1 & 23 & -31 \\ -1 & -26 & 71 \end{bmatrix}$$

decodifique C y determine el mensaje.

9.5 Sistemas de ecuaciones: uso de matrices aumentadas

MATRICES AUMENTADAS

En el ejemplo 6 de la sección 8.2, resolvimos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ 4x - 2y - z = -4 \\ 2x - y + 3z = 19 \end{cases} \tag{16}$$

encontrando el sistema equivalente en forma triangular:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ y + \frac{1}{2}z = -1 \\ z = 6. \end{cases} \tag{17}$$

El sistema (17) se obtuvo del (16) por una serie de operaciones que cambiaron los coeficientes de las variables y las constantes del lado derecho de cada ecuación. En todo este procedimiento, las variables actuaron como "acompañantes". Por tanto, estos cálculos pudieron simplificarse registrando solamente los coeficientes y términos constantes de una matriz,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{array}\right] \tag{18}$$

Esta matriz se llama **matriz aumentada** del sistema (16). Esto es para distinguirla de la **matriz de coeficientes**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \tag{19}$$

que contiene solamente los coeficientes de las variables en el sistema (16).

Cuando las operaciones de eliminación presentadas en la sección 8.1 se aplican al sistema de ecuaciones, obtenemos un sistema equivalente de ecuaciones. Estas operaciones de eliminación son análogas a las operaciones elementales entre filas que vimos en la sección precedente. Cuando las operaciones entre filas se aplican a la matriz aumentada, el resultado es la matriz aumentada de un sistema equivalente. Por esta razón, se dice que la matriz original y la matriz resultante son **equivalentes**.

Al resolver los sistemas de ecuaciones lineales usaremos las operaciones elementales entre filas para transformar la matriz aumentada de un sistema dado en una **forma escalonada** equivalente.

Forma escalonada de una matriz

(i) En la primera entrada de cada fila diferente de cero está el número 1.
(ii) En filas consecutivas diferentes de cero, la primera entrada 1 de la fila más baja aparece a la derecha del 1 de la fila más alta.
(iii) Las filas en las cuales las entradas son todas cero aparecen en la base de la matriz.

EJEMPLO 1

Las primeras dos matrices de abajo tienen forma escalonada, mientras que la tercera matriz no tiene forma escalonada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

viola (i)
viola (iii)
viola (ii)

Como vemos en el ejemplo 1, la forma escalonada de una matriz aumentada tiene aproximadamente *forma triangular* con entradas cero debajo de una diagonal cuyos elementos son todos 1.

EJEMPLO 2

Resuelva el sistema (16) usando operaciones elementales entre filas de su matriz aumentada (18).

Solución. Empezamos usando la primera fila para introducir ceros debajo del 1 de la primera columna.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{array}\right] \xrightarrow{-4R_1 + R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -10 & -5 & 20 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -10 & -5 & 20 \\ 0 & -5 & 1 & 31 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2 + R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -10 & -5 & 20 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{10}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{7}R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Puesto que la última matriz aumentada tiene forma escalonada (y corresponde al sistema (17)), hemos en realidad resuelto el sistema original. La última fila de la matriz implica que $z = 6$. Sustituyendo este valor en la ecuación correspondiente a la segunda fila de la matriz, obtenemos $y = -5$. Finalmente, sustituyendo $y = -5$ y $z = 6$ en la ecuación correspondiente a la primera fila obtenemos $x = -2$. Así, la solución es $(-2, -5, 6)$.

En el ejemplo 2, nótese que repetimos, en orden, las operaciones elementales entre filas correspondientes a las que realizamos en las ecuaciones cuando resolvimos este sistema por eliminación (véase ejemplo 6 de la sección 8.2). Así no estamos haciendo nada nuevo aquí. Simplemente, hemos suprimido las variables y los signos de igualdad de las ecuaciones y estamos contando con el formato de la matriz para mantener las cosas en orden.

EJEMPLO 3

Use operaciones elementales entre filas para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x + 5y + 6z = 7 \\ x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

Solución. Formamos la matriz aumentada del sistema y aplicamos operaciones entre filas hasta obtener la forma escalonada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

La última matriz aumentada está en forma escalonada y corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ \qquad y + 2z = \frac{5}{4} \\ \qquad\qquad z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

De la última ecuación, vemos inmediatamente que $z = -\frac{1}{2}$. De la segunda ecuación, obtenemos

$$y + 2(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{5}{4}, \quad \text{ó} \quad y = \tfrac{9}{4}.$$

Y, finalmente, la primera ecuación nos da

$$x + \tfrac{9}{4} - 2(-\tfrac{1}{2}) = 2, \quad \text{o} \quad x = -\tfrac{5}{4}$$

Por consiguiente, $(-5/4,\ 9/4,\ -1/2)$ es la solución del sistema.

EJEMPLO 4

Use operaciones elementales entre filas para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 6 \\ x + \ y - z = -2 \\ 4x - \ y - z = 2 \end{cases}$$

Solución. Tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-4R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta es la matriz aumentada del sistema

$$\begin{cases} x + y - \phantom{\tfrac{3}{5}}z = -2 \\ \phantom{x +{}} y - \frac{3}{5}z = 2 \end{cases}$$

Despejando x y y en términos de z, encontramos

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5}z. \\ y = \frac{3}{5}z - 2 \end{cases}$$

Así, el sistema dado es consistente, pero las ecuaciones son dependientes. Hay infinitas soluciones del sistema obtenido, asignando arbitrariamente valores reales a z. Si denotamos z con α, las soluciones del sistema constan de todas las ternas ordenadas de la forma $(\frac{2}{5}\alpha,\ \frac{3}{5}\alpha - 2,\ \alpha)$, donde α es cualquier número real.

La técnica estudiada en esta sección es también aplicable a los sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas. En el siguiente ejemplo, consideramos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

EJEMPLO 5

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 6 \\ 5x - y + 2z = -3 \end{cases}$$

Solución. Tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 6 \\ 5 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{-5R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & -11 & 22 & -33 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{11}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

De la última matriz, encontramos

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 6 \\ \phantom{x + 2{}} y - 2z = 3 \end{cases}$$

Usando la segunda ecuación para eliminar y de la primera, entonces obtenemos

$$\begin{cases} x \phantom{{}+ y - 2z} = 0 \\ y - 2z = 3 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$$

Como en el ejemplo 4, podemos asignarle cualquier valor a z. Por tanto, las soluciones del sistema son ternas ordenadas de la forma $(0, 2\alpha + 3, \alpha)$, donde α es cualquier número real.

EJEMPLO 6

Balancee la ecuación química

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Na} & + & H_2O & \to & \text{NaOH} & + & H_2 \\ \text{sodio} & & \text{agua} & & \text{hidróxido de sodio} & & \text{hidrógeno} \end{array}$$

Solución. Buscamos los números enteros positivos x, y, z y w para que la ecuación balanceada sea

$$x\,\text{Na} + y\,H_2O \to z\,\text{NaOH} + w\,H_2$$

Puesto que el número de átomos de sodio de cada lado de la ecuación debe ser el mismo, tenemos $x = z$. De igual forma, puesto que el número de átomos de hidrógeno debe ser el mismo en cada lado de la ecuación, tenemos $2y = z + 2w$. Finalmente, puesto que el número de átomos de oxígeno debe ser el mismo en cada lado de la ecuación, obtenemos $y = z$. Así, debemos encontrar los números enteros positivos que satisfagan el sistema homogéneo de 3 ecuaciones con 4 incógnitas

$$\begin{cases} x \quad - z \qquad\quad = 0 \\ 2y - z - 2w = 0 \\ \quad y - z \qquad = 0 \end{cases}$$

Usando operaciones elementales entre filas, encontramos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

y así

$$\begin{aligned} x &= z \\ y &= \tfrac{1}{2}z + w \\ z &= 2w \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} x &= 2w \\ y &= 2w \\ z &= 2w \end{aligned}$$

En este caso podemos asignar cualquier valor a w. Las soluciones del sistema pueden escribirse como $(2\alpha, 2\alpha, 2\alpha, \alpha)$, donde α es cualquier número real. Al escoger $\alpha = 1$, obtenemos números enteros positivos para x, y, z y w. Es decir, $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$ y $w = 1$. La ecuación balanceada es, entonces,

$$2\text{Na} + 2H_2O \to 2\text{NaOH} + H_2$$

EJERCICIO 9.5

En los problemas 1 al 4, escriba la matriz de los coeficientes y la matriz aumentada del sistema de ecuaciones dado.

1. $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ x + 3y = 21 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ 3y - 2z = 4 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ y + z = 3 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - y + z - 2w = 1 \\ y - 2z + 3w = 2 \\ x + w = 3 \\ y + 3z = -1 \end{cases}$

En los problemas 5 al 32, resuelva el sistema dado, o demuestre que no tiene solución, usando operaciones elementales entre las filas de su matriz aumentada.

5. $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ -5x + y = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = -1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -3x + y + z = 2 \\ x - 2y + z = -2 \\ 2x - y - 3z = 4 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x - 2y + 3z = 6 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 4 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + z = -2 \\ y - z = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} -3x + y - z = 2 \\ 3x + 2y - 4z = 5 \\ -x + 3y - 2z = -1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} -x + 2y - z = 3 \\ x + z = 5 \\ 3y - z = 4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 0 \\ 3x = 4 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 6x = 2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2y - z = 2 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x + y - z = 4 \\ -4x + z = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x + y - 2z = 5 \\ 2x + y - 3z = 5 \\ 5x - y + z = 2 \end{cases}$

21. $\begin{cases} -x + y - 4z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ 3x - 4z = 3 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x + y + z = 8 \\ -x + 2y - z = 4 \\ -2x + y - 2z = 2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 4x - y + 2z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \\ 5x + y + z = 5 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 8 \\ 2x - 3y + z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ -x - y + w = 1 \\ y + z - w = 3 \\ x + 2y + 3z + 4w = 12 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x - y + z - w = 4 \\ 2x + y - 3z + 4w = 6 \\ -x + 2y + z - 4w = -1 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x - y + w = 1 \\ y + z + w = 3 \\ 3x - z - w = 2 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x + 2y + z + w = 2 \\ 3x - y + z = 3 \\ y - z + w = 0 \\ 2x + z - w = 4 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

En los problemas 33 y 34, utilice el procedimiento ilustrado en el ejemplo 6 para balancear la ecuación química dada.

33. $S + NO_3H + H_2O \rightarrow SO_4H_2 + N_2$

34. $SO_4Fe + SO_4H_2 + O_2 \rightarrow (SO_4)_3Fe_2 + H_2O$

35. Encuentre una ecuación cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ cuya gráfica pasa por los puntos (1, –1), (2, 2) y (3, 5).

36. Encuentre los coeficientes a, b, c de modo que (1, 2, 3) (0, 1, 0) (–1, 2, –4) sean soluciones de la ecuación $ax + by + cz = 1$.

37. Encuentre, si existen, x, y, z, w tales que

$$\begin{bmatrix} x - y + z & z + w \\ 3y + w & x - w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

38. Escriba un sistema de ecuaciones correspondiente a la matriz ampliada.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

39. Una compañía tiene 100 empleados y paga por hora, de acuerdo con la calificación y el rendimiento de cada empleado, US\$8, US\$5 o US\$4. El total de empleados que gana US\$8 la hora es la mitad del número de empleados que gana US\$5. Si el total pagado en jornales por hora es de US\$544, encuentre el número total de empleados que gana US\$8, US\$5 y US\$4.

9.6 Sistemas de ecuaciones: uso de matrices inversas

FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA LINEAL

Usando la multiplicación y la igualdad de matrices, podemos escribir un sistema de n ecuaciones lineales con las n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad\;\; \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \tag{20}$$

como la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{21}$$

En otras palabras, podemos escribir (20) como

$$AX = B \tag{22}$$

donde $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $X = (x_{ij})_{n\times 1}$, $B = (b_{ij})_{n\times 1}$. Recuerde que A es la matriz de coeficientes para el sistema (20).

SOLUCION MATRICIAL

Ahora, si A^{-1} existe, podemos resolver (22) multiplicando ambos lados de la ecuación por A^{-1}:

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ I_nX &= A^{-1}B \end{aligned}$$

o

$$X = A^{-1}B \tag{23}$$

EJEMPLO 1

Use la matriz inversa para resolver el sistema

$$\begin{cases} 6x - \;\, y = 6 \\ 9x + 2y = -5 \end{cases}$$

Solución. Primero, escribimos el sistema dado en la forma

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Puesto que $\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$

la matriz de coeficientes tiene un inverso multiplicativo. A partir de los métodos de la sección 9.4, encontramos que

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

Por tanto, se sigue a partir de (23) que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -4 \end{bmatrix}$$

Por tanto, $x = \frac{1}{3}$ y $y = -4$ es la solución del sistema dado.

EJEMPLO 2

Use la matriz inversa para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + \ \ y + z = -1 \\ -x + 3y - z = 4 \\ \ \ x - \ \ y + z = 0 \end{cases}$$

Solución. El sistema dado puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cualquier método de la sección 9.4 dará

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Así, por (23) tenemos que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema está dada por $x = -5$, $y = 2$ y $z = 7$.

En conclusión, notamos que no todos los sistemas *consistentes* $n \times n$ de ecuaciones lineales pueden resolverse por el método esbozado arriba. Este procedimiento falla para aquellos sistemas en los cuales la matriz de coeficientes A no tenga inversa, es decir, para los cuales $|A| = 0$. Sin embargo, cuando $|A| \neq 0$, puede probarse que un sistema $n \times n$ de ecuaciones lineales tiene una solución única.

EJERCICIO 9.6

En los problemas 1 al 18, use la matriz inversa para resolver el sistema dado.

1. $\begin{cases} x - y = 7 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + 3y = 19 \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ 8x - 2y = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - 5y = 5 \\ -x + 10y = -15 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} -x - 3y = -7 \\ -2x + 6y = -9 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x - y + 3z = -3 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 3x + 3y + z = 9 \\ x - 2y + 4z = 8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 13 \\ 3y + z = 5 \\ x - 7y + z = -1 \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 4x - y + 2z = -1 \\ 2x + 3y + 8z = 3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 4x - 8y + 3z = -2 \\ 2x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 10 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + y - z + w = 4 \\ -x - y = -1 \\ 2x + y - 3w = -4 \\ 2y + z - 2w = -5 \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + z + w = 3 \\ 2x - 2y + w = 4 \\ 2y - z + 3w = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 3x + 2y + z = -1 \\ x + 3y - z = -5 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} x - y + z = -2 \\ 2x + y - 2z = 5 \\ 4x + y + 2z = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} -x + 8y + 4z = -1 \\ x - 2y + z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 12 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ -4x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$

En los problemas 19 al 22, use una matriz inversa para resolver el sistema

$$\begin{cases} 7x + 4y = b_1 \\ 9x + 5y = b_2 \end{cases}$$

para la matriz $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ **22.** $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

En los problemas 23 y 24, use la matriz inversa para resolver el problema.

23. La suma de tres números es 21. La suma del primero y el tercero es el doble del segundo. La diferencia del producto del primero con el segundo con la suma de 5 más el producto del segundo con el tercero es nueve. Encuentre los números.

24. Una compañía fabrica tres productos A, B y C de matrices m_1, m_2 y m_3. Las dos matrices

$$\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & 4 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \text{ y } \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{array}\begin{bmatrix} 52 \\ 94 \\ 118 \end{bmatrix}$$

representan, a su vez, el número de unidades de material usado en la elaboración de cada producto y el número de unidades de cada tipo de material usado en una semana específica. Encuentre

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

donde x, y y z son, respectivamente, el número de productos fabricados esa semana en especial.

25. Este problema muestra cómo la profundidad del océano y la velocidad del sonido en el agua pueden medirse por un procedimiento conocido como el **eco del sonido**. Suponga que un barco oceanográfico emite señales sonoras y que los tiempos de llegada de las señales reflejadas desde el fondo del océano se graban en dos boyas rastreadoras (véase figura 1). Usando la relación *distancia* = *velocidad* × *tiempo*, vemos en la figura que $2l_1 = vt_1$ y $2l_2 = vt_2$, donde v es la velocidad del sonido en el agua , t_1 y t_2 son los tiempos de llegada de las señales a las dos boyas, y l_1 y l_2 son las distancias indicadas.

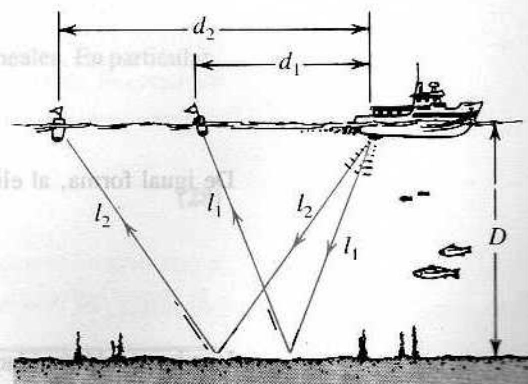


FIGURA 1

(a) Demuestre que la velocidad v del sonido en el agua y la profundidad D del océano satisfacen la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & -4 \\ t_2^2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v^2 \\ D^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^2 \\ d_2^2 \end{bmatrix}$$

[*Sugerencia*: use el teorema de Pitágoras para relacionar l_1, d_1 y D y l_2, d_2 y D].

(b) Resuelva la ecuación matricial en la parte (a) para obtener fórmulas para v y D en términos de las cantidades medibles d_1, d_2, t_1 y t_2.

(c) Las boyas, rastreando a 1,000 y 2,000 m, graban los tiempos de llegada de las señales reflejadas en 1.4 y 1.8 segundos respectivamente. Encuentre la profundidad del océano y la velocidad del sonido en el agua.

9.7 Sistemas de ecuaciones: uso de determinantes

En algunas circunstancias, podemos usar determinantes para solucionar sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

Suponga que las ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{24}$$

son independientes. Si multiplicamos la primera ecuación por b_2 y la segunda por $-b_1$, obtenemos

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ -a_2b_1x - b_2b_1y = -c_2b_1 \end{cases}$$

Entonces, podemos eliminar la variable y y luego despejamos x sumando las dos ecuaciones

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \tag{25}$$

De igual forma, al eliminar la variable x, encontramos

$$y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \tag{26}$$

Una inspección cuidadosa de (25) y (26) revela que cada numerador y el común denominador pueden escribirse como determinantes. Por ejemplo,

$$a_1b_2 - b_1a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad c_1b_2 - b_1c_2 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Hemos probado así el siguiente resultado.

TEOREMA 5

Si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces, el sistema (24) tiene la única solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{27}$$

EJEMPLO 1

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x - y = -3 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases}$$

Solución. Puesto que

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

se deduce de (27) que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{10}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}}{10}$$

Así,

$$x = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \quad \text{y} \quad y = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

REGLA DE CRAMER

El teorema 5 puede extenderse a sistemas más grandes de ecuaciones lineales. En particular, para sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{28}$$

tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 6

Si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

(continúa)

entonces el sistema (22) tiene la única solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \tag{29}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Los teoremas 5 y 6 son casos especiales de la **regla de Cramer***.

Los resultados dados en (29) del teorema 6 pueden abreviarse. Sea $|A|$ el determinante de la matriz de coeficientes de (28):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Si $|A_x|$, $|A_y|$ y $|A_z|$ denotan los determinantes formados al remplazar la primera, la segunda y la tercera columnas de $|A|$, respectivamente, por la columna que consta de los números d_1, d_2 y d_3, observamos que (29) puede escribirse como

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|}, \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} \tag{30}$$

EJEMPLO 2

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} -x + 2y + 4z = 9 \\ x - y + 6z = -2 \\ 4x + 6y - 2z = -1 \end{cases}$$

Solución. El determinante de la matriz de coeficientes es

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 126 \neq 0$$

* Llamada en honor del conocido matemático suizo G. Cramer (1704-1752) quien, en 1750, fue el primero en publicar estos resultados.

También,

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 6 \\ -1 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -378$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 9 & 4 \\ 1 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 252$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 63$$

De (30) encontramos que la solución del sistema es

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-378}{126} = -3, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{252}{126} = 2,$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{63}{126} = \frac{1}{2}$$

Cuando el determinante de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales es cero, la regla de Cramer no puede usarse.

EJEMPLO 3

Para el sistema

$$\begin{cases} 4x - 16y = 3 \\ -x + 4y = -0.75 \end{cases}$$

vemos que

$$\begin{vmatrix} 4 & -16 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$$

A pesar de que no podemos aplicar la regla de Cramer, el método de eliminación nos demostrará que el sistema es consistente, pero las ecuaciones son dependientes.

Las ecuaciones en (30) pueden extenderse a sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots x_n$. Para el sistema (20) de la sección 9.6, la regla de Cramer es

$$x_1 = \frac{|A_{x_1}|}{|A|}, \; x_2 = \frac{|A_{x_2}|}{|A|}, \; \ldots, \; x_n = \frac{|A_{x_n}|}{|A|}$$

Como cuestión práctica, la regla de Cramer rara vez se usa en los sistemas con gran número de ecuaciones, simplemente porque, al evaluar los determinantes, se convierte en una tarea tediosa. Para sistemas grandes, el método analizado en la sección 9.5 es el más eficiente de los métodos de solución.

EJERCICIO 9.7

En los problemas 1 al 14, use la regla de Cramer para solucionar el sistema dado.

1. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 3y = 12 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -2x + 6y = -3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ -3x + 2y = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 7 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = -1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x + 8y - z = -1 \\ x - 2y + z = 5 \\ 3x + 2y + 2z = 12 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - 2y + z = 5 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x - 2y = 16 \\ x + y + z = -3 \\ -x + 3y - z = 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x - 4y + z = 1 \\ x - 2y = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ x - z + w = -1 \\ y + 2z + w = 3 \\ x + y - w = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + 2y + z - w = 2 \\ x + y - 2w = -1 \\ 2x + 2y + 3z = 71 \\ x + y = 1 \end{cases}$

15. Demuestre que si todas las entradas en una matriz son números enteros, entonces su determinante es un número entero. Aplique la regla de Cramer, saque una conclusión acerca de la naturaleza de la solución de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, si todas las constantes del sistema son racionales y el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

CONCEPTOS IMPORTANTES

Matrices
- orden
- de orden n
- entradas
- igualdad
- suma
- producto escalar
- resta
- multiplicación

Diagonal principal de una matriz cuadrada
Matriz cero
Matriz identidad aditiva
Inverso aditivo
Matriz identidad de orden n
Determinante
Menor
Cofactor
Desarrollo de un determinante

Inverso multiplicativo
Matriz no singular
Matriz singular
Matriz adjunta
Operaciones elementales entre filas
Matriz aumentada
Matriz de coeficientes
Matrices equivalentes
Forma escalonada de una matriz
Regla de Cramer

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 10 complete, o conteste falso o verdadero.

1. Si A es una matriz cuadrada y $|A| \neq 0$ entonces A^{-1} existe.____
2. Si la matriz A tiene 2 filas y 4 columnas, y la matriz B tiene 3 filas y 2 columnas, entonces el orden de $B \cdot A$ es ____.
3. Si $A = (a_{ij})_{5\times 3}$, donde $a_{ij} = i^3 - 4j^2$, entonces la entrada en la cuarta fila y tercera columna es ________.
4. Si X_1 y X_2 son soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$, entonces $\alpha X_1 + \beta X_2$ también es solución cualesquiera sean los números reales α y β____.
5. Si $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 1$, entonces $x =$ ________.
6. Si $A = (a_{ij})_{n\times n}$ y $a_{ij} = 0$ si $i > j$, entonces $|A| =$ ________.
7. Puede ser que $|A + B| \neq 0$ a pesar de que $|A| = 0$ y $|B| = 0$.____
8. Si $ab \neq 0$ entonces $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{vmatrix}$____.
9. Si $A = (a_{ij})_{3\times 5}$ y $B = (b_{ij})_{2\times 4}$, y C es una matriz para la cual $A \cdot C \cdot B$ está definido, entonces el orden de C es____.
10. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ y $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $B =$ ________.
11. Despeje las incógnitas $\begin{bmatrix} 2x - 3y & y + w \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x + z & 3x + 4y \end{bmatrix}$

12. Para $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ encuentre $A + B$ y $-2A + 2B$

13. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$ encuentre $A \cdot B$ y $B \cdot A$

14. Para $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ encuentre $A \cdot B$

15. Encuentre todos los cofactores A_{ij} de las entradas a_{ij} para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

16. Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ y suponga que $|A| = 3$. Determine:

(a) $|B|$ si $B = 2A$

(b) $|C|$ si $C = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

(c) $|D|$ si $D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+2a_{11} & a_{22}+2a_{12} & a_{23}+2a_{13} \\ a_{31}+3a_{11} & a_{32}+3a_{12} & a_{33}+3a_{13} \end{bmatrix}$

(d) $|G|$ si $G = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ -3a_{21} & -3a_{22} & -a_{23} \\ -\frac{a_{31}}{6} & -\frac{a_{32}}{6} & -\frac{a_{33}}{6} \end{bmatrix}$

17. Calcule $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$

18. Calcule $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

En los problemas 19 y 20 use los teoremas 3 y 4, respectivamente, para encontrar A^{-1} para la matriz dada.

19. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ 20. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

En los problemas 21 y 22 use operaciones elementales entre filas para hallar A^{-1} para la matriz dada.

21. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{4}{3} & 2 \end{bmatrix}$ 22. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

En los problemas 23 y 24, usando operaciones elementales entre filas, resuelva la matriz aumentada del sistema dado.

23. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$

En los problemas 25 y 26 use la matriz inversa para resolver el sistema dado.

25. $\begin{cases} 4x - 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \\ -x + 3y + z = 2 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

En los problemas 27 y 28 use la regla de Cramer para resolver el sistema dado.

27. $\begin{cases} 0.4x + 0.6y = 6 \\ x - 0.5y = 3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ 4x - y + 2z = 1 \\ -2x - y + 3z = 0 \end{cases}$

29. Sea $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & x \end{bmatrix}$ y $S = \{x \in \Re / A \text{ es singular}\}$.

Determine S y A^{-1} en función de x, cuando $x \notin S$.

30. Pruebe que la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ es singular.

31. Si $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, determine A.

32. Demuestre que $A = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & \operatorname{sen} x \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & \operatorname{sen} x \end{bmatrix}$

33. Una mezcla de 200 litros está compuesta por las sustancias A, B y C. Si la suma de las cantidades de litros que tiene la mezcla de las sustancias A y B es el triple de la cantidad de litros que tiene de C, y la sustancia B conforma el 35% de la mezcla, ¿cuántos litros tiene la mezcla de cada sustancia?

34. Pruebe que la propiedad (*) $(AB)^2 = A^2B^2$ no se cumple en el espacio de matrices de orden 2. ¿Cuál propiedad no tiene el producto de matrices, que de tenerse (*) se cumpliría?

35. Pruebe que $A^2 = A^{-1}$

Si $A = \dfrac{1}{x}\begin{bmatrix} -x & x \\ -x & 0 \end{bmatrix}$ y $x \neq 0$

36. Suponga que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es no singular.

Pruebe que $B = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es no singular

y que $|B^{-1}| = |A^{-1}| = 1/|A|$

37. Encuentre α, β, θ y γ si $\theta - \gamma + \alpha - \beta = 110°$ y los ángulos α, β, θ y γ son los que se muestran en la figura 2.

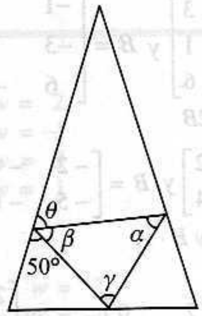


FIGURA 2

38. Suponga que X y B son matrices $n \times 1$ y que A es una matriz cuadrada de orden n. En economía, el modelo abierto de Leontief se caracteriza por un sistema de ecuaciones de la forma $X = AX + B$, donde A se llama matriz de entrada-salida. Demuestre que si $I - A$ es no singular, entonces el sistema tiene la solución $X = (I - A)^{-1} B$.

10

Temas de geometría analítica

Hipatia

Hipatia es la primera mujer en la historia de las matemáticas acerca de la cual tenemos un conocimiento considerable. Nacida en el 370 en Alejandría, era renombrada como matemática, filósofa y profeta. Su vida y su prematura muerte a manos de un populacho de fanáticos son tratadas románticamente en una novela de Charles Kingsley, de 1853 (*Hypatia, or New Foes with Old Faces*. Chicago: W. B. Conkley, 1853). Entre sus escritos está *On the Conics of Apollonius*, el cual popularizó el trabajo de Apolonio sobre las curvas que pueden obtenerse al intersecar un cono con un plano: la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. Con la terminación del periodo griego decayó el interés sobre las secciones cónicas y, después de Hipatia, el estudio de estas curvas se descuidó por cerca de 1,000 años. En el siglo XVII Galileo demostró, que, en ausencia de la resistencia del aire, la senda de un proyectil sigue un arco parabólico. Por el mismo tiempo, Kepler elaboró la hipótesis de que las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elipses, con el Sol en uno de los focos. Esto fue verificado más tarde por Newton, usando los métodos del cálculo recién descubiertos. Kepler también experimentó con las propiedades de reflexión de los espejos parabólicos; estas investigaciones apresuraron el desarrollo de los telescopios de reflexión. Los griegos habían conocido poco de estas aplicaciones prácticas. Estudiaron las cónicas por su belleza y propiedades fascinantes. En las primeras tres secciones de este capítulo, examinaremos tanto las propiedades antiguas como las aplicaciones modernas de estas curvas.

10.1 La parábola

SECCIONES CONICAS

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, las **secciones cónicas** son curvas que pueden obtenerse de la intersección de un plano con un cono circular recto. La intersección del cono con un plano perpendicular a su eje produce una **circunferencia**. Si el plano se inclina ligeramente, la curva resultante es una **elipse**. Cuando el plano es paralelo a una recta sobre el cono, la curva de la intersección es una **parábola**. Finalmente, si el plano interseca ambas mitades, o **ramas** del cono, la curva es una **hipérbola**. Estas 4 secciones cónicas básicas se ilustran en la figura 1.

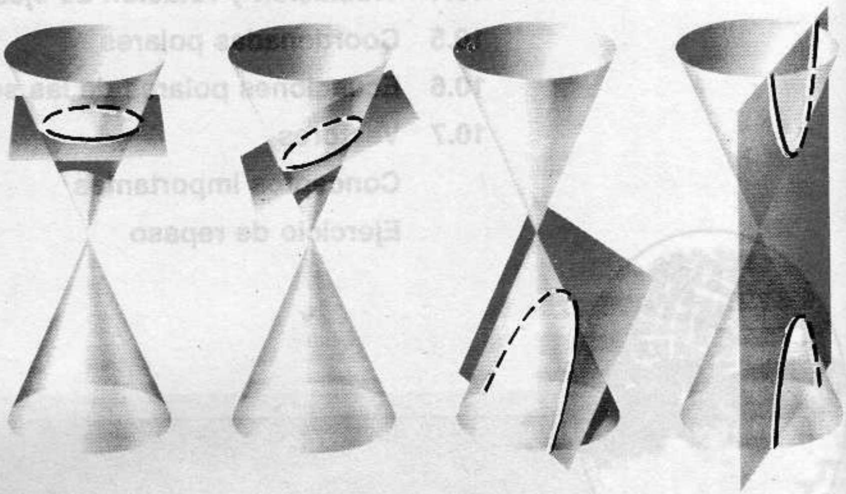
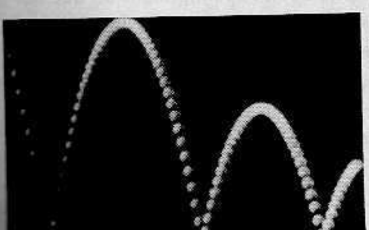


FIGURA 1 (a) Círculo (b) Elipse (c) Parábola (d) Hipérbola

En la sección 4.1 dijimos que la gráfica de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ se denomina parábola. Este hecho puede verificarse usando la siguiente definición geométrica de la parábola (véase problema 61).

DEFINICION 1

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos del plano que son equidistantes a un punto fijo F, llamado **foco** y una recta fija, llamada **directriz.**



EJE Y VERTICE

La figura 2 muestra una parábola. La recta que pasa por el foco, perpendicular a la directriz, se llama **eje**. El punto de intersección de la parábola y el eje se llama **vértice**, denotado por V en la figura 2.

ECUACION DE UNA PARABOLA

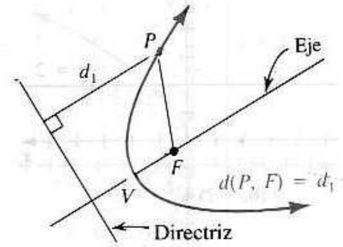


FIGURA 2

Ahora deducimos una ecuación de una parábola con foco $F(0, p)$ y la directriz $y = -p$, donde $p > 0$. Entonces, vemos que el eje de la parábola está a lo largo del eje y, como lo muestra la figura 3. El origen es necesariamente el vértice, puesto que está situado en el eje a p unidades tanto del foco como de la directriz. Si $P(x, y)$ es un punto sobre la parábola, entonces la distancia de P a la directriz es

$$d_1 = y - (-p) = y + p$$

Usando la fórmula de distancia, encontramos la distancia de P al foco:

$$d(P, F) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2}$$

De la definición 1, se deduce que

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = y + p$$

Elevando al cuadrado ambos lados y simplificando, obtenemos

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 = 4py \qquad (1)$$

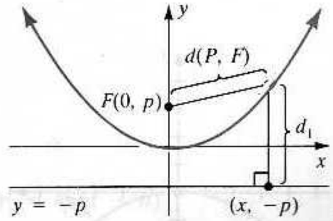


FIGURA 3

La ecuación (1) se refiere a la ecuación en forma estándar de una parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$ para $p > 0$.

EJEMPLO 1

En la sección 3.1 hicimos la gráfica de la curva $y = x^2$. Puesto que ésta tiene la forma de la ecuación (1) con $p = \frac{1}{4}$, vemos ahora que es una parábola con vértice en el origen, foco $(0, \frac{1}{4})$, y directriz $y = -\frac{1}{4}$. La gráfica se muestra de nuevo en la figura 4.

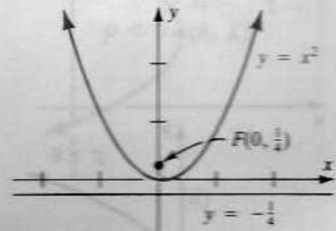


FIGURA 4

EJEMPLO 2

Para la parábola con foco $(0, 3)$ y directriz $y = -3$, tenemos que $p = 3$. Así, de (1) encontramos que la ecuación de esta parábola es

$$x^2 = 4(3)y$$

o

$$x^2 = 12y$$

La gráfica se muestra en la figura 5.

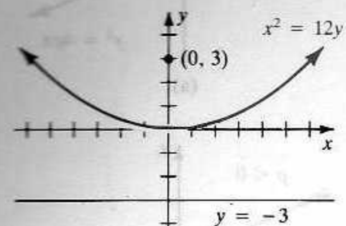
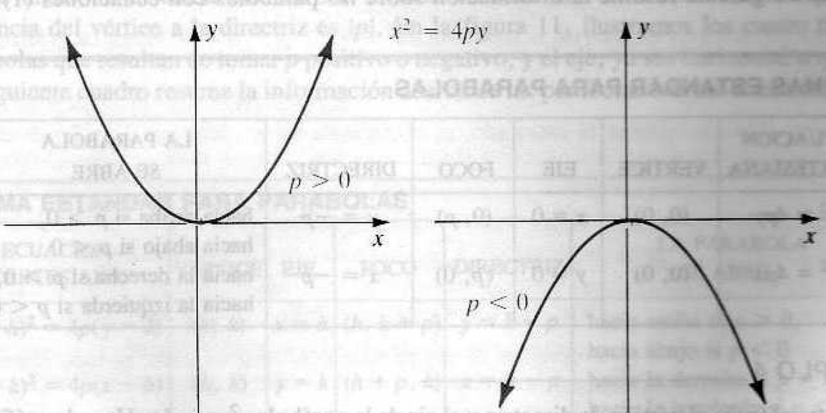


FIGURA 5



(a) (b) FIGURA 6

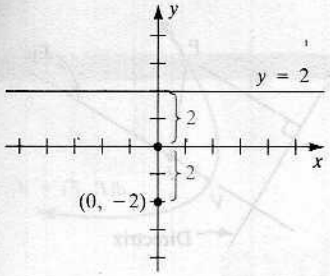


FIGURA 7

La ecuación (1) no depende de la suposición de que $p > 0$ (véase problema 53). Sin embargo, la dirección en la cual se abre la parábola depende del signo de p. Específicamente, si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba y si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo. Esto se ilustra en la figura 6.

EJEMPLO 3

Encuentre la ecuación en forma estándar de la parábola con directriz $y = 2$ y foco $(0, -2)$. Grafique la parábola.

Solución. En la figura 7 hemos trazado la gráfica de la directriz y el foco. Vemos de su colocación que la forma de la ecuación es

$$x^2 = 4py$$

Puesto que $p = -2$, la parábola se abre hacia abajo y la ecuación debe ser

$$x^2 = 4(-2)y, \quad \text{o} \quad x^2 = -8y$$

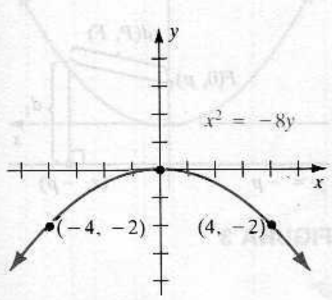


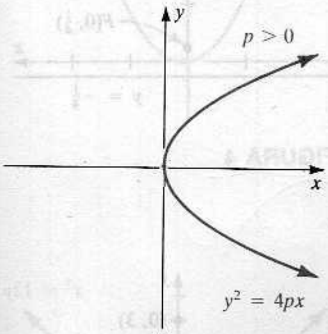
FIGURA 8

Para hacer la gráfica de la parábola, primero marcamos el vértice en (0, 0) y luego colocamos otro par de puntos sobre la parábola. Si $y = -2$, entonces

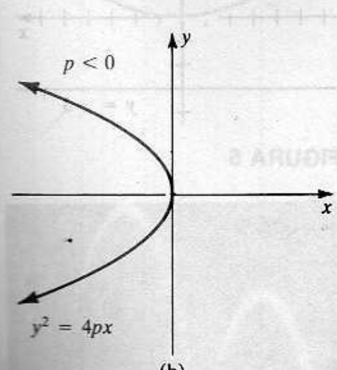
$$x^2 = -8(-2) = 16, \quad \text{o} \quad x = \pm 4$$

Así los puntos $(4, -2)$ y $(-4, -2)$ están situados sobre la parábola (véase figura 8).

En general, para la ecuación $x^2 = 4py$, la elección de $y = p$ da $x = \pm 2p$ y así los puntos $(\pm 2p, p)$ están situados en la parábola (véase problema 56). También note que la gráfica de la parábola $x^2 = 4py$ es simétrica con respecto a su eje, el eje y, puesto que sustituyendo $-x$ por x resulta una ecuación equivalente.



(a)



(b)

FIGURA 9

Si el foco de una parábola está situado en el eje x en $F(p, 0)$ y la directriz es $x = -p$, entonces el eje x es el eje de la parábola y el vértice está en (0, 0). Como se muestra en la figura 9, si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; y si $p < 0$, se abre hacia la izquierda. En estos casos, la forma estándar de la ecuación es

$$y^2 = 4px \tag{2}$$

(véase problema 54). La gráfica de esta parábola es simétrica con respecto al eje x.

El cuadro siguiente resume la información sobre las parábolas con ecuaciones (1) y (2).

FORMAS ESTANDAR PARA PARABOLAS

ECUACION CARTESIANA	VERTICE	EJE	FOCO	DIRECTRIZ	LA PARABOLA SE ABRE
$x^2 = 4py$	(0, 0)	$x = 0$	$(0, p)$	$y = -p$	hacia arriba si $p > 0$, hacia abajo si $p < 0$
$y^2 = 4px$	(0, 0)	$y = 0$	$(p, 0)$	$x = -p$	hacia la derecha si $p > 0$, hacia la izquierda si $p < 0$

EJEMPLO 4

Encuentre el foco, el vértice, la directriz y el eje de la parábola $y^2 = -6x$. Haga la gráfica de la parábola e indique el foco y la directriz.

Solución. La ecuación tiene la forma $y^2 = 4px$. Así el vértice esté en el origen, el eje es x, y

$$4p = -6, \quad \text{o} \quad p = -\tfrac{3}{2}$$

Puesto que $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda, el foco es $(-\frac{3}{2}, 0)$, y la directriz es $x = \frac{3}{2}$.

Para hacer la gráfica de la parábola, supongamos que $x = -\frac{3}{2}$. Entonces,

$$y^2 = -6(-\tfrac{3}{2}) = 9, \quad \text{o} \quad y = \pm 3$$

Así los puntos $(-\frac{3}{2}, \pm 3)$ están colocados sobre la parábola, lo cual se muestra en la figura 10.

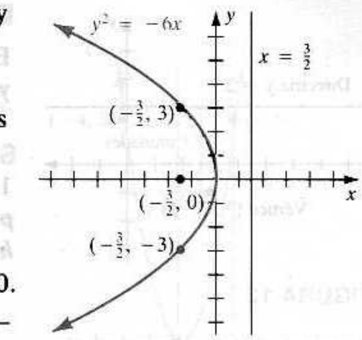


FIGURA 10

PARABOLA CON VERTICE EN (h, k)

Suponga que la parábola se traslada tanto horizontal como verticalmente, de modo que su vértice está en el punto (h, k) y su eje es la recta vertical $x = h$. La forma estándar de la ecuación de esta parábola es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \tag{3}$$

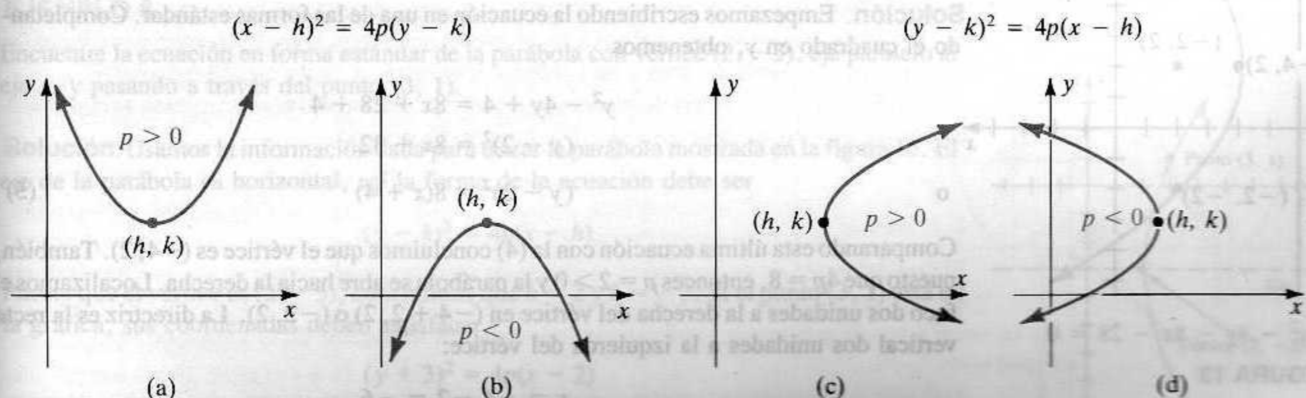


FIGURA 11

(Para un análisis adicional véase sección 10.4). De igual manera, la ecuación estándar de una parábola con vértice (h, k) y eje en la recta horizontal $y = k$ es

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \tag{4}$$

Como antes, la distancia del vértice al foco en cada uno de estos casos es $|p|$, y la distancia del vértice a la directriz es $|p|$. En la figura 11, ilustramos los cuatro tipos de parábolas que resultan de tomar p positivo o negativo, y el eje, ya sea horizontal o vertical. El siguiente cuadro resume la información acerca de las parábolas con las ecuaciones (3) y (4).

FORMA ESTANDAR PARA PARABOLAS

ECUACION CARTESIANA	VERTICE	EJE	FOCO	DIRECTRIZ	LA PARABOLA SE ABRE
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	(h, k)	$x = h$	$(h, k + p)$	$y = k - p$	hacia arriba si $p > 0$, hacia abajo si $p < 0$
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$	(h, k)	$y = k$	$(h + p, k)$	$x = h - p$	hacia la derecha si $p > 0$, hacia la izquierda si $p < 0$

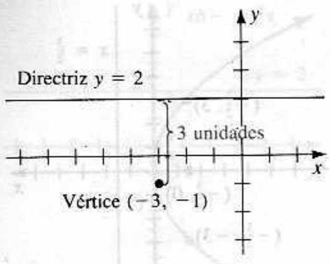


FIGURA 12

EJEMPLO 5

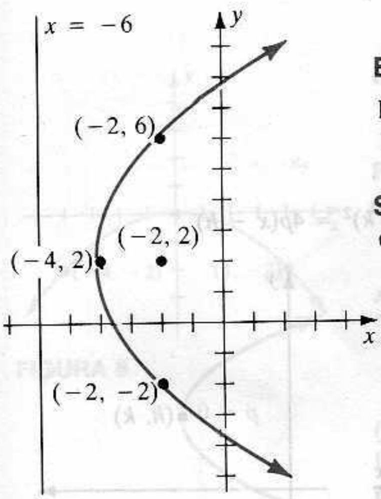
Encuentre la ecuación en forma estándar de la parábola con vértice $(-3, -1)$ y directriz $y = 2$.

Solución. Empezamos localizando el vértice en $(-3, -1)$ y la directriz $y = 2$ (véase figura 12). Puesto que el vértice está colocado 3 unidades por debajo de la directriz, se deduce que $p = -3$ y la forma estándar de la ecuación debe ser $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. Sustituyendo $h = -3$, $k = -1$, y $p = -3$ obtenemos

$$[x - (-3)]^2 = 4(-3)[y - (-1)]$$

o

$$(x + 3)^2 = -12(y + 1)$$



$y^2 - 4y - 8x - 28 = 0$

FIGURA 13

EJEMPLO 6

Encuentre el vértice, el foco, el eje y la directriz de la parábola $y^2 - 4y - 8x - 28 = 0$. Haga la gráfica de la parábola.

Solución. Empezamos escribiendo la ecuación en una de las formas estándar. Completando el cuadrado en y, obtenemos

$$y^2 - 4y + 4 = 8x + 28 + 4$$

$$(y - 2)^2 = 8x + 32$$

o

$$(y - 2)^2 = 8(x + 4) \qquad (5)$$

Comparando esta última ecuación con la (4) concluimos que el vértice es $(-4, 2)$. También, puesto que $4p = 8$, entonces $p = 2 > 0$ y la parábola se abre hacia la derecha. Localizamos el foco dos unidades a la derecha del vértice en $(-4 + 2, 2)$ o $(-2, 2)$. La directriz es la recta vertical dos unidades a la izquierda del vértice:

$$x = -4 - 2 = -6$$

El eje (la recta horizontal a través del vértice) es $y = 2$. Usando $x = -2$ en la ecuación (5), encontramos que $y = 6$ y $y = -2$. Así los puntos $(-2, -2)$ y $(-2, 6)$ están en la gráfica de la parábola (véase figura 13).

EJEMPLO 7

Encuentre el vértice y el foco de la parábola $2x^2 + 8x - y + 8 = 0$ Haga la gráfica de la parábola.

Solución. Para completar el cuadrado, el coeficiente de x^2 debe ser 1, así volvemos a escribir la ecuación como

$$2(x^2 + 4x \qquad) = y - 8$$

Entonces, completando el cuadrado tenemos

$$2(x^2 + 4x + 4) = y - 8 + 8 \qquad (6)$$

Note que sumamos 8 al lado derecho de (6) porque $2(4) = 8$ se sumó al lado izquierdo. Simplificando (6), encontramos

$$2(x + 2)^2 = y$$

Para obtener una de las formas estándar de una parábola, dividimos ambos lados de la última ecuación por 2 y obtenemos

$$(x + 2)^2 = \tfrac{1}{2}y \qquad (7)$$

Así, $4p = \tfrac{1}{2}$, o $p = \tfrac{1}{8}$

Concluimos que la parábola se abrirá hacia arriba con vértice $(-2, 0)$ y foco $(-2, 0 + \tfrac{1}{8})$ o $(-2, \tfrac{1}{8})$. Si $x = 0$ en (7), entonces

$$(0 + 2)^2 = \tfrac{1}{2}y, \quad \text{o} \quad y = 8$$

Así el punto (0, 8) está en la parábola. Usando el hecho de que la parábola es simétrica con respecto a su eje, podemos localizar otro punto de la parábola. Puesto que el eje de esta parábola es $x = -2$ y (0, 8) está en la parábola sabemos, por simetría, que $(-4, 8)$ está también en la parábola. Esta información es suficiente para trazar la gráfica, como se muestra en la figura 14.

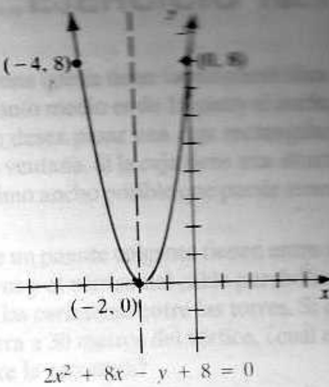


FIGURA 14

EJEMPLO 8

Encuentre la ecuación en forma estándar de la parábola con vértice $(2, -3)$, eje paralelo al eje x, y pasando a través del punto $(3, 1)$.

Solución. Usamos la información dada para trazar la parábola mostrada en la figura 15. El eje de la parábola es horizontal, así la forma de la ecuación debe ser

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Puesto que el vértice es $(2, -3)$, concluimos que $h = 2$ y $k = -3$. Si el punto (3, 1) está en la gráfica, sus coordenadas deben satisfacer

$$(y + 3)^2 = 4p(x - 2)$$

Así podemos resolver

$$(1 + 3)^2 = 4p(3 - 2)$$

para p y obtenemos

$$16 = 4p, \quad \text{o} \quad p = 4$$

Por consiguiente, la ecuación de la parábola es

$$(y + 3)^2 = 16(x - 2)$$

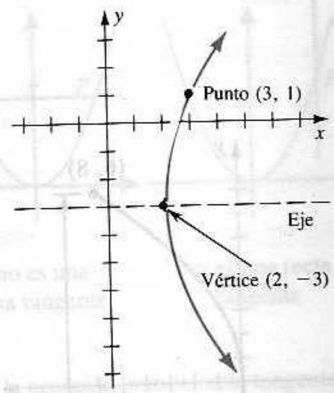


FIGURA 15

APLICACIONES DE LA PARABOLA

La parábola tiene muchas propiedades interesantes que la hacen apropiada para ciertas aplicaciones. El diseño de espejos para telescopios y ciertos sistemas de alumbrado se basan en una propiedad de reflexión importante de las parábolas. Como está ilustrado en la figura 16, un rayo de luz de un punto fuente localizado en el foco de una parábola será reflejado a lo largo de una recta paralela al eje. Así, la forma de la superficie reflejante en la mayoría de los reflectores, los faros delanteros del automóvil y las luces intermitentes se obtienen rotando una parábola alrededor de su eje. La fuente de luz se coloca en el foco. Entonces, teóricamente, el resultado de este diseño es un rayo de luz paralelo al eje. Véase figura 17(a). Por supuesto, en realidad, ocurrirá alguna dispersión de luz, puesto que no hay un punto de fuente de luz.

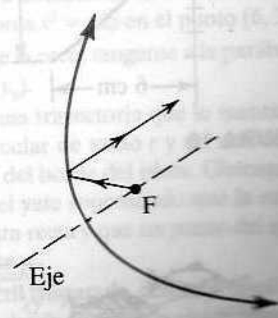


FIGURA 16

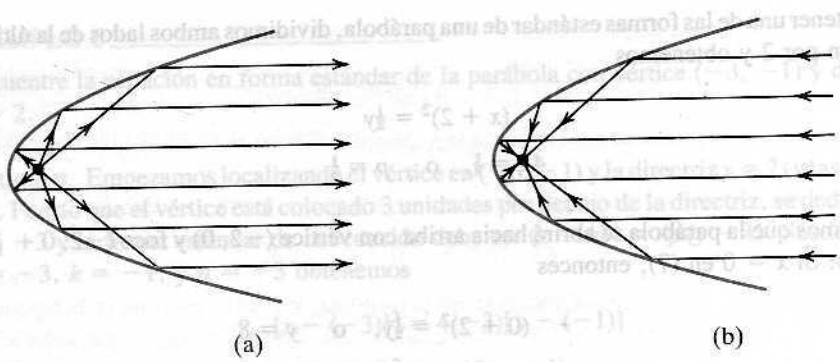


FIGURA 17

Por el contrario, si un rayo de luz que entra es paralelo al eje de una parabola, será reflejado a lo largo de una recta que pase a través del foco. Telescopios reflexivos, platos de satélite y antenas de radar utilizan esta propiedad colocando la lente del telescopio y el equipo receptor para la antena en el foco de un reflector parabólico. Véase figura 17(b).

Las parábolas son también importantes en el diseño de los puentes colgantes. Los cables principales de los puentes colgantes son generalmente de forma parabólica puesto que se puede demostrar que si el peso de uñ puente se distribuye uniformemente a lo largo de su longitud, un cable en forma de parábola sostendrá su carga equilibradamente.

Además, la trayectoria de un proyectil será una parábola si el movimiento se considera en un plano y no se tiene en cuenta la resistencia del aire.

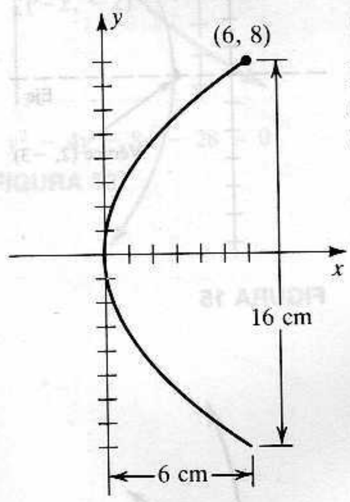


FIGURA 18

EJEMPLO 9

El faro delantero de un automóvil se diseña de manera que el corte transversal a través de su eje sea una parábola y la fuente de luz sea colocada en el foco. Si el faro delantero es de 16 cm a través y 6 cm de profundidad, encuentre la ubicación de la fuente de luz.

Solución. Si superponemos un sistema de coordenadas sobre la parábola, como se muestra en la figura 18, la parábola tendrá la ecuación $y^2 = 4px$ y pasará a través del punto (6, 8). Sustituyendo $x = 6$ y $y = 8$ en la ecuación, obtenemos

$$8^2 = 4p(6), \quad \text{o} \quad p = \tfrac{8}{3}$$

Así el foco está en $(\frac{8}{3}, 0)$ y la fuente de luz está localizada en el eje de la parábola $\frac{8}{3}$ cm a la derecha del vértice.

El siguiente ejemplo muestra que las aplicaciones de la propiedad de reflexión de las parábolas se encuentran en biología, como también en física.

EJEMPLO 10

El atún, cuyas presas son los peces más pequeños, se observa nadando en grupos de 10 ó 20, distribuidos en una forma aproximadamente parabólica. Una posible explicación para que esto ocurra es que el pez más pequeño del grupo trata de escapar de la parábola por reflexión. Como resultado, los peces pequeños se concentran en el foco y llegan a ser presa fácil*. Véase figura 19.

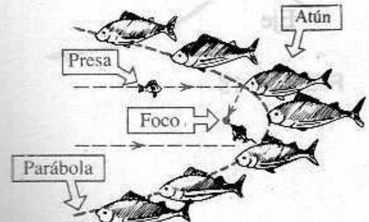


FIGURA 19

* Partridge, "The Structure and Function of Fish Schools," *Scientific American*, **246** (junio de 1982), 114-123.

EJERCICIO 10.1

En los problemas 1 al 24, para cada parábola encuentre el vértice, el foco, la directriz y el eje. Haga la gráfica de la parábola.

1. $y^2 = 16x$ **2.** $y^2 = -5/3x$
3. $y^2 = -9/4x$ **4.** $y^2 = 24x$
5. $x^2 = -4y$ **6.** $x^2 = -1/8y$
7. $x^2 = 36y$ **8.** $x^2 = 49y$
9. $(y+1)^2 = -4x$ **10.** $(y-2)^2 = 4x+2$
11. $(x-2)^2 = 4(y-1)$ **12.** $(x+1)^2 = -3y+1$
13. $y^2+4y-4x=12$ **14.** $y^2-16y+2x=0$
15. $x^2-8x+y=0$ **16.** $x^2+12x-4y=0$
17. $y^2-2y-x-5=0$ **18.** $y^2+6y+x-2=0$
19. $x^2+18x-2y+1=0$ **20.** $x^2-10x+3y-2=0$
21. $-3y^2-18y+6x=0$ **22.** $4y^2-24y-3x+2=0$
23. $2x^2+8x+2y+1=0$ **24.** $-3x^2+12x-4y+3=0$

En los problemas 25 al 44, encuentre la ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

25. Foco (3, 0), directriz $x = -3$ **26.** Foco (–2, 0), directriz $x = 2$
27. Foco (0, –1), directriz $y = 1$ **28.** Foco (0, ½), directriz $y = -1/2$
29. Foco (4/3, 0), vértice (0, 0) **30.** Foco (0, –5), vértice (0, 0)
31. Foco (3, 2), directriz $y = -2$ **32.** Foco (2, –1), directriz $x = 0$
33. Foco (–1, 3), directriz $x = 1$ **34.** Foco (0, –1), directriz $y = -3$
35. Foco (3, –2), vértice (1, –2) **36.** Foco (1, 6), vértice (1, 3)
37. Foco (–3, –1), vértice (–1, –1) **38.** Foco (0, 3), vértice (0, 1)
39. Vértice (0, 0), directriz $y = 3/2$
40. Vértice (0, 0), directriz $x = -2$
41. Vértice (1, –1), directriz $y = -3$
42. Vértice (2, 3), directriz $x = 3$
43. Vértice (0, 0), eje a lo largo del eje x, pasa por (–1, 4)
44. Vértice (0, 0), eje a lo largo del eje y, pasa por (2, 8)
45. Una antena para televisión por satélite consta de un plato parabólico con el receptor colocado en su foco. Éste puede describirse girando sobre su eje de simetría a la parábola $x^2 = 12y$ donde $-5 \le x \le 5$ se mide en pies. ¿Cuál es la profundidad del plato y cuál es la posición que ocupará el receptor respecto al vértice del plato?

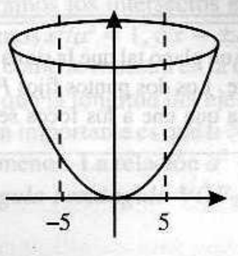


FIGURA 20

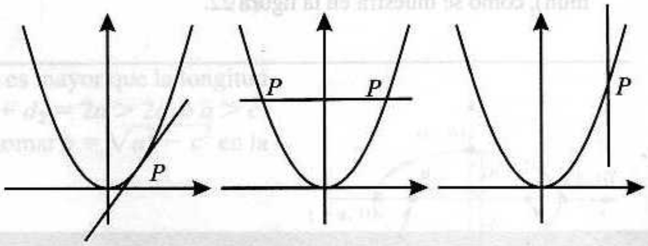
46. Un telescopio tiene un espejo reflejante parabólico con el ocular centrado en el foco del espejo. Si el espejo se describe girando respecto a su eje de simetría con la parábola $y^2 = 20x$ donde $-4 \le y \le 4$ y y está medido en pulgadas, ¿qué profundidad tiene el espejo, y dónde debe colocarse el ocular respecto a su vértice?

47. El arco de una ventana de una iglesia tiene forma parabólica. La altura del arco por el punto medio es de 16 pies y el ancho en la base es de 7 pies. Se desea pasar una caja rectangular deslizándose a través de la ventana. Si la caja tiene una altura de 12 pies, ¿cuál es el máximo ancho posible que puede tener la caja?

48. Suponga que dos torres de un puente colgante tienen entre sí una distancia de 200 metros y el vértice del cable parabólico es tangente a la mitad de las carreteras entre las torres. Si el cable está sobre la carretera a 30 metros del vértice, ¿cuál es la altura de las torres sobre la carretera?

49. Suponga que un rayo de luz que emana del foco de la parábola $x^2 + y = 4$ se encuentra con la parábola en (–1, 3), ¿cuál es la ecuación del rayo de luz?

50. Definamos una recta como tangente a una parábola en el punto P de su gráfica si interseca a la parábola sólo en ese punto P y no es paralela a su eje de simetría (véase figura 21).



recta tangente — no es una recta tangente — no es una recta tangente

FIGURA 21

Puede demostrarse que la ecuación para la recta tangente a la parábola $x^2 = 4py$ en el punto (x_0, y_0) está dada por

$$y = \frac{x_0}{2p}x - y_0$$

(a) Utilice esta fórmula para determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 = 12y$ en el punto (6, 3).

(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en el punto (x_0, y_0).

51. Suponga que un yate sigue una trayectoria que lo mantiene equidistante de un islote circular de radio r y de una costa recta que está a $2p$ unidades del borde del islote. Obtenga la ecuación de la trayectoria del yate suponiendo que la ecuación $x = -p$ representa la costa recta y que un punto del eje x representa el centro del islote.

52. La trayectoria de un proyectil disparado desde el nivel del suelo es una parábola abierta hacia abajo. Si la altura máxima alcanzada por el proyectil es de 80 metros y su alcance horizontal es de 640 metros, ¿a qué altura pasará el proyectil de un observador que está en el suelo a 200 metros del punto donde fue lanzado el proyectil y en su dirección?

53. Deduzca la ecuación (1) para $p < 0$.

54. Deduzca la ecuación (2).

55. Deduzca la ecuación de la parábola con vértice (h, k) y foco $(h + p, k)$.

56. Se llama lado recto o cuerda focal de una parábola el segmento de recta que pasa por el foco de la parábola, perpendicular a su eje y que tiene sus extremos en la parábola. La longitud del lado recto o cuerda focal se llama ancho focal.

(a) Encuentre el ancho focal de la parábola $y^2 = -8x$.

(b) Demuestre que el ancho focal de las parábolas $y^2 = 4px$ y $x^2 = 4py$ es $4|p|$.

(c) Determine los extremos de las cuerdas focales en cada una de las parábolas de (b).

57. Pruebe que el punto más cercano de una parábola a su foco es el vértice.

58. Suponga que un cometa tiene una órbita parabólica con el Sol como foco tal que cuando esté a 100,000 millas del Sol la recta que va del cometa al Sol es perpendicular al eje de la parábola. Escriba la ecuación de la trayectoria del cometa, si el vértice de la parábola se sitúa en (0, 0) y el foco y en el eje x.

59. ¿Cuál es la distancia más corta del Sol al cometa en el problema 58?

60. Suponga que dos superficies reflectoras de forma parabólica están en frente una de la otra (con sus focos en un eje común), como se muestra en la figura 22.

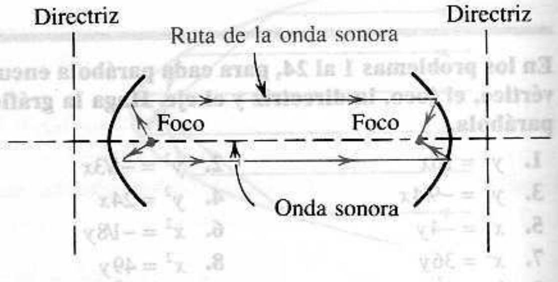


FIGURA 22

Cualquier sonido emitido por un foco será reflejado fuera de las parábolas y concentrado en el otro foco. La figura muestra las trayectorias de dos ondas de sonido típicas. Usando la definición 1, demuestre que todas las ondas recorrerán la misma distancia. [*Nota*: este resultado es importante por la siguiente razón: si las ondas de sonido recorrieran rutas de diferentes longitudes, llegarían al segundo foco a diferente tiempo. El resultado sería la interferencia, más que el sonido claro].

61. Encuentre el foco, la directriz, el vértice y el eje de la parábola $y = ax^2 + bx + c$.

10.2 La elipse

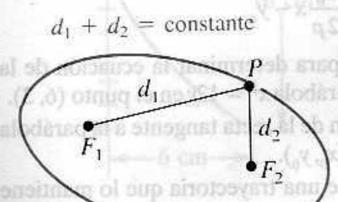


FIGURA 23

La elipse se encuentra frecuentemente en astronomía. Por ejemplo, las trayectorias de los planetas alrededor del Sol son elípticas (con el Sol en un foco) como lo son las órbitas de los satélites alrededor de la Tierra (con la Tierra en un foco). En esta sección definimos la elipse y estudiamos algunas de sus propiedades y aplicaciones.

DEFINICION 2

Elipse es el conjunto de todos los puntos P en un plano tal que la suma de las distancias entre P y dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Los dos puntos fijos F_1 y F_2 se llaman **focos**. El punto medio del segmento de recta que une a los focos se llama **centro.**

Se muestra una elipse en la figura 23.

ECUACION DE UNA ELIPSE

Ahora deducimos una ecuación de la elipse con focos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ sobre el eje x. El centro de esta elipse está en el origen O (véase figura 24). Por conveniencia, denotamos la suma constante de las distancias por $2a$, puesto que esta elección da una forma simple para la ecuación final.

Para cualquier punto $P(x, y)$ sobre la elipse, tenemos de la definición 2

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Usamos entonces la fórmula de distancia para obtener

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

o
$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados y simplificamos

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$
$$4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 4a^2 + (x - c)^2 + y^2 - (x + c)^2 - y^2$$
$$4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 - x^2 - 2cx - c^2$$
$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

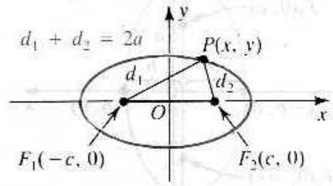


FIGURA 24

Elevando nuevamente al cuadrado obtenemos:

$$a^2[(x - c)^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

o
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Al dividir ambos lados por $a^2(a^2 - c^2)$, tenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \tag{8}$$

Puesto que la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado, vemos del triángulo F_1PF_2 de la figura 24 que $d_1 + d_2 = 2a > 2c$, o $a > c$. Puesto que a y c son ambos positivos, $a^2 - c^2 > 0$. Así podemos tomar $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ en la ecuación (1) para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{9}$$

Esta es la forma estándar de la ecuación de la elipse con focos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ y distancia fija $2a$.

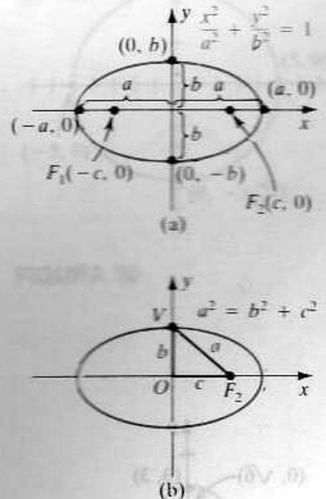


FIGURA 25

EJES MAYORES Y MENORES; VERTICES

El segmento de recta que pasa a través de los focos con extremos en la elipse se llama **eje mayor**. El segmento de recta con extremos sobre la elipse que es perpendicular al eje mayor en el centro se llama **eje menor**. Los extremos de los ejes se llaman **vértices**.

Para una elipse de forma $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, los ejes mayor y menor están en los ejes x y y, respectivamente. Por consiguiente, para determinar las coordenadas de los vértices, simplemente encontramos los intersectos en x y en y de la elipse. Siendo $y = 0$ para los intersectos en x, tenemos $x^2/a^2 = 1$, o $x = \pm a$. De igual forma, estableciendo $x = 0$ encontramos que $y = \pm b$. Así como se muestra en la figura 25(a), los vértices de la elipse son $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$. Es fácil ver que la longitud del eje mayor es $2a$ y la longitud del eje menor es $2b$.

Otra observación importante es que $a > b$, puesto que $a^2 = b^2 + c^2$. Así el eje mayor es más largo que el eje menor. La relación $a^2 = b^2 + c^2$ puede recordarse al notar que *a es la hipotenusa del triángulo rectángulo* VOF_2, que se muestra en la figura 25(b).

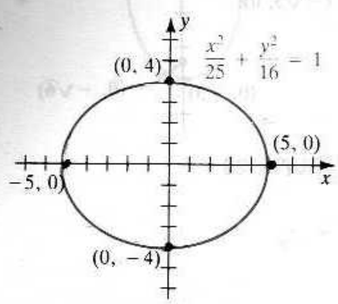


FIGURA 26

EJEMPLO 1

Para la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

puesto que $25 > 16$, identificamos $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$. Como la figura 26 lo muestra, los vértices son $(\pm 5, 0)$ y $(0, \pm 4)$.

Si la elipse está situada de manera que los focos están en el eje y en $F_1(0, -c)$ y $F_2(0, c)$, una deducción similar a (2) produce la forma estándar

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{10}$$

(véase problema 48). Aquí de nuevo, $a > c$, $a^2 = b^2 + c^2$ y $a > b$. Los vértices están situados en $(0, \pm a)$ y $(\pm b, 0)$ y el centro está en el origen. Como se muestra en la figura 27, para una elipse de este tipo el eje mayor es vertical y el eje menor es horizontal.

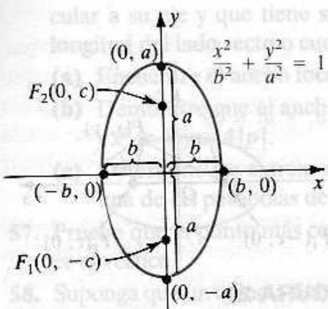


FIGURA 27

El cuadro siguiente resume los resultados obtenidos arriba.

FORMAS ESTANDAR PARA ELIPSES

ECUACION	CENTRO	FOCOS	EJE MAYOR	VERTICES EN EL EJE MAYOR	VERTICES EN EL EJE MENOR
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(0, 0)$	$(\pm c, 0)$	Horizontal está en el eje x	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm b)$
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$(0, 0)$	$(0, \pm c)$	Vertical está en el eje y	$(0, \pm a)$	$(\pm b, 0)$
Relaciones importantes: $a > b$, $a^2 = b^2 + c^2$					

EJEMPLO 2

Encuentre los vértices y los focos para la elipse $9x^2 + 3y^2 = 27$. Haga la gráfica de la elipse.

Solución. Dividiendo por 27, encontramos que

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$$

o

$$\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Puesto que $3 > \sqrt{3}$, tenemos $a = 3$ y $b = \sqrt{3}$. El denominador del término y^2 es entonces a^2 y el eje mayor es vertical. Así los vértices son $(0, \pm 3)$ y $(\pm\sqrt{3}, 0)$. Puesto que

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 3 = 6$$

tenemos $c = \sqrt{6}$. Los focos están en el eje y en $(0, \pm\sqrt{6})$. La elipse se muestra en la figura 28.

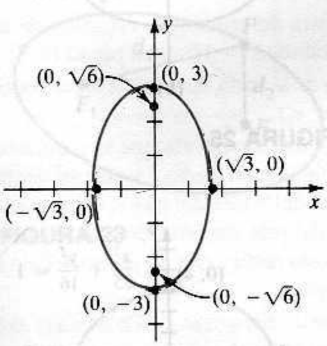


FIGURA 28

A pesar de que los focos están indicados, se debe tener en cuenta que *no* están en la gráfica de la elipse (así como el foco de una parábola no está en la gráfica de la parábola).

Nota de advertencia: la relación $a > b$ es la clave para identificar cuál de las dos formas estándar se aplica a la elipse dada. Para $x^2/16 + y^2/4 = 1$, puesto que $16 > 4$, identificamos $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$. Entonces concluimos que el eje mayor es horizontal. Para $x^2/4 + y^2/16 = 1$ puesto que $16 > 4$, de nuevo identificamos $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$; para esta elipse, sin embargo, el eje mayor es vertical.

EJEMPLO 3

Encuentre la ecuación de una elipse con vértices $(\pm 5, 0)$ y focos $(\pm 2, 0)$. Trace la gráfica de la elipse.

Solución. En la figura 29 hemos marcado los vértices y los focos. Vemos que $a = 5$ y $c = 2$. Puesto que $b^2 = a^2 - c^2$, tenemos

$$b^2 = 25 - 4 = 21$$

y así $b = \sqrt{21}$. Puesto que los focos están en el eje x y el centro está en el origen, la ecuación de la elipse tiene la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Sustituyendo los valores de a y b tenemos

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$$

La gráfica se muestra en la figura 30.

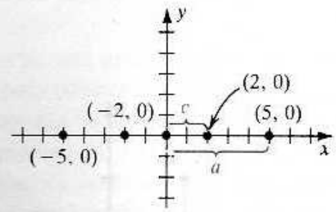


FIGURA 29

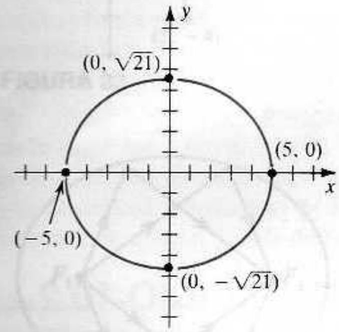


FIGURA 30

EJEMPLO 4

Encuentre una ecuación de la elipse con focos $(0, \pm\sqrt{3})$ tal que la longitud del eje mayor sea 12.

Solución. Porque los focos están en el eje y, la ecuación de la elipse debe ser de la forma

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Puesto que la longitud del eje mayor es $2a = 12$, tenemos $a = 6$. Ahora, de $c = \sqrt{3}$, se deduce que

$$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 3 = 33$$

Así la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{33} + \frac{y^2}{36} = 1$$

ELIPSE CON CENTRO EN (h, k)

Suponga que el centro de una elipse está en el punto (h, k) y los focos están situados en $(h - c, k)$ y $(h + c, k)$. La forma estándar de la ecuación de esta elipse es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(11)}$$

Para esta elipse, el eje mayor es horizontal y el eje menor es vertical.

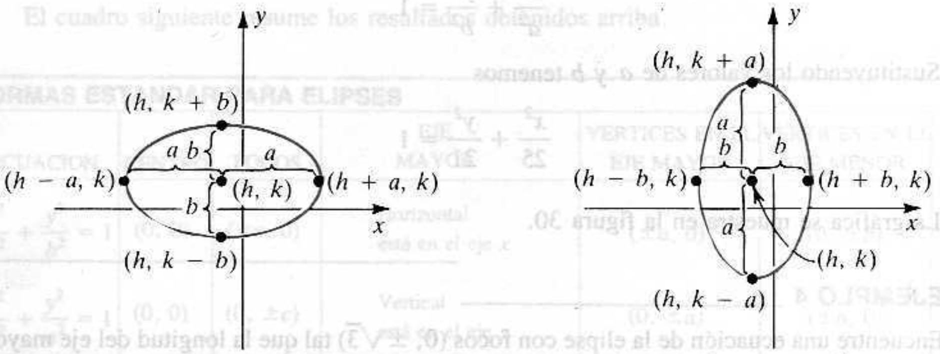
De igual forma, la ecuación de la elipse con centro (h, k) y focos situados en $(h, k - c)$ y $(h, k + c)$ es

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad \textbf{(12)}$$

En esta elipse, el eje mayor es vertical y el eje menor es horizontal. Como antes, $a > c$ y $b^2 = a^2 - c^2$ así que $a > b$.

Los vértices se pueden obtener estableciendo que $x = h$ y $y = k$ en (11) y (12) y despejando x y y, respectivamente. Están marcados en la figura 31. Nótese también que la longitud del eje mayor es $2a$ y la longitud del eje menor es $2b$.

No es buena idea memorizar fórmulas para las coordenadas de los vértices y de los focos de elipses con centro en (h, k). Es mejor trabajar con los valores a, b, y c. Por esta razón no se da un cuadro de resumen para las elipses con centro en (h, k). Como vemos en la figura 31, a es la distancia del centro (h, k) a los vértices en el eje mayor, y b es la distancia del centro a los vértices en el eje menor. Nótese también que c es la distancia del centro a los focos. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

FIGURA 31 (a) (b)

EJEMPLO 5

Encuentre los focos y los vértices de la elipse $4x^2 + 16y^2 - 8x - 96y + 84 = 0$. Haga la gráfica de la elipse.

Solución. Para escribir la ecuación en una de las formas estándar (11) o (12), debemos completar el cuadrado en x y en y. Primero factorizamos 4, tanto de x^2 como de x y factorizamos 16, tanto de y^2 como de y (recordemos que los términos cuadráticos x^2 y y^2 deben tener el coeficiente 1 para completar el cuadrado):

$$4(x^2 - 2x \quad\ ) + 16(y^2 - 6y \quad\ ) = -84$$
$$4(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 - 6y + 9) = -84 + 4(1) + 16(9)$$

Observe que hemos sumado 4(1) y 16(9) a ambos lados de la ecuación. Así obtenemos

$$4(x-1)^2 + 16(y-3)^2 = 64$$

Dividiendo por 64 tenemos

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1 \tag{13}$$

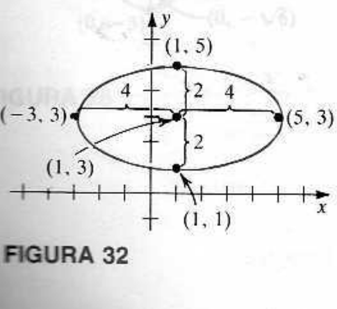


FIGURA 32

Vemos ahora que el centro de la elipse es $(1, 3)$. El eje mayor es horizontal y $a = 4$ y $b = 2$. En la figura 32, hemos situado los vértices en $(-3, 3)$, $(5, 3)$, $(1, 1)$, y $(1, 5)$. Esto se hizo al medir $a = 4$ unidades tanto a la derecha como a la izquierda del centro, y $b = 2$ unidades, tanto arriba como abajo del centro. (Como otra alternativa podríamos obtener los vértices estableciendo primero $x = 1$ en (13) y solucionando $(y-3)^2/4 = 1$, luego estableciendo $y = 3$ en (13) y resolviendo $(x-1)^2/16 = 1$). Para hallar los focos, observamos que

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$$

y así $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Así los focos son $(1 - 2\sqrt{3}, 3)$ y $(1 + 2\sqrt{3}, 3)$.

EJEMPLO 6

Encuentre una ecuación de la elipse con centro $(2, -1)$ de eje mayor vertical de longitud 6 y un eje menor de longitud 3.

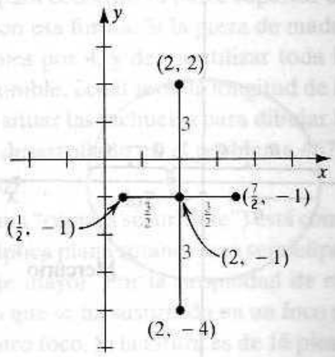


FIGURA 33

Solución. La longitud del eje mayor es $2a = 6$; por tanto, $a = 3$. Similarmente, la longitud del eje menor es $2b = 3$, así $b = \frac{3}{2}$. Al ubicar el centro y los ejes, vemos de la figura 33 que los vértices son $(2, 2)$, $(2, -4)$, $(\frac{1}{2}, -1)$, y $(\frac{7}{2}, -1)$. Puesto que el eje mayor es vertical, la ecuación es

$$\frac{(x-2)^2}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{[y-(-1)]^2}{(3)^2} = 1, \quad \text{o} \quad \frac{(x-2)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

APLICACIONES DE LA ELIPSE

Las elipses tienen una propiedad de reflexión análoga a la analizada en la sección 10.1 para la parábola. Se puede demostrar que cualquier rayo de luz que emana de un foco y se refleja en la elipse pasará a través del otro foco (véase figura 34). Este principio es válido para las ondas sonoras, como también para las ondas de luz, y es la base para el diseño de "una cámara susurrante" (véase problema 47). Algunas cámaras susurrantes son el salón estatuario del Capitolio de Washington, D.C., el tabernáculo mormón, en la ciudad de Salt Lake y la Catedral de San Pablo, en Londres.

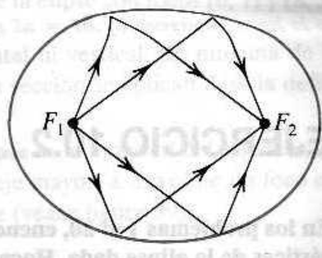


FIGURA 34

Como se mencionó al comienzo de esta sección, la elipse tiene aplicaciones en astronomía. La figura 35 muestra la órbita elíptica del cometa Halley con el Sol en un foco.

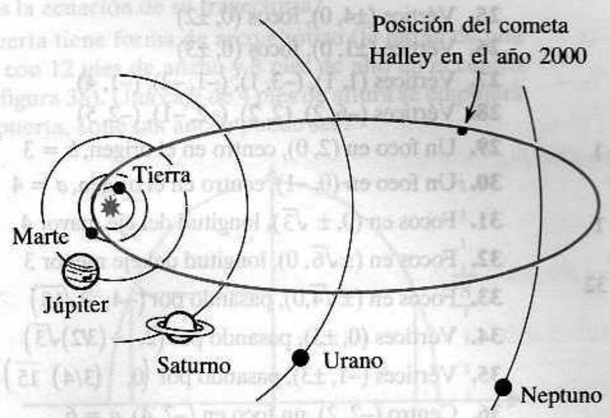


FIGURA 35

EJEMPLO 7

La órbita del planeta Mercurio es una elipse con el Sol en un foco. Esta elipse tiene un eje mayor de una longitud de 72 millones de millas y un eje menor de una longitud de 70.4 millones de millas. ¿Cuál es la distancia mínima (perihelio) entre Mercurio y el Sol?, ¿cuál es la máxima distancia (afelio)?

Solución. La figura 36 es un bosquejo de la órbita de Mercurio (escala ligeramente exagerada) con el sistema de coordenadas xy superpuesto, con origen en el centro y con eje x en el eje mayor de la elipse. Por consiguiente, la ecuación de la elipse debe ser

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

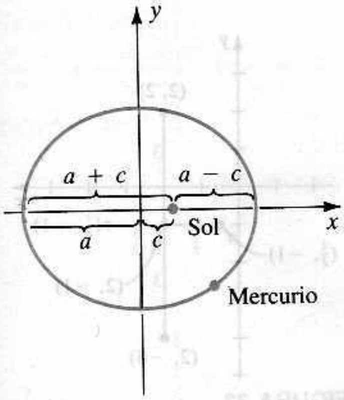


FIGURA 36

donde $2a = 72$ millones de millas y $2b = 70.4$ millones de millas. Puesto que la distancia mínima entre el Sol y Mercurio es $a - c$ y la distancia máxima es $a + c$, debemos encontrar c. Tenemos

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(36)^2 - (35.2)^2} \approx 7.5 \quad \text{millones de millas}$$

De $a = 36$ millones de millas, encontramos que la distancia máxima es

$$a + c \approx 36 + 7.5 = 43.5 \text{ millones de millas}$$

y la distancia mínima es

$$a - c \approx 36 - 7.5 = 28.5 \text{ millones de millas}$$

EJERCICIO 10.2

En los problemas 1 al 20, encuentre el centro, los focos y los vértices de la elipse dada. Haga la gráfica de la elipse.

1. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

2. $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

3. $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$

4. $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{24} = 1$

5. $25x^2 + 4y^2 = 400$

6. $3x^2 + 5y^2 = 30$

7. $16x^2 + 9y^2 = 144$

8. $12x^2 + y^2 = 48$

9. $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

10. $\dfrac{(x+2)^2}{36} + \dfrac{(y-4)^2}{49} = 1$

11. $\dfrac{(x+3)^2}{4} + (y+1)^2 = 1$

12. $\dfrac{(x-4)^2}{64} + \dfrac{(y+3)^2}{49} = 1$

13. $12(x-1)^2 + 3y^2 = 12$

14. $8(x+1)^2 + (y-5)^2 = 32$

15. $8(x+2)^2 + 18(y-3)^2 = 72$

16. $3(x-3)^2 + 12(y+2)^2 = 48$

17. $16x^2 - 32x + 36y^2 + 72y = 0$

18. $5x^2 + 9y^2 - 10x + 18y - 31 = 0$

19. $3x^2 + 18x + y^2 + 18 = 0$

20. $12y^2 + 4x^2 + 24y - 4x + 1 = 0$

En los problemas 21 al 39, encuentre una ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones dadas.

21. Vértice $(0, \pm 2)$, focos $(0, \pm 1)$

22. Vértice $(0, \pm 8)$, focos $(0, \pm 2)$

23. Vértice $(\pm 3, 0)$, focos $(\pm 2, 0)$

24. Vértice $(\pm 6, 0)$, focos $(\pm 4, 0)$

25. Vértice $(\pm 4, 0)$, focos $(0, \pm 2)$

26. Vértice $(\pm 1, 0)$, focos $(0, \pm 3)$

27. Vértices $(1, 1)$, $(-3, 1)$, $(-1, -2)$, $(-1, 4)$

28. Vértices $(-6, 2)$, $(2, 2)$, $(-2, -1)$, $(-2, 5)$

29. Un foco en $(2, 0)$, centro en el origen, $b = 3$

30. Un foco en $(0, -1)$, centro en el origen, $a = 4$

31. Focos en $(0, \pm \sqrt{3})$, longitud del eje mayor 4

32. Focos en $(\pm\sqrt{6}, 0)$, longitud del eje menor 3

33. Focos en $(\pm\sqrt{4}, 0)$, pasando por $\left(-4,\ 2\sqrt{15}\right)$

34. Vértices $(0, \pm 3)$, pasando por $\left(2,\ -(3/2)\sqrt{3}\right)$

35. Vértices $(-1, \pm 3)$, pasando por $\left(0,\ (3/4)\,\overline{15}\right)$

36. Centro $(-2, 2)$, un foco en $(-2, 4)$, $a = 6$

37. Centro en $(3, 1)$, un foco en $(0, 1)$, un vértice en $(-1, 1)$

38. Extremos del eje menor $(5, 0)$ y $(-1, 0)$, un foco en $(2, 6)$

39. Extremos del eje mayor en $(4, 2)$ y $(4, 13)$, un foco en $(4, 4)$

40. Se define la excentricidad e de una elipse por la razón $e = c/a$, (distancia entre los focos entre la longitud de eje mayor $\left.\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}\right)$

(a) Si el valor de "b" se hace acercar a "0", ¿a cuál valor se acerca "e"?

(b) Si el valor de "b" se hace acercar a "a", ¿a cuál valor se acerca "e"?

(c) ¿Qué relación hay entre la forma de la gráfica de la elipse en cada caso anterior?

41. La órbita que describe la Tierra alrededor del Sol tiene forma elíptica. Si la longitud del eje mayor es de 186 millones de millas y la excentricidad $e \approx 0.017$, estime la distancia más cercana de la Tierra al Sol.

42. Un engranaje elíptico rota alrededor de su centro y siempre se conserva engranado con una rueda circular dentada que está libre para moverse horizontalmente (véase figura 37). Si el origen de un sistema de coordenadas xy está colocado en el centro de la elipse, entonces la ecuación de la elipse en su posición presente es $6x^2 + 18y^2 = 36$. El diámetro de la rueda circular dentada iguala en longitud al eje menor del engranaje elíptico. Dado que las unidades son centímetros, ¿qué tan lejos se mueve horizontalmente el centro de la rueda circular dentada durante la rotación de un vértice del engranaje elíptico y el siguiente?

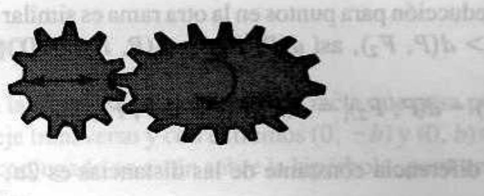


FIGURA 37

43. Un satélite se mueve en una órbita elíptica con el centro de la Tierra en un foco. Las distancias máxima y mínima a la superficie de la Tierra son 900 millas y 100 millas respectivamente. Si el radio de la Tierra es de 4,000 millas, ¿cuál es la ecuación de su trayectoria?

44. Una puerta tiene forma de arco elíptico (la mitad de una elipse) con 12 pies de ancho y 8 pies de alto en el centro (véase figura 38). Una caja de 4 pies de altura se empujará por la puerta, ¿qué tan ancha puede ser?

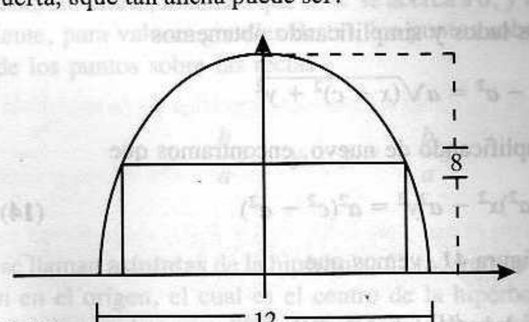


FIGURA 38

45. El arco de un puente es semielíptico con eje mayor horizontal. Si la base del arco abarca los 20 metros de ancho de la carretera y la parte más alta del puente está a 8 metros sobre la carretera, determine la altura del arco a 4 metros del centro de la carretera.

46. Desarrolle una técnica para dibujar elipses sobre una tabla de madera, usando 2 tachuelas, una cuerda y un lápiz. ¿Cuál es la longitud del eje mayor? ¿Cuál es la distancia entre los focos?

47. Un carpintero desea cortar una pieza de madera rectangular en forma elíptica para construir la parte superior de una mesa de comedor con esa forma. Si la pieza de madera rectangular mide 5 pies por 4, y desea utilizar toda la longitud y el ancho disponible, ¿cuál sería la longitud de la cuerda y dónde debería situar las tachuelas para dibujar la elipse según el método desarrollado en el problema 46?

48. Obtenga la ecuación (10).

49. Suponga que un salón (una "cámara susurrante") está construido sobre una base elíptica plana rotando una semielipse 180° alrededor de su eje mayor. Por la propiedad de reflexión de la elipse, algo que se ha susurrado en un foco se oirá nítidamente en el otro foco. Si la altura es de 18 pies y la longitud es de 42 pies, halle la ubicación del susurro y el puesto donde se escucha.

50. Encuentre la ecuación de la elipse con focos (0, 1) y (8, 5) y suma de distancias fija $2a = 16$. [*Sugerencia*: aquí el eje mayor no es ni horizontal ni vertical; así ninguna de las formas estándar de esta sección se aplican. Use la definición de la elipse].

51. El ancho focal de la elipse es la longitud del segmento de recta perpendicular al eje mayor, a través de un foco con extremos sobre la elipse (véase figura 39).

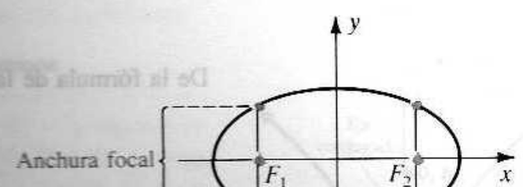


FIGURA 39

(a) Halle el ancho focal de la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(b) Demuestre que, en general, el ancho focal de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es $2b^2/a$.

10.3 La hipérbola

En esta seción definimos la hipérbola y estudiamos algunas de sus propiedades y aplicaciones.

DEFINICION 3

> **Hipérbola** es el conjunto de todos los puntos P en el plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias entre P y dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Los dos puntos fijos F_1 y F_2 se llaman **focos.** El punto medio del segmento de recta que une los focos se llama **centro.**

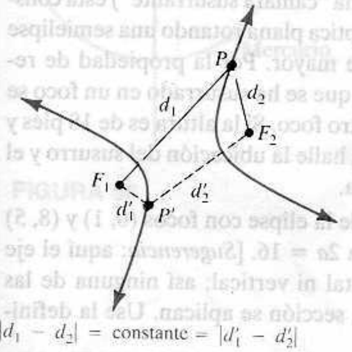


FIGURA 40

Se muestra una hipérbola en la figura 40. Observe que la gráfica tiene dos partes distintas llamadas **ramas.**

ECUACION DE UNA HIPERBOLA

Ahora deducimos una ecuación de una hipérbola con focos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ en el eje x, y centro en el origen O. Sea $P(x, y)$ un punto sobre la rama derecha de la gráfica, como se muestra en la figura 41. La deducción para puntos en la otra rama es similar (véase problema 50). Claramente, $d(P, F_1) > d(P, F_2)$, así $d(P, F_1) - d(P, F_2) > 0$, y así

$$d(P, F_1) - d(P, F_2)| = d(P, F_1) - d(P, F_2)$$

Si ahora suponemos que la diferencia constante de las distancias es $2a$, entonces, por la definición 3,

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$$

De la fórmula de la distancia tenemos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

o

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

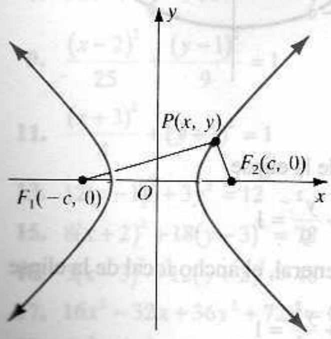


FIGURA 41

Elevando al cuadrado ambos lados y simplificando obtenemos

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando de nuevo, encontramos que

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \qquad \textbf{(14)}$$

Del triángulo F_1PF_2 en la figura 41, vemos que

$$d(P, F_2) + d(F_1, F_2) > d(P, F_1)$$

y así $\quad d(F_1, F_2) > d(P, F_1) - d(P, F_2)$

ó $2c > 2a$. Así, $c > a$ y $c^2 > a^2$ (puesto que $c > a > 0$), entonces $c^2 - a^2$ es positiva. Así podemos establecer que

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Por tanto, podemos escribir la ecuación (14) como

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

o
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{15}$$

La ecuación (15) es la forma estándar de la ecuación de la hipérbola centrada en el origen con focos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$.

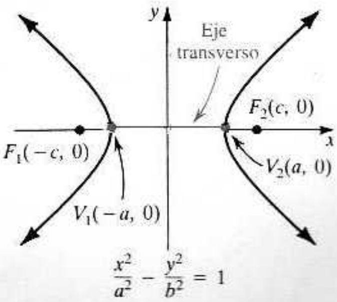


FIGURA 42

EJE TRANSVERSO Y VERTICES

El segmento de recta con extremos en la hipérbola y situada en la recta que pasa por los focos se llama **eje transverso;** sus extremos se llaman **vértices.** En la hipérbola descrita en (15), el eje transverso está situado en el eje x. Por consiguiente, para determinar las coordenadas de los vértices, simplemente encontramos los intersectos en x. Suponiendo que $y = 0$ da $x^2/a^2 = 1$, o $x = \pm a$. Así, como se muestra en la figura 42, los vértices de la hipérbola son $V_1\ (-a, 0)$ y $V_2(a, 0)$, y la longitud del eje transverso es $2a$.

EJE CONJUGADO

Como lo muestra la figura 43, el segmento de recta que pasa por el centro de la hipérbola, perpendicular al eje transverso y con extremos $(0, -b)$ y $(0, b)$ se llama **eje conjugado.** Los extremos del eje conjugado no están sobre la hipérbola, pero veremos que pueden ser útiles al dibujar la gráfica.

ASINTOTAS

Resolviendo la ecuación (15) y despejando y en términos de x, obtenemos

$$y = \pm\frac{bx}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

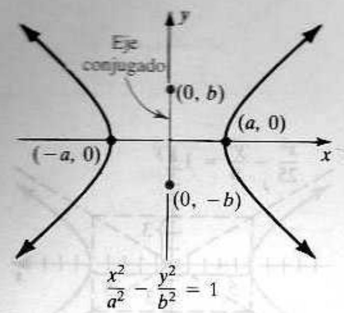


FIGURA 43

Como x aumenta sin límite, notamos que a^2/x^2 se acerca a 0, y así $\sqrt{1 - a^2/x^2}$ se acerca a 1. Por consiguiente, para valores grandes de $|x|$, los puntos sobre la gráfica de la hipérbola están cerca de los puntos sobre las rectas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Estas rectas se llaman **asíntotas** de la hipérbola. Como vemos en la figura 44, las asíntotas se intersecan en el origen, el cual es el centro de la hipérbola. Nótese también que las asíntotas son las diagonales extendidas del rectángulo de ancho $2a$ y altura $2b$ centrado en el

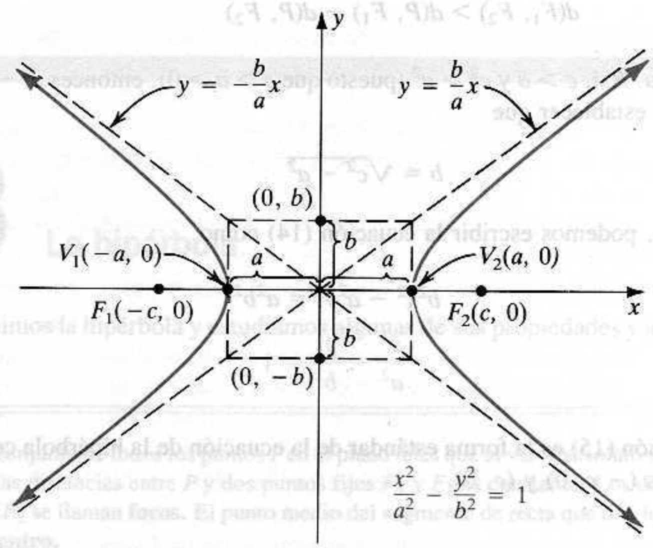


FIGURA 44

origen. Este rectángulo se conoce como **rectángulo auxiliar.** Nótese la ubicación de los extremos del eje conjugado en la parte superior y la base del rectángulo auxiliar.

Ahora, puesto que

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

es equivalente a

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}$$

las asíntotas de la hipérbola dada en la ecuación (15) se obtienen a partir de la ecuación (fácil de recordar)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \textbf{(16)}$$

EJEMPLO 1

Para la hipérbola

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$$

vemos que $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$, y así $a = 5$ y $b = 3$. Por consiguiente, los vértices están situados en $(-5, 0)$ y $(5, 0)$. Puesto que $c^2 = a^2 + b^2$, tenemos que $c^2 = 34$ y así los focos son $(-\sqrt{34}, 0)$ y $(\sqrt{34}, 0)$. De (16) encontramos las asíntotas, despejando y en

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 0$$

obtenemos $y = \pm 3x/5$. En la figura 45 se muestra la gráfica de la hipérbola junto con el rectángulo auxiliar y las asíntotas.

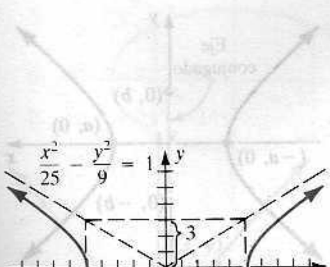


FIGURA 45

Cuando los focos están en el eje y en $F_1(0, -c)$ y $F_2(0, c)$, la forma estándar de la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(17)}$$

(véase problema 45). Aquí de nuevo, $c > a$ y

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Como se muestra en la figura 46, los vértices son $(0, \pm a)$ y el eje transverso está en el eje y. Los extremos del eje conjugado son $(\pm b, 0)$. En este caso, las ecuación de las asíntotas son

$$y = \pm\frac{a}{b}x$$

o lo que equivale a

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0 \tag{18}$$

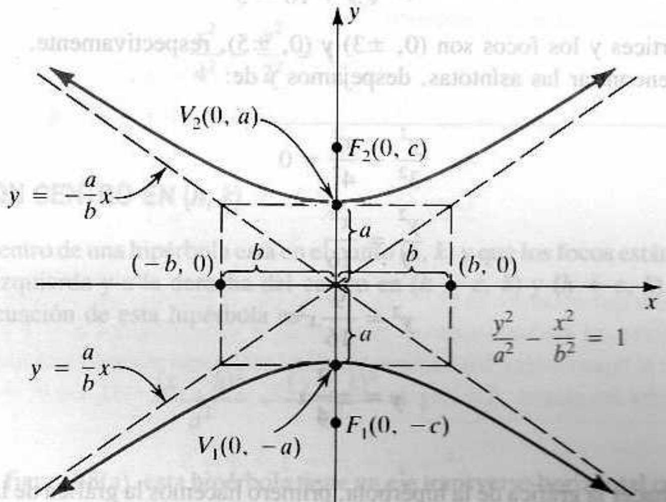


FIGURA 46

El cuadro siguiente resume los resultados obtenidos arriba para las hipérbolas.

FORMAS ESTANDAR PARA HIPERBOLAS

ECUACION	CENTRO	FOCOS	VERTICES	EJE TRANSVERSO	ASINTOTAS
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(0, 0)$	$(\pm c, 0)$	$(\pm a, 0)$	Horizontal, está en el eje x	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$(0, 0)$	$(0, \pm c)$	$(0, \pm a)$	Vertical, está en el eje y	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$
Relación importante $b^2 = c^2 - a^2$					

Nota de advertencia: para la hipérbola (a diferencia de la elipse), no hay relación entre los tamaños relativos de a y b; más bien, a^2 es siempre el denominador del término positivo y los vértices tienen $\pm a$ como coordenada.

EJEMPLO 2

Encuentre los vértices, los focos y las asíntotas de la hipérbola $16y^2 - 9x^2 = 144$. Haga la gráfica de la hipérbola.

Solución. Dividiendo la ecuación por 144, obtenemos

$$\frac{16y^2}{144} - \frac{9x^2}{144} = 1$$

o

$$\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$$

Puesto que el término y^2 tiene el coeficiente positivo, identificamos $a = 3$ y $b = 4$. De $b^2 = c^2 - a^2$, vemos que

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = 5 \end{aligned}$$

Así los vértices y los focos son $(0, \pm 3)$ y $(0, \pm 5)$, respectivamente.

Para encontrar las asíntotas, despejamos y de:

$$\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} = 0$$

$$\frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{16}$$

$$y^2 = \frac{9}{16}x^2$$

$$y = \pm\frac{3}{4}x$$

Para hacer la gráfica de la hipérbola, primero hacemos la gráfica de las asíntotas como sigue. Dibujamos un rectángulo de altura

$$2a = 2(3) = 6$$

y ancho

$$2b = 2(4) = 8$$

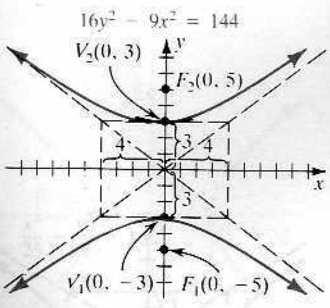


FIGURA 47

con centro en el origen. Las extensiones de las diagonales de este rectángulo son las asíntotas. Ahora dibujamos las ramas de la hipérbola empezando en los vértices $(0, 3)$ y $(0, -3)$ y trazando una línea hacia las asíntotas. La gráfica resultante se muestra en la figura 47.

EJEMPLO 3

Encuentre la ecuación de la hipérbola con vértices $(\pm 4, 0)$ y asíntotas $y = \pm\frac{1}{2}x$.

Solución. Puesto que los vértices están en el eje x vemos, a partir de la ecuación (16), que las asíntotas tienen la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

o, si despejamos y,

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

Así, en este caso, el fraccionario b/a es 1/2. (No necesariamente $b = 1$ y $a = 2$, sino solamente que la razón de b a a es 1/2). Del hecho de que los vértices sean $(\pm 4, 0)$, vemos que $a = 4$. Por consiguiente,

$$\frac{b}{4} = \frac{1}{2}$$

o $b = 2$, y la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

HIPERBOLA CON CENTRO EN (h, k)

Suponga que el centro de una hipérbola está en el punto (h, k) y que los focos están situados a c unidades a la izquierda y a la derecha del centro en $(h - c, k)$ y $(h + c, k)$. La forma estándar de la ecuación de esta hipérbola es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{19}$$

Como muestra la figura 48(a), esta hipérbola tiene un eje transverso horizontal con vértices a a unidades a la izquierda y a la derecha del centro en $(h - a, k)$ y $(h + a, k)$. Las asíntotas son las rectas que se obtienen si se despeja y de

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0 \tag{20}$$

La forma estándar de la ecuación de la hipérbola con centro (h, k) y focos a c unidades arriba y abajo del centro $(h, k - c)$ y $(h, k + c)$ es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \tag{21}$$

Como vemos en la figura 48(b), esta hipérbola tiene un eje transverso vertical y vértices a a unidades arriba y abajo del centro en $(h, k - a)$ y $(h, k + a)$. Las asíntotas se encuentran resolviendo

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0 \tag{22}$$

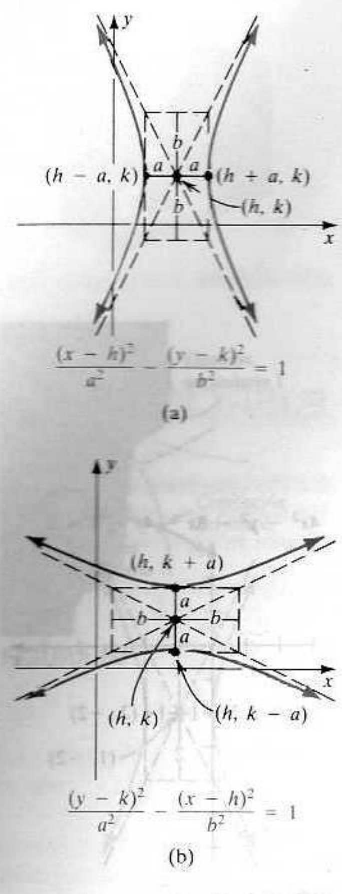


FIGURA 48

para y. Como antes, a^2 es el denominador del término con el coeficiente positivo, y también tenemos la relación

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Lo que establecimos para la elipse también se cumple para la hipérbola, es decir, no es buena idea memorizar fórmulas para las coordenadas de los vértices y los focos de una hipérbola con centro en (h, k). Como se ilustra en el ejemplo siguiente, se debe trabajar con los valores de a, b y c y el rectángulo auxiliar.

EJEMPLO 4

Encuentre el centro, los vértices, los focos y las asíntotas de la hipérbola $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$. Haga la gráfica de la hipérbola.

Solución. Antes de completar el cuadrado en x y y, factorizamos 4 de x^2 y el término x y factorizamos -1 de y^2 y el término y, de tal forma que el coeficiente principal de cada expresión sea 1. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 2x \qquad) - (y^2 + 4y \qquad) &= 4 \\ 4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) &= 4 + 4 - 4 \\ 4(x - 1)^2 - (y + 2)^2 &= 4 \\ \frac{(x - 1)^2}{1} - \frac{(y + 2)^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

Vemos ahora que el centro es $(1, -2)$. Puesto que el término que incluye a x tiene el coeficiente positivo, el eje transverso es horizontal, e identificamos $a = 1$ y $b = 2$. Como se muestra en la figura 48(a), los vértices pueden localizarse al medir una unidad a la izquierda y a la derecha del centro. Así los vértices son $(2, -2)$ y $(0, -2)$. De $b^2 = c^2 - a^2$, tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5$$

y así $c = \sqrt{5}$. Así los focos están ubicados a $\sqrt{5}$ unidades a la izquierda y a la derecha del centro $(1, -2)$ en $(1 - \sqrt{5}, -2)$ y $(1 + \sqrt{5}, -2)$.

Para encontrar las asíntotas despejamos y de:

$$\begin{aligned} \frac{(x - 1)^2}{1} - \frac{(y + 2)^2}{4} &= 0 \\ \frac{(y+2)^2}{4} &= (x - 1)^2 \\ \frac{y + 2}{2} &= \pm(x - 1) \\ y + 2 &= \pm(2x - 2) \\ y &= \pm(2x - 2) - 2 \end{aligned}$$

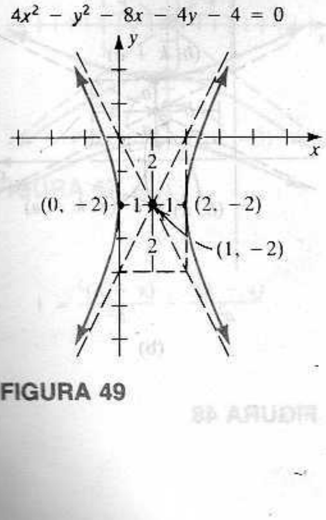


FIGURA 49

Así, $y = 2x - 4$ y $y = -2x$. La gráfica se dibuja colocando el centro $(1, -2)$ y usando los valores $a = 1$ y $b = 2$ para dibujar el rectángulo auxiliar que determina las asíntotas (véase figura 49).

EJEMPLO 5

Encuentre la ecuación de la hipérbola con centro $(2, -3)$, que pasa por el punto $(4, 1)$ y que tiene un vértice en $(2, 0)$.

Solución. Puesto que la distancia desde el centro hasta un vértice es a, tenemos $a = 3$. De la ubicación dada del centro y del vértice, se sigue que el eje transverso es vertical. Por consiguiente, de (21) sabemos que la ecuación es

$$\frac{(y+3)^2}{3^2} - \frac{(x-2)^2}{b^2} = 1 \tag{23}$$

donde b^2 todavía no está determinado. Puesto que el punto $(4, 1)$ está en la gráfica de la hipérbola, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (23). Por consiguiente,

$$\frac{(1+3)^2}{9} - \frac{(4-2)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{16}{9} - \frac{4}{b^2} = 1$$

$$\frac{7}{9} = \frac{4}{b^2}$$

y entonces

$$b^2 = \frac{36}{7}$$

Concluimos que la ecuación es

$$\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{\frac{36}{7}} = 1$$

APLICACIONES DE LA HIPERBOLA

La hipérbola tiene varias aplicaciones importantes que incluyen técnicas de sonido. En particular, varios sistemas de navegación utilizan hipérbolas así: dos radios transmisores fijos a una distancia conocida el uno del otro transmiten señales sincronizadas. La diferencia en los tiempos de recepción de una embarcación determina la diferencia $2a$ de las distancias desde la embarcación hasta los dos transmisores. Esta información ubica la embarcación en algún punto de la hipérbola con focos en los transmisores y diferencia fija entre las distancias de los focos igual a $2a$. Al usar dos conjuntos de señales obtenidas de una sola estación madre sincronizada con dos estaciones secundarias, el sistema LORAN de navegación de largo alcance ubica un barco o un avión en la intersección de dos hipérbolas (véase figura 50).

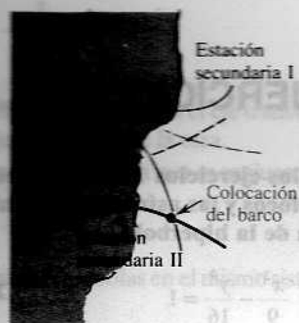


FIGURA 50

El siguiente ejemplo ilustra el uso de una hipérbola en otra situación que incluye técnicas de sonido.

EJEMPLO 6

El sonido de una explosión de dinamita se oye a diferentes horas en dos puntos A y B. De esto se deduce que la explosión ocurrió 1,000 m más cerca de A que de B. Si A y B están a 2,600 m de distancia el uno del otro, muestre que la ubicación de la explosión está en una rama particular de una hipérbola, y encuentre la ecuación de la rama.

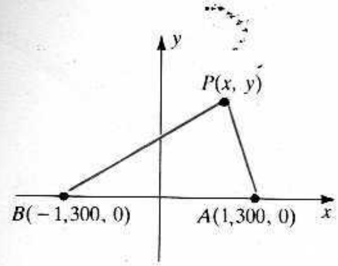


FIGURA 51

Solución. En la figura 51, hemos colocado los puntos A y B sobre el eje x en $(1{,}300, 0)$ y $(-1{,}300, 0)$, respectivamente. Si $P(x, y)$ denota la localización de la explosión, entonces

$$d(P, B) - d(P, A) = 1000$$

A partir de la definición 3 y de la deducción que le sigue, vemos que ésta es la ecuación para la rama derecha de una hipérbola con una diferencia de distancia fija $2a = 1{,}000$ y $c = 1{,}300$. Así, la ecuación tiene la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{donde } x \geq 0$$

o su equivalente

$$x = a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}$$

Con $a = 500$ y $c = 1{,}300$, tenemos

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - a^2 \\ &= (1{,}300)^2 - (500)^2 \\ &= (1{,}200)^2 \end{aligned}$$

Así, la ecuación de la rama derecha de la hipérbola es

$$x = 500\sqrt{1 + \frac{y^2}{(1{,}200)^2}}$$

o

$$x = \frac{5}{12}\sqrt{(1{,}200)^2 + y^2}$$

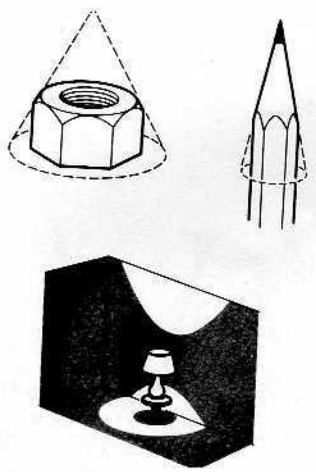


FIGURA 52

Puesto que una hipérbola está formada por la intersección de dos ramas de un cono con un plano perpendicular a su eje, esta curva se encuentra frecuentemente en la vida diaria. ¿Puede localizar la rama o ramas de la hipérbola de la figura 52?

Como la parábola y la elipse, la hipérbola tiene una propiedad de reflexión especial, la cual se analiza en el problema 44.

EJERCICIO 10.3

En los ejercicios 1 al 20, encuentre el centro, los vértices, los focos y las asíntotas de la hipérbola dada. Haga la gráfica de la hipérbola.

1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
2. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$
3. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$
4. $\frac{y^2}{8} - 2x^2 = 1$
5. $16x^2 - 4y^2 = 64$
6. $25x^2 - 4y^2 = 100$
7. $6y^2 - 3x^2 = 18$
8. $8x^2 - 9y^2 + 72 = 0$
9. $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{36} = 1$
10. $\frac{(x+1)^2}{12} - \frac{(y+3)^2}{24} = 1$
11. $\frac{(y+2)^2}{25} - x^2 = 1$
12. $\frac{(y+\frac{1}{2})^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{16} = 1$
13. $4(x-1)^2 - 25(y-2)^2 = 100$
14. $12(x+2)^2 - 4(y-1/4)^2 = 72$
15. $6(x+1/3)^2 - 6(y-1/2)^2 + 24 = 0$
16. $x^2 - 4y^2 - 6x + 8y = 11$
17. $6x^2 - 5y^2 + 12x - 20y - 16 = 0$
18. $9y^2 - 25x^2 + 100x + 54y - 206 = 0$
19. $4y^2 - x^2 + 8y - 6x - 4 = 0$
20. $2x^2 - 3y^2 + 4x + 6y = 49$

En los problemas 21 al 42, encuentre una ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas.

21. Focos $(\pm 4, 0)$, $a = 2$
22. Focos $(\pm 3, 0)$, $b = 1$
23. Focos $(0, \pm 5)$, un vértice en $(0, -3)$
24. Focos $(0, \pm 6)$, un vértice en $(0, -5/2)$
25. Focos $(\pm 5, 0)$, longitud del eje transverso 8

26. Focos $(0, \pm 2)$; longitud del eje transverso 3
27. Centro $(0, 0)$, un vértice en $(3/2, 0)$, un foco en $(-2, 0)$
28. Centro $(0, 0)$, un vértice en $(3, 0)$, un foco en $(5, 0)$
29. Centro $(0, 0)$, vértice en $(0, -3)$, foco $(0, -6)$
30. Centro $(0, 0)$, vértice en $(2, 0)$, foco $(-4, 0)$
31. Vértices $(\pm 4, 0)$, asíntotas $y = \pm x$
32. Focos $(\pm 3, 0)$, asíntotas $y = \pm 3/4x$
33. Vértices $(0, \pm 1)$, asíntotas $y = \pm x/2$
34. Focos $(0, \pm 3)$, asíntotas $y = \pm 2/3x$
35. Centro $(2, -1)$, un foco $(2, -3)$, un vértice $(2, -2)$
36. Centro $(3, 2)$, un foco $(3, 0)$, un vértice $(3, 3)$
37. Focos $(2, -4)$ y $(2, 2)$, un vértice $(2, -3)$
38. Vértices $(5, 2)$ y $(-1, 2)$, un foco $(7, 2)$
39. Vértices $(0, \pm 2)$ pasando por $(4,\ 2\sqrt{3})$
40. Vértices $(\pm 3, 0)$ pasando por $(5,\ 16/3)$
41. Centro $(3, -1)$, un vértice $(4, -1)$ pasando por $(3+\sqrt{5}, -5)$
42. Centro $(-5, 3)$, un vértice $(-2, 3)$ pasando por $(-1, 1)$
43. Deduzca la ecuación (17)
44. La excentricidad e de una hipérbola se define por la razón $e = c/a$ (distancia entre los focos entre la longitud del eje transverso $\left.\dfrac{2c}{2a} = \dfrac{c}{a}\right)$

(a) Si el valor de "b" se hace acercar a cero, ¿a cuál valor se acerca "e"?
(b) Si el valor de "b" se hace infinitamente grande, ¿cuál es el comportamiento de "e"?
(c) ¿Qué relación hay entre la forma de la gráfica de la hipérbola con cada caso anterior?

45. Se puede demostrar que un rayo de luz que emana de un foco de una hipérbola se reflejará a lo largo de la recta del foco opuesto (véase figura 53). Un rayo de luz del foco izquierdo de la hipérbola

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$$

da contra la hipérbola en $(-3, -2)$. Encuentre la ecuación del rayo reflejado.

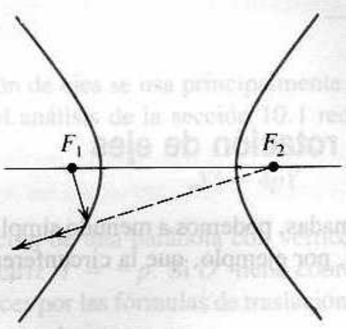


FIGURA 53

46. Una estación de guardacostas se localiza en el punto A a 120 millas al este de otra estación que se localiza en el punto B. Se envían señales de radio de manera simultánea desde ambas estaciones que viajan a razón de 300 metros/seg (microsegundos). Un bote navega dentro del alcance de ambas señales y recibe la señal de la estación B, 220 μseg después de recibir la señal de la estación en A. (a) Exprese la posición del bote como una ecuación con respecto de las posiciones de ambas estaciones. [*Sugerencia*: sitúe ambas estaciones en el eje x, de modo que estén equidistantes y en lados opuestos al eje y]. (b) Grafique la ecuación obtenida. Si el bote navega en forma paralela y a 18 millas al norte de ambas estaciones, ¿cuál es su posición exacta con respecto a ambas estaciones?

47. El **ancho focal** de una hipérbola es la longitud del segmento de recta perpendicular a la recta que contiene el eje transverso, y pasa por un foco con extremo en la hipérbola (véase figura 54).

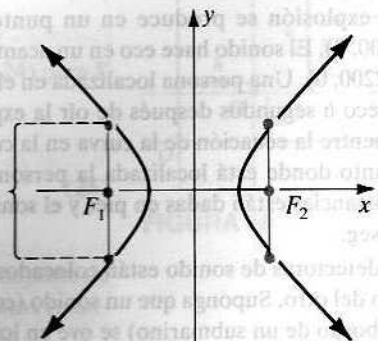


FIGURA 54

(a) Encuentre el ancho focal de la hipérbola

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

(b) Demuestre que, en general, el ancho focal de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es $2b^2/a$.

48. Se dice que dos hipérbolas son conjugadas si el eje transverso de cada hipérbola es el eje conjugado de la otra.

(a) Encuentre la ecuación de la hipérbola que es conjugada de

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1$$

Haga la gráfica de ambas hipérbolas en el mismo sistema de coordenadas.

(b) Encuentre la ecuación de la hipérbola que es conjugada de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

49. Se dice que una hipérbola es rectangular si sus asíntotas son perpendiculares. Demuestre que $x^2 - y^2 + 5x - 3y = 1$ es una hipérbola rectangular.

50. Como se muestra en la figura 55, sea $P(x, y)$ un punto en la rama izquierda de la hipérbola. Entonces, $d_1 < d_2$.
Así $\quad d_1 - d_2 < 0$
y $\quad |d_1 - d_2| = d_2 - d_1$
Obtenga la ecuación de la hipérbola en este caso.

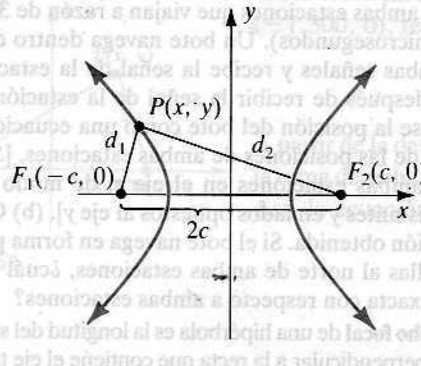


FIGURA 55

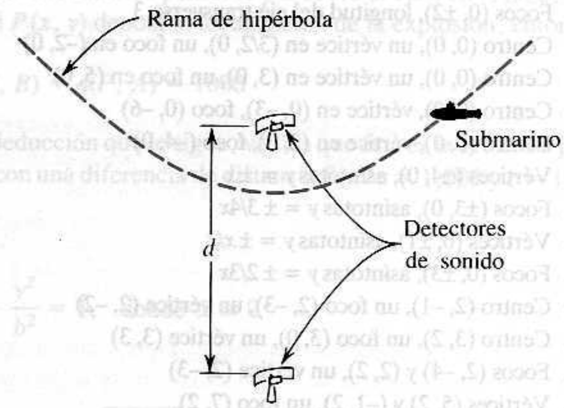


FIGURA 56

51. Una explosión se produce en un punto localizado en (–2200, 0). El sonido hace eco en un acantilado localizado en (2200, 0). Una persona localizada en el punto (x, y) oye este eco 6 segundos después de oír la explosión original. Encuentre la ecuación de la curva en la cual se encuentra el punto donde está localizada la persona. Suponga que las distancias están dadas en pies y el sonido viaja a 1,100 pies/seg.

52. Dos detectores de sonido están colocados a una distancia d uno del otro. Suponga que un sonido (como un estornudo a bordo de un submarino) se oye en los dos detectores con un tiempo h de retraso entre ellos (véase figura 56). Suponga que el sonido viaja en líneas rectas a los dos detectores con velocidad v.

(a) Explique por qué h no puede ser más grande que d/v.

(b) Explique por qué, para los valores dados de d, v y h, se puede determinar que la fuente de sonido está en una rama de una hipérbola en particular. [*Sugerencia*: ¿dónde supone que pueden estar los focos?].

(c) Encuentre una ecuación para la hipérbola en la parte (b), suponiendo que los detectores están en los puntos $(0, d/2)$ y $(0, -d/2)$. Exprese la respuesta en la forma estándar

$$y^2/d^2 - x^2/a^2 = 1$$

53. Compare la definición de una elipse (definición 2) con la definición de una hipérbola (definición 3); ¿en qué se diferencian?

10.4 Traslación y rotación de ejes

Al seleccionar un nuevo sistema de coordenadas, podemos a menudo simplificar una ecuación de una curva en un plano. Considere, por ejemplo, que la circunferencia con centro (4, 3) y radio 2 y ecuación

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

Si suponemos que $X = x - 4$ y $Y = y - 3$, entonces la ecuación será

$$X^2 + Y^2 = 2^2$$

Esta es la ecuación de una circunferencia de radio 2 centrada en el origen del sistema de coordenadas XY. Como se muestra en la figura 57, tenemos en efecto, superpuesto un nuevo sistema de coordenadas XY sobre el sistema original de coordenadas xy. Ahora definimos esta técnica, llamada **traslación de ejes,** más cuidadosamente.

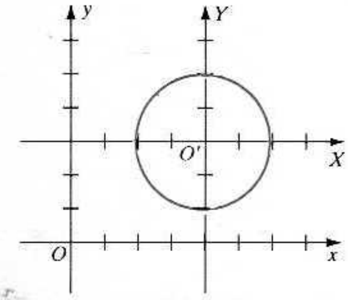


FIGURA 57

ECUACIONES DE TRASLACION

Sea (h, k) un punto en el plano de coordenadas xy. Introducimos un nuevo sistema de coordenadas XY con origen O' en (h, k) tal que los ejes X y Y son paralelos a los ejes x y y, y tienen las mismas escalas y direcciones positivas que estos ejes. La figura 58 muestra que para un punto P con coordenadas (x, y) en el sistema x, y y coordenadas (X, Y) en el sistema XY, tenemos las relaciones

$$\begin{aligned} x &= X + h \\ y &= Y + k \end{aligned} \tag{24}$$

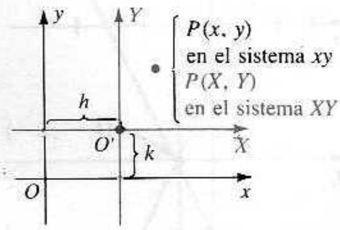


FIGURA 58

que se conocen como **ecuaciones de traslación.** Resolviendo las ecuaciones en (24) para X y Y, obtenemos otra versión de las ecuaciones de traslación

$$\begin{aligned} X &= x - h \\ Y &= y - k \end{aligned} \tag{25}$$

Las ecuaciones (24) y (25) se usan para convertir las coordenadas de un punto o conjunto de puntos relativos a un sistema de coordenadas del mismo punto o conjunto de puntos relativos a un sistema trasladado.

EJEMPLO 1

Sea el origen del sistema XY el punto $(1, -3)$ en el sistema xy. Si las coordenadas xy de un punto P son $(-2, 5)$, encuentre las coordenadas XY de este punto.

Solución. Puesto que se nos dan las coordenadas xy, usamos las ecuaciones (25) para encontrar las coordenadas XY:

$$X = x - h = -2 - 1 = -3$$
$$Y = y - k = 5 - (-3) = 8$$

Así, las coordenadas XY de P son $(-3, 8)$.

La traslación de ejes se usa principalmente para cambiar la forma de las ecuaciones. Por ejemplo, del análisis de la sección 10.1 reconocemos

$$X^2 = 4pY$$

como una ecuación de una parábola con vértice en el origen O' del plano XY, con foco $F'(0, p)$, y directriz $Y = -p$. Si O' tiene coordenadas xy (h, k), como se muestra en la figura 59, entonces por las fórmulas de traslación (25), podemos obtener una ecuación de la misma parábola en el sistema xy:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

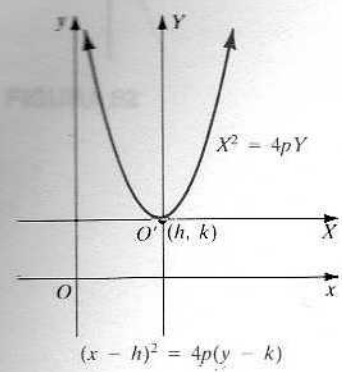


FIGURA 59

Este resultativo verifica la ecuación (3) de la sección 10.1.

Como vemos en los siguientes ejemplos, podemos usar la traslación de ejes para identificar y bosquejar las gráficas de las secciones cónicas.

EJEMPLO 2

Analice y bosqueje la gráfica de

$$9x^2 + 16y^2 - 18x + 64y = 71$$

Solución. Empezamos completando los cuadrados en x y y.

$$9(x^2 - 2x \quad\;) + 16(y^2 + 4y \quad\;) = 71$$
$$9(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 + 4y + 4) = 71 + 9 + 64$$
$$9(x - 1)^2 + 16(y + 2)^2 = 144$$

Diviendo por 144 tenemos

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

lo cual es de la forma

$$\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{9} = 1 \qquad (26)$$

donde $X = x - 1$ y $Y = y + 2$. La gráfica de (26) es una elipse con centro en el origen O' del plano XY. Se sigue que la gráfica de la ecuación dada es una elipse centrada en $(h, k) = (1, -2)$ en el plano xy con ejes paralelos a los ejes coordenados.

De (26) vemos que $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, así que $a = 4$ y $b = 3$. Por consiguiente, las coordenadas XY de los vértices de la elipse son $(\pm 4, 0)$ y $(0, \pm 3)$. Usando las ecuaciones de traslación (24), obtenemos las coordenadas xy de los vértices:

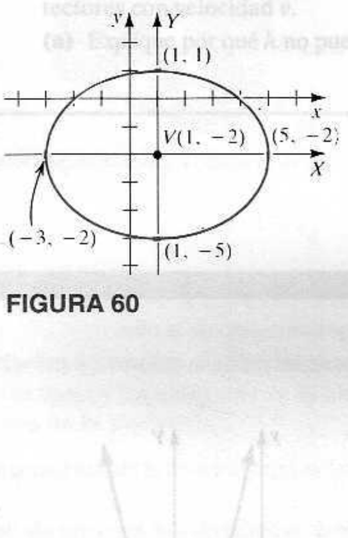


FIGURA 60

$$(4 + 1, 0 - 2) = (5, -2)$$
$$(-4 + 1, 0 - 2) = (-3, -2)$$
$$(0 + 1, 3 - 2) = (1, 1), \text{ y}$$
$$(0 + 1, -3 - 2) = (1, -5)$$

Estos puntos y una gráfica de la elipse se muestran en la figura 60.

Se puede demostrar que para ciertas constantes A, C, D, E y F, que la gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (27)$$

será una de las secciones cónicas: una circunferencia, una parábola, una elipse o una hipérbola. Para otros valores de las constantes, la ecuación (27) representa las secciones cónicas degeneradas (dos rectas que se intersecan, una recta, un punto), dos rectas paralelas, o ninguna gráfica. Véanse problemas 46 al 48.

EJEMPLO 3

Analice y bosqueje la gráfica de

$$4x^2 + 8x - y^2 - 8y - 12 = 0$$

Solución. Primero completamos los cuadrados:

$$\begin{aligned}
4(x^2 + 2x \quad\;\;) - (y^2 + 8y \quad\;\;) &= 12\\
4(x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 8y + 16) &= 12 + 4 - 16\\
4(x + 1)^2 - (y + 4)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Dividiendo ambos lados por 4, obtenemos

$$(x + 1)^2 - \frac{(y + 4)^2}{4} = 0$$

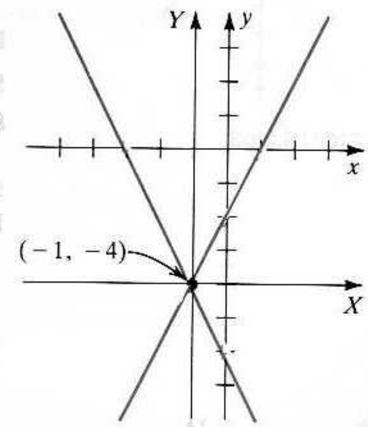
la cual es de la forma

$$X^2 - \frac{Y^2}{4} = 0 \tag{28}$$

donde $X = x + 1$ y $Y = y + 4$. Puesto que los términos del lado izquierdo de (28) tienen signo opuesto, podríamos esperar que esta fuera la ecuación de una hipérbola. Sin embargo, no lo es, ya que el lado derecho es cero. Como (28) es equivalente a

$$X^2 = \frac{Y^2}{4}, \quad \text{o} \quad X = \pm\frac{Y}{2}, \quad \text{o} \quad Y = \pm 2X$$

la gráfica consta de dos líneas rectas con pendientes $\pm$ 2 que se intersecan en el origen O' del plano XY, el cual es el punto $(-1, -4)$ en el plano xy. (Véase figura 61 para un bosquejo de la gráfica). Notamos que esta sección cónica degenerada se obtiene cuando el plano que interseca el cono contiene el eje del cono.



$4x^2 + 8x - y^2 - 8y - 12 = 0$

FIGURA 61

ROTACION DE EJES

Suponga que, en lugar de trasladar los ejes coordenados, los rotamos alrededor del origen. El cambio correspondiente en el sistema coordenado se llama **rotación de ejes.**

Empezamos con un sistema de coordenadas xy con origen O y rotamos los ejes alrededor de O un ángulo θ, como se muestra en la figura 62. Los ejes rotados se denotan con x' y y', respectivamente. Las coordenadas xy de cualquier punto P se relacionan con sus coordenadas $x'y'$ mediante las **ecuaciones de rotación:**

$$\begin{aligned}
x &= x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta\\
y &= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta
\end{aligned} \tag{29}$$

(Véase problema 71).

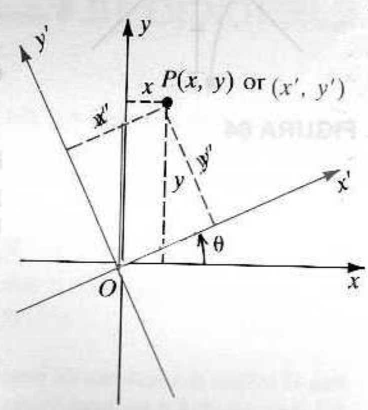


FIGURA 62

EJEMPLO 4

Suponga que el eje x' forma un ángulo de 60° con el eje x. Encuentre las coordenadas xy del punto $P(3, -5)$ en el sistema de coordenadas $x'y'$.

Solución. Usamos $\theta = 60°$, $x' = 3$ y $y' = -5$ en las ecuaciones (29):

$$\begin{aligned}
x &= 3 \cos 60° - (-5) \operatorname{sen} 60°\\
&= 3\left(\frac{1}{2}\right) + 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \frac{3 + 5\sqrt{3}}{2} \approx 5.8
\end{aligned}$$

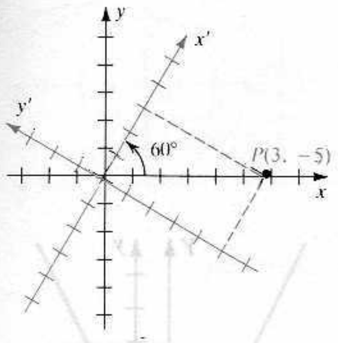


FIGURA 63

y
$$
\begin{aligned}
y &= 3 \operatorname{sen} 60° + (-5) \cos 60° \\
&= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 5\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3\sqrt{3} - 5}{2} \approx 0.1
\end{aligned}
$$

Así las coordenadas xy de P son aproximadamente (5.8, 0.1). Véase figura 63.

EJEMPLO 5

Si los ejes de la coordenada xy se rotan en un ángulo de 45°, encuentre una ecuación de la gráfica de $xy = 1$ relativa al sistema $x'y'$.

Solución. En la figura 64 se muestra la gráfica de $xy = 1$ (la cual es equivalente a $y = 1/x$) y la rotación de ejes. A partir de las ecuaciones de rotación (29) con $\theta = 45°$, tenemos,

$$x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

y

$$y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

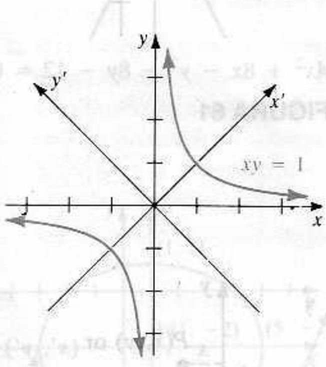


FIGURA 64

Sustituyendo estas expresiones por x y y en $xy = 1$, obtenemos

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 = 1$$

o
$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1$$

Reconocemos que esta es una ecuación de una hipérbola con vértices sobre el eje x' en los puntos $(\pm\sqrt{2}, 0)$ en el sistema de coordenadas $x'y'$. Las asíntotas se dan por $y' = \pm x'$ (las cuales son simplemente los ejes originales x y y).

En el ejemplo 5, la rotación de los ejes eliminó el término xy de la ecuación dada y nos permitió identificar la ecuación original como una sección cónica.

Siempre es posible seleccionar el ángulo θ de rotación, así que cualquier ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \textbf{(30)}$$

donde $B \neq 0$, puede transformarse en una ecuación en x' y y' sin término $x'y'$. Si rotamos los ejes a través de un ángulo θ y usamos las ecuaciones de rotación (29) para sustituir por x y y en (30), obtenemos

$$
\begin{aligned}
&A(x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta)^2 + B(x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta) \times \\
&\qquad (x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta) + C(x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta)^2 \\
&\qquad + D(x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta) + E(x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta) + F = 0
\end{aligned}
$$

Después de simplificar, podemos escribir esta ecuación en la forma

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{31}$$

donde $B' = 2(C - A)\ \text{sen}\,\theta \cos\theta + B(\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta)$

Por consiguiente, para eliminar el término $x'y'$, debemos seleccionar θ para que $B' = 0$, es decir,

$$2(C - A)\ \text{sen}\,\theta \cos\theta + B(\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta) = 0$$

A partir de las fórmulas del ángulo doble para seno y coseno, sabemos que esto es equivalente a

$$(C - A)\,\text{sen}\, 2\theta + B\cos 2\theta = 0$$

o

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

Así, hemos probado el siguiente resultado.

Eliminación del término xy mediante rotación

El término xy puede eliminarse de la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $B \neq 0$, mediante una rotación de ejes a través de un ángulo θ, $0° < \theta < 90°$, tal que

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

Puesto que esta elección de θ elimina el término $x'y'$ en (31), la ecuación que resulta tiene la forma (27) y, por consiguiente, es una sección cónica o una sección cónica degenerada.

EJEMPLO 6

Después de una rotación apropiada de los ejes, identifique y bosqueje la gráfica de

$$5x^2 + 3xy + y^2 = 44$$

Solución. Si identificamos $A = 5$, $B = 3$ y $C = 1$ en (30), entonces el ángulo de rotación satisface

$$\cot 2\theta = \frac{5 - 1}{3} = \frac{4}{3}$$

Puesto que $\cot 2\theta$ es positiva, podemos escoger 2θ tal que $0 < 2\theta < 90°$. Así, usando la fórmula del medio ángulo, encontramos

$$\begin{aligned} \text{sen}\,\theta &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \cos\theta &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{aligned} \tag{32}$$

El valor $\cos 2\theta = \frac{4}{5}$ se halló mediante las identidades $1 + \cot^2 2\theta = \csc^2 2\theta$ y $\cot 2\theta = \cos 2\theta/\text{sen } 2\theta$.

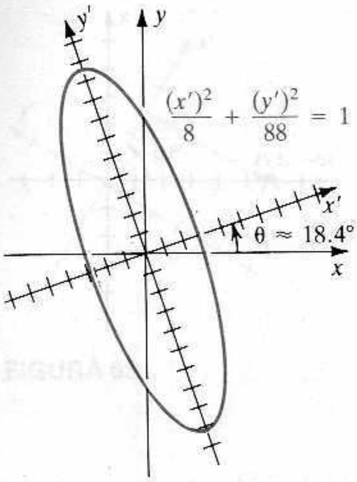


FIGURA 65

Las ecuaciones (29) se convierten en

$$x = \frac{3}{\sqrt{10}}x' - \frac{1}{\sqrt{10}}y'$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y'$$

Sustituyéndolas en la ecuación dada, tenemos

$$5\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' - \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right)^2 + 3\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' - \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y'\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y'\right)^2 = 44$$

$$5\left(\frac{9}{10}(x')^2 - \frac{6}{10}x'y' + \frac{1}{10}(y')^2\right) + 3\left(\frac{3}{10}(x')^2 + \frac{8}{10}x'y' - \frac{3}{10}(y')^2\right) + \left(\frac{1}{10}(x')^2 + \frac{6}{10}x'y' + \frac{9}{10}(y')^2\right) = 44$$

$$45x'^2 - 30x'y' + 5y'^2 + 9x'^2 + 24x'y' - 9y'^2 + x'^2 + 6x'y' + 9y'^2 = 440$$

La última ecuación se simplifica a

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{88} = 1$$

Reconocemos que ésta es la ecuación de una elipse, y usamos los nuevos ejes para bosquejar la gráfica, como se muestra en la figura 65. De (32) tenemos que $\text{sen}\theta = 1/\sqrt{10}$ y así $\theta \approx 18.4°$. Este ángulo de rotación se muestra en la figura.

EJERCICIO 10.4

Sea el origen de coordenadas del sistema de coordenadas XY el punto (2, 3) del sistema de coordenadas xy. En los problemas 1 al 6, encuentre las coordenadas XY del punto dado en el sistema xy.

1. (6, 5)
2. (4, –2)
3. (–1, –3)
4. (–2, 5)
5. (–1, 3)
6. (2, 7)

Sea el origen del sistema de coordenadas XY el punto (–3, 4) del sistema xy. En los problemas 7 al 12, encuentre las coordenadas xy del punto dado en el sistema XY.

7. (5, 2)
8. (7, –3)
9. (–6, –6)
10. (–3, 4)
11. (0, 0)
12. (0, 6)

En los problemas 13 al 20, exprese la ecuación xy dada en términos del sistema XY, donde el origen del sistema XY está en el punto indicado en el sistema xy.

13. $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 25$; $(-5, 2)$
14. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 16$; $(-2, -1)$
15. $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$; $(-3, 4)$
16. $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$; $(4, 1)$
17. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 2 = 0$; $(1, -3)$
18. $5x - 2y + 8 = 0$; $(1, -1)$
19. $2x + 3y - 6 = 0$; $(3, 0)$
20. $4x - 7y + 12 = 0$; $(2, -1)$

En los problemas 21 al 28, exprese la ecuación dada XY en términos del sistema xy, donde el origen del sistema XY está en el punto indicado en el sistema xy.

21. $X^2 + Y^2 = 36$; $(-1, -3)$
22. $X^2 + Y^2 = 18$; $(5, -2)$
23. $X^2 + Y^2 = 1$; $(-3, 4)$
24. $X^2 + Y^2 = r^2$; (h, k)
25. $3X - 2Y = 0$; $(0, 5)$
26. $7X + Y = 0$; $(1, 1)$
27. $5X + 3Y = 0$; $(-3, 5)$
28. $aX + bY + c = 0$; (h, k)

En los problemas 29 al 44, analice y bosqueje la gráfica de la ecuación dada.

29. $x^2 - 6y + 2x = 0$

30. $4y^2 - x^2 + 16y - 2x + 19 = 0$

31. $2x^2 + 2y^2 - 8y + 4x + 5 = 0$

32. $3y^2 - 4x^2 + 2y - 8x - 16 = 0$

33. $4y^2 + 3x^2 - 8y + 6x + 7 = 0$

34. $x^2 + y^2 + 2y - 10x + 30 = 0$

35. $4y^2 + 6x^2 + 8y - 12x - 2 = 0$

36. $y^2 - x^2 - 10y + 6x + 16 = 0$

37. $3y^2 + x^2 - 6y = 0$

38. $2y^2 + 4y - 3x + 6 = 0$

39. $2y^2 + x^2 + 24y + 12x + 109 = 0$

40. $-x^2 - y^2 + 4y - 10x - 4 = 0$

41. $-x^2 - y^2 + 6y + 4x - 13 = 0$

42. $-y^2 + x^2 - 4y + 14x + 45 = 0$

43. $-2y^2 + 6x^2 + 8y - 12x = 0$

44. $-2y^2 - 4x^2 + 8y - 4x + 3 = 0$

45. Muestre cómo se pueden obtener las siguientes secciones cónicas intersecando un plano con un cono de dos ramas: (a) un punto (b) una recta.

En los problemas 46 al 48 refiérase a la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

46. Demuestre que si A y C tienen los mismos signos, entonces la gráfica de la ecuación es una elipse, una circunferencia, un punto, o no existe.

47. Demuestre que si A y C tienen signos opuestos, entonces la gráfica de la ecuación es una hipérbola o un par de rectas que se intersecan.

48. Demuestre que si $A = 0$ o $C = 0$, entonces la gráfica de la ecuación es una parábola, dos rectas paralelas, una recta, o no existe.

49. Deduzca la ecuación (11) y verifique la figura 31(a). [*Sugerencia*: sea XY una traslación del sistema de coordenadas xy a un origen nuevo en (h, k). Considere la elipse $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1$. Encuentre su ecuación en el sistema de coordenadas xy. Encuentre los vértices y los focos de esta elipse en el sistema de coordenadas xy].

50. Deduzca la ecuación (19) y verifique la figura 48(a). [*Sugerencia*: sea XY una traslación del sistema de coordenadas xy a un origen nuevo en (h, k). Considere la hipérbola $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1$. Encuentre su ecuación en el sistema de coordenadas xy. Encuentre los vértices, focos y asíntotas de esta hipérbola en el sistema de coordenadas xy].

En los problemas 51 al 56, encuentre las coordenadas xy del punto dado en el sistema $x'y'$. Use el ángulo θ de rotación especificado.

51. $(1, -4), \theta = 60°$

52. $(5, -7), \theta = 90°$

53. $(2, 0), \theta = \pi/4$

54. $(0, 5), \theta = \pi/6$

55. $(2, 3), \theta = 105°$

56. $(-1, -1), \theta = \pi/12$

En los problemas 57 al 62, use el ángulo θ de rotación dado para representar la ecuación relativa al sistema $x'y'$.

57. $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 16,\ \theta = 60°$

58. $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 24\sqrt{2}x = 0,\ \theta = 45°$

59. $4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 = 5,\ \theta = \pi/6$

60. $4x^2 + 3xy + 4y^2 = 9,\ \theta = 45°$

61. $4x^2 + 3xy + 54 = 0,\ \theta = 1/2 \arctan 3/4$

62. $3x^2 + 4xy + 2y^2 = 24, \theta = 1/2 \arctan 4$

En los problemas 63 al 66, elimine el término xy en la ecuación dada mediante una rotación de ejes adecuada.

63. $2x^2 - \sqrt{3}xy + 3y^2 = 2$

64. $5x^2 + xy + 10y^2 - 3x + 2y = 6$

65. $2x^2 + xy + y^2 = 5$

66. $8x^2 - xy + 2y^2 - x + y = 8$

En los problemas 67 al 70, para la ecuación dada en el sistema xy, lleve a cabo una rotación adecuada para que la ecuación resultante en el sistema $x'y'$ no tenga término $x'y'$. Bosqueje la gráfica.

67. $x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 - 16 = 0$

68. $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 20 = 0$

69. $x^2 + 2xy + y^2 = 1$

70. $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 16 = 0$

71. **(a)** Usando la figura 66, demuestre que

$$x' = r\cos\phi, \qquad y' = r \operatorname{sen}\phi$$

y

$$x = r\cos(\theta + \phi), \qquad y = r\operatorname{sen}(\theta + \phi).$$

(b) Usando los resultados de la parte (a), deduzca las ecuaciones de rotación (29).

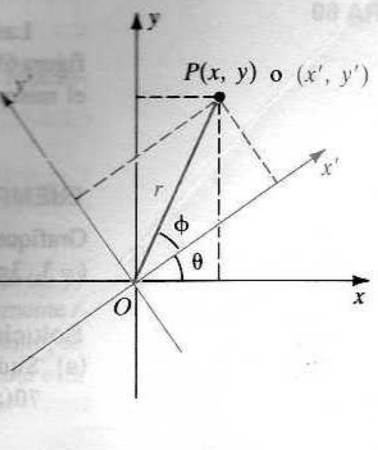


FIGURA 66

10.5 Coordenadas polares

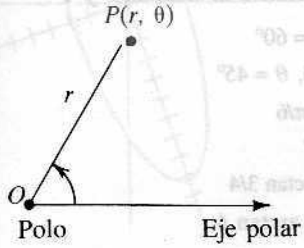


FIGURA 67

Hasta ahora hemos situado un punto P en el plano, dando sus coordenadas cartesianas (a, b), donde a y b denotan las distancias dirigidas a partir de los ejes y y x, repectivamente. Otro sistema para localizar puntos en el plano es el **sistema de coordenadas polares.**

Para establecer un sistema de coordenadas polares, selecionamos un punto fijo O, llamado **origen** o **polo** y un rayo fijo, llamado **eje polar,** con extremo O. Para cualquier punto P en el plano, denotamos la distancia de O a P con r, como se muestra en la figura 67. Si $P \neq O$, entonces el eje polar y OP determinan un ángulo θ con OP como su lado terminal. Las coordenadas del par ordenado (r, θ) se llaman **coordenadas polares** de P. Como antes, θ es positivo si el ángulo se genera mediante la rotación del eje polar en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y θ es negativo si la rotación va en el sentido de las manecillas del reloj. (Se pueden usar radianes o grados para medir θ). Si $P = O$, entonces $r = d(O, P) = 0$, y el punto $(r, \theta) = (0, \theta)$ en el polo *para cualquier* θ. Así, el origen tiene coordenadas polares

$$O = (0, \theta)$$

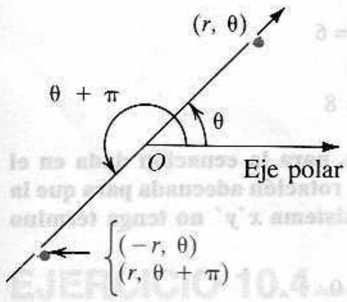


FIGURA 68

Podemos permitir que r sea negativa adoptando la siguiente convención. Si r es negativa, medimos $|r|$ unidades desde el polo sobre el rayo *opuesto* al rayo determinado por θ, es decir, a lo largo del rayo determinado por $\theta + \pi$ (o $\theta + 180°$). Como se muestra en la figura 68, para r positiva, $(-r, \theta)$ y $(r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto. También note que (r, θ) y $(-r, \theta)$ son simétricos con respecto al polo.

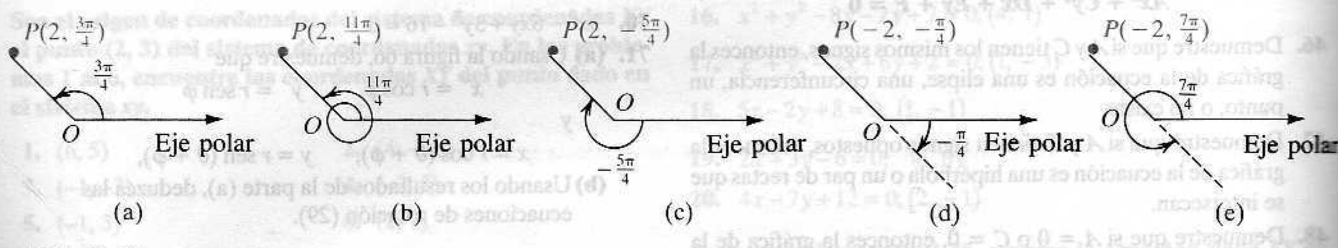


FIGURA 69

Las coordenadas polares de un punto no son unicas. Por ejemplo, como vemos en la figura 69, $(2, 3\pi/4)$, $(2, 11\pi/4)$, $(2, -5\pi/4)$, $(-2, -\pi/4)$, y $(-2, 7\pi/4)$ todos representan el mismo punto P.

EJEMPLO 1 ______________

Grafique los puntos cuyas coordenadas polares son **(a)** $(2, \pi/6)$; **(b)** $(4, -\pi/4)$; y **(c)** $(-3, 3\pi/4)$.

Solución

(a) Sitúe el punto a 2 unidades del polo sobre el lado terminal de $\theta = \pi/6$. Véase figura 70(a).

(b) Localice el punto a 4 unidades del polo sobre el lado terminal de $\theta = -\pi/4$. Véase figura 70(b).

(c) Sitúe el punto a 3 unidades del origen a lo largo del lado terminal del ángulo $\theta + \pi = 3\pi/4 + \pi = 7\pi/4$. Veáse figura 70(c).

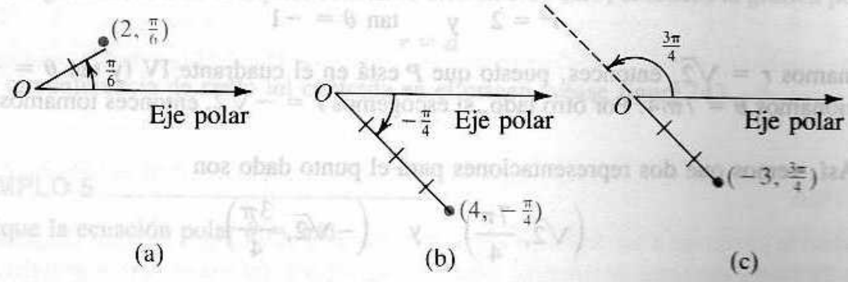


FIGURA 70

CONVERSION ENTRE COORDENADAS CARTESIANAS Y POLARES

Al superponer el sistema de coordenadas cartesianas en un sistema polar, como se muestra en la figura 71, podemos convertir las coordenadas polares de un punto en coordenadas rectangulares, observando que

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta. \tag{33}$$

Estas fórmulas se cumplen para cualquier valor de r.

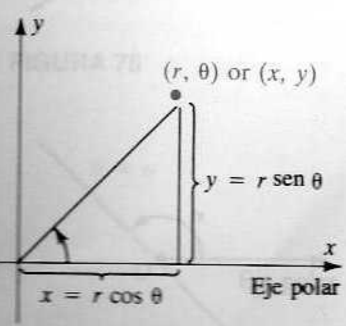


FIGURA 71

EJEMPLO 2

Convierta $(4, \pi/6)$ de coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

Solución. Con $r = 4$ y $\theta = \pi/6$, tenemos de (33) que

$$x = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$y = 4\,\text{sen}\frac{\pi}{6} = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

Así el punto polar $(4, \pi/6)$ es equivalente a $(2\sqrt{3}, 2)$ en coordenadas rectangulares.

Al referirnos de nuevo a la figura 72, vemos que x, y, r, y θ se hallan también relacionadas por

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \tag{34}$$

Estas últimas ecuaciones pueden usarse para convertir las coordenadas rectangulares (x, y) en coordenadas polares (r, θ). Sin embargo, estas ecuaciones no determinan únicamente r y θ porque hay más de una representación polar para el mismo punto. Por consiguiente, se deben seleccionar valores apropiados para r y θ sobre la base del cuadrante en el cual está (x, y). Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3

Convierta $P(1, -1)$ de coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

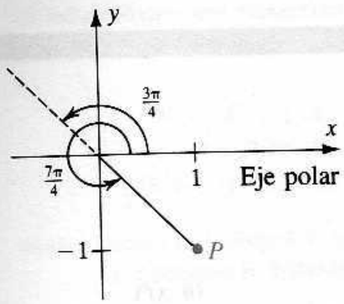


FIGURA 72

Solución. Con $x = 1$ y $y = -1$, tenemos de (34)

$$r^2 = 2 \quad \text{y} \quad \tan\theta = -1$$

Si tomamos $r = \sqrt{2}$, entonces, puesto que P está en el cuadrante IV (y $\tan\theta = -1$), seleccionamos $\theta = 7\pi/4$. Por otro lado, si escogemos $r = -\sqrt{2}$, entonces tomamos $\theta = 3\pi/4$.

Así, vemos que dos representaciones para el punto dado son

$$\left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

(Véase figura 72.).

Como método alteno para resolver el ejemplo 3, se resuelven las ecuaciones (33) simultáneamente con $x = 1$ y $y = -1$:

$$1 = r\cos\theta \tag{35}$$

$$-1 = r\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{36}$$

Usando la técnica de la sustitución de la sección 8.1, encontramos $r = 1/\cos\theta$. Sustituyendo esto en (36), obtenemos

$$-1 = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)(\mathrm{sen}\,\theta) = \tan\theta$$

Si $\theta = 3\pi/4$ en (35), obtenemos

$$1 = r\cos\frac{3\pi}{4} = r\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$$

Así, $r = -2/\sqrt{2} = -\sqrt{2}$, tenemos la representación polar $(-\sqrt{2}, 3\pi/4)$. Si usamos $\theta = 7\pi/4$ en (35), encontramos que $1 = r\cos(7\pi/4) = r(\sqrt{2}/2)$, o $r = \sqrt{2}$. Esto produce la representación polar $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$.

Nota de advertencia: en el ejemplo 3, $(-\sqrt{2}, 7\pi/4)$ y $(\sqrt{2}, 3\pi/4)$ *no* son representaciones polares de $(1, -1)$ porque representan las coordenadas rectangulares $(-1, 1)$. Así es que no podemos hacer pares con cualquier ángulo θ y cualquier valor r que satisfaga (34).

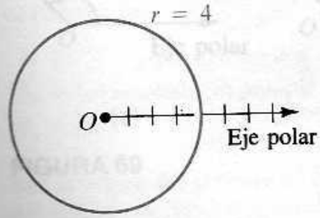


FIGURA 73

GRAFICAS POLARES

Una **gráfica polar** de una ecuación que incluye coordenadas polares r y θ es el conjunto de todos los puntos (r, θ) en el plano que tiene por lo menos un conjunto de coordenadas polares que satisfacen la ecuación dada.

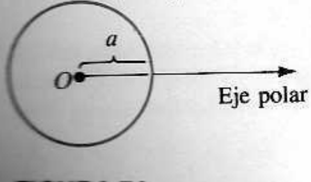


FIGURA 74

EJEMPLO 4

Grafique la ecuación polar $r = 4$.

Solución. Puesto que cada punto que satisface la ecuación $r = 4$ está a 4 unidades del origen, vemos que la gráfica es la circunferencia de radio 4 centrada en el origen (véase figura 73).

En general, si a es cualquier constante diferente de cero, entonces la gráfica polar de

$$r = a$$

es la circunferencia de radio $|a|$ centrada en el origen (véase figura 74).

EJEMPLO 5

Grafique la ecuación polar $\theta = \pi/6$.

Solución. Puesto que r no está especificado, el punto $(r, \pi/6)$ está sobre la gráfica para cualquier r. Si $r \geq 0$, entonces este punto está en la semirrecta que se muestra en color en la figura 75. Si $r < 0$, entonces el punto está en la semirrecta negra. Por consiguiente, la gráfica polar de $\theta = \pi/6$ es la recta que pasa por el origen y que forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje polar.

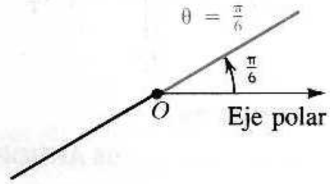


FIGURA 75

Generalmente, para cualquier número α, la gráfica polar de

$$\theta = \alpha$$

es la recta que pasa por el polo y que forma un ángulo de α radianes con el eje polar, como se muestra en la figura 76. Cuando se hace la gráfica de las ecuaciones polares, es muy útil usar papel especial para gráfica polar. Un ejemplo de este papel se muestra en la figura 77.

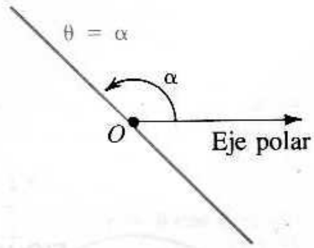


FIGURA 76

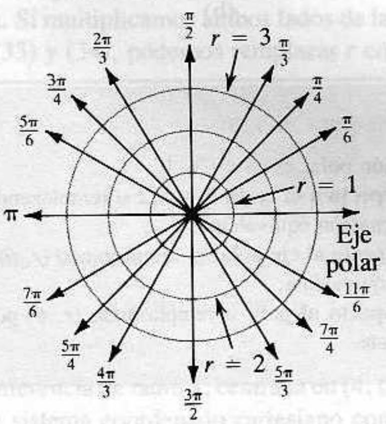


FIGURA 77

EJEMPLO 6

Grafique la ecuación polar $r = \theta$.

Solución. A medida que $\theta \geq 0$ se incrementa, r se incrementa y los puntos (r, θ) van en espiral hacia afuera del polo en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Esto se muestra en color en la gráfica de la figura 78. La porción negra de la gráfica se obtiene marcando puntos para $\theta < 0$.

Los valores de r y θ de los puntos marcados en la figura 78 se muestran en la siguiente tabla.

r	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	2π
θ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	2π

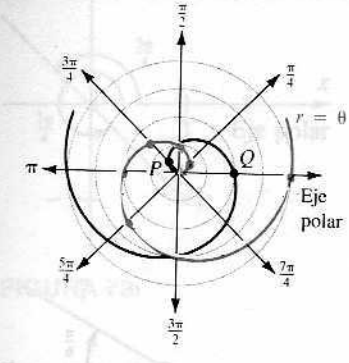
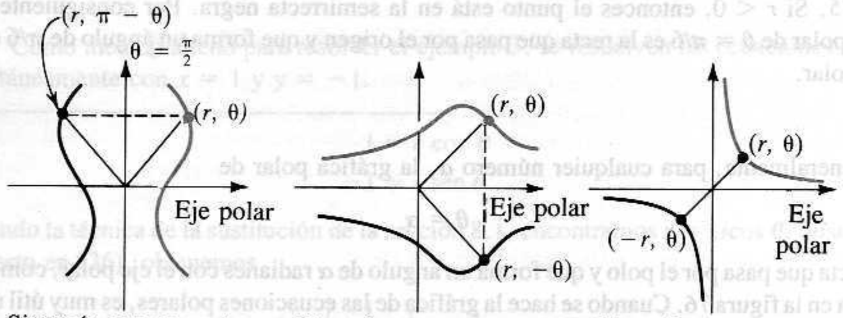


FIGURA 78

¿Puede localizar $(-\pi/4, -\pi/4)$ y $(-\pi, -\pi)$ sobre la gráfica? [*Sugerencia*: estos puntos están marcados con P y Q, respectivamente].

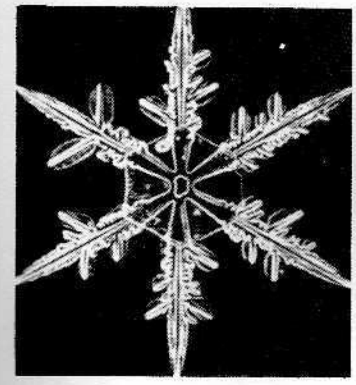
SIMETRIA

La simetría puede ser a menudo una ayuda para hacer la gráfica de una ecuación polar. La figura 79 ilustra tres tipos de simetría: simetría con respecto (a) a la recta $\theta = \pi/2$; (b) al eje polar; y (c) al polo.



Simetría con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$ (a) | Simetría con respecto al eje polar (b) | Simetría con respecto al polo (c)

FIGURA 79



Pruebas para simetría en coordenadas polares

La gráfica de la ecuación polar es:

(i) simétrica con respecto a la recta $\theta = \pi/2$ si remplazando (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$ se produce una ecuación equivalente;

(ii) simétrica con respecto al eje polar si remplazando (r, θ) por $(r, -\theta)$ se produce una ecuación equivalente;

(iii) simétrica con respecto al polo si remplazando (r, θ) por $(-r, \theta)$ resulta una ecuación equivalente.

Puesto que la descripción polar de un punto no es única, una gráfica puede inclusive tener un tipo particular de simetría aun cuando la prueba para ello puede fallar.

EJEMPLO 7

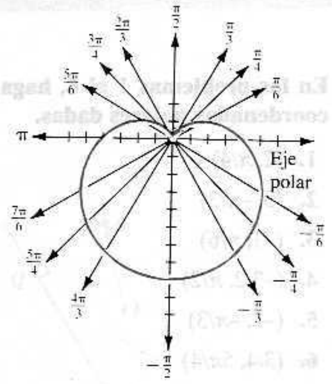
Haga la gráfica de $r = 4 - 4$ sen θ.

Solución. Empezamos probando la simetría. Remplazando θ por $\pi - \theta$, obtenemos $r = 4 \neq 4$ sen $(\pi - \theta)$, o $r = 4 \neq 4$ sen θ, puesto que sen $(\pi - \theta) =$ sen θ. Así la gráfica de $r = 4 \neq 4$ sen θ es simétrica con respecto a la recta $\theta = \pi/2$.

Remplazando, a su turno, θ por $-\theta$ y r por $-r$, no obtenemos ecuaciones que sean equivalentes a $r = 4 - 4$ sen θ. Por tanto, no podemos sacar ninguna conclusión acerca de la simetría con respecto al eje polar o al polo.

Puesto que la gráfica será simétrica con respecto a la recta $\theta = \pi/2$, hacemos una tabla de valores para $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	8	7.5	6.8	6	4	2	1.2	0.5	0



$r = 4 - 4 \operatorname{sen} \theta$

FIGURA 80

Marcando estos puntos y usando simetría, obtenemos la gráfica mostrada en la figura 80.

Muchas gráficas de las coordenadas polares tienen nombres especiales. Por ejemplo, la gráfica que se muestra en el ejemplo 6 es un caso especial de $r = a\,\theta$. Una gráfica de esta ecuación se llama **espiral de Arquímedes.** La gráfica del ejemplo 7 se llama **cardioide** porque su forma es como la del corazón. Muchas otras gráficas interesantes resultan de ecuaciones polares. Algunas se incluyen en los ejercicios (véanse problemas 41 al 50).

Como muestra el siguiente ejemplo, el convertir una ecuación polar dada en una ecuación de coordenadas rectangulares x y y puede, algunas veces, ser una ayuda al bosquejar la gráfica.

EJEMPLO 8

Grafique la ecuación polar $r = 8 \cos \theta$.

Solución. Más que marcar los puntos, convertiremos esta ecuación polar en una ecuación en coordenadas cartesianas. Si multiplicamos ambos lados de la ecuación dada por r, obtenemos $r^2 = 8r \cos \theta$. De (33) y (34), podemos remplazar $r \cos \theta$ por x y r^2 por $x^2 + y^2$, para obtener

$$x^2 + y^2 = 8x$$

o

$$x^2 - 8x + y^2 = 0$$

Completando el cuadrado en x y y, encontramos

$$(x - 4)^2 + y^2 = 16$$

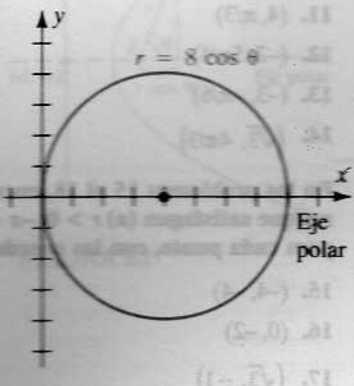


FIGURA 81

Así, la gráfica es una circunferencia de radio 4, centrada en (4, 0) sobre el eje x. En la figura 81, hemos superpuesto un sistema coordenado cartesiano como ayuda para bosquejar la gráfica.

En general, las ecuaciones

$$r = a \cos \theta \quad \text{y} \quad r = a \operatorname{sen} \theta$$

representan circunferencias de radios $\frac{1}{2}|a|$, centradas en $(\frac{1}{2}a, 0)$ y $(0, \frac{1}{2}a)$, respectivamente (véase problema 56). Las ecuaciones polares de la parábola, elipse, e hipérbola se tratan en la sección 10.6.

EJERCICIO 10.5

En los problemas 1 al 6, haga la gráfica del punto con las coordenadas polares dadas.

1. $(2, \pi/4)$
2. $(3, -\pi/3)$
3. $(-1, \pi/6)$
4. $(-3/2, \pi/2)$
5. $(-2, -\pi/3)$
6. $(3/4, 5\pi/4)$

En los problemas 7 al 10, encuentre otras representaciones de coordenadas polares para el punto dado que satisfaga cada una de las siguientes condiciones:

(a) $r > 0, \theta < 0$ **(b)** $r > 0, \theta > 2\pi$
(c) $r < 0, \theta > 0$ **(d)** $r < 0, \theta < 0$

7. $(1, \pi/4)$ 8. $(2, \pi/3)$
9. $(3, \pi/6)$ 10. $(4, \pi/2)$

En los problemas 11 al 14, encuentre las coordenadas rectangulares de cada punto con las coordenadas polares dadas.

11. $(4, \pi/3)$
12. $(-2, 5\pi/4)$
13. $(-3, -\pi/6)$
14. $(\sqrt{3}, 4\pi/3)$

En los problemas 15 al 18, encuentre las coordenadas polares que satisfagan (a) $r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$ y (b) $r < 0, -\pi < \theta \leq \pi$ para cada punto, con las coordenadas rectangulares dadas.

15. $(-4, -4)$
16. $(0, -2)$
17. $(\sqrt{3}, -1)$
18. $(\sqrt{2}, \sqrt{6})$

En los problemas 19 al 30, grafique la ecuación polar dada.

19. $r = 2$
20. $r = 1/5$
21. $r = -3$
22. $r = -\pi/2$
23. $\theta = \pi/3$
24. $\theta = -\pi/2$
25. $\theta = 7\pi/6$
26. $\theta = 0$
27. $r = \cos\theta$
28. $r = 3\,\text{sen}\,\theta$
29. $r = -2\,\text{sen}\,\theta$
30. $r = 1/3\cos\theta$

En los problemas 31 al 40, convierta la ecuación dada en una ecuación cartesiana y úsela como ayuda al bosquejar la gráfica.

31. $r\cos\theta = 4$
32. $r\,\text{sen}\,\theta = -1$
33. $2 + r\cos\theta = 0$
34. $2r - \text{sen}\,\theta = 0$
35. $r = -4\sec\theta$
36. $r = 4\csc\theta$
37. $r = 2$
38. $\theta = 5\pi/4$
39. $r(\cos\theta + r\,\text{sen}^2\theta) = 1$
40. $r\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta = 4$

En los problemas 41 al 50, aplique las pruebas para simetría y bosqueje la gráfica de la ecuación polar dada (los rótulos dan el nombre a cada una de estas curvas).

41. $r = 1 + \cos\theta$ (cardioide)
42. $r = 2 - 2\,\text{sen}\,\theta$ (cardioide)
43. $r = 3\,\text{sen}\,2\theta$ (rosa de cuatro pétalos)
44. $r = 5\cos 3\theta$ (rosa de tres pétalos)
45. $r = 1 + 2\cos\theta$ (caracol)
46. $r = 4 - 2\,\text{sen}\,\theta$ (caracol)
47. $r^2 = 25\,\text{sen}\,2\theta$ (lemniscata)
48. $r^2 = -4\,\text{sen}\,2\theta$ (lemniscata)
49. $r = e\theta/2$ (espiral logarítmica)
50. $r = 1/\theta$ (espiral recíproca)

En los problemas 51 al 54, encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación cartesiana dada.

51. $4x - 2y + 1 = 0$
52. $x^2 + y^2 = 81$
53. $x^2 + y^2 + y = \sqrt{x^2 + y^2}$
54. $x^3 + y^3 + 3xy = 0$
55. Encuentre la ecuación polar de la recta $ax + by + c = 0$.
56. Verifique que las gráficas de $r = a\cos\theta$ y $r = a\,\text{sen}\,\theta$ para $a \neq 0$ son circunferencias. Encuentre el centro y el radio de cada una.
57. Verifique que la ecuación polar $r = a\,\text{sen}\,\theta + b\cos\theta$ para $a \neq 0$ y $b \neq 0$ es una circunferencia. Determine el centro y el radio.
58. En coordenadas polares demuestre que la distancia entre los puntos $P_1(r_1, \theta)$, y $P_2(r_2, \theta)$ es
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$
[*Sugerencia*: use la ley de los cosenos].
59. Use la fórmula encontrada en 58 para hallar la distancia entre los puntos $(2, \pi/6)$ y $(4, 2\pi/3)$ dados en coordenadas polares.

10.6 Ecuaciones polares de las secciones cónicas

En las tres primeras secciones de este capítulo obtuvimos ecuaciones cartesianas de la parábola, la elipse y la hipérbola, a partir de tres definiciones geométricas diferentes de estas curvas. Usando la idea de la **excentricidad** podemos ahora dar una definición general de una sección cónica que abarque las tres curvas.

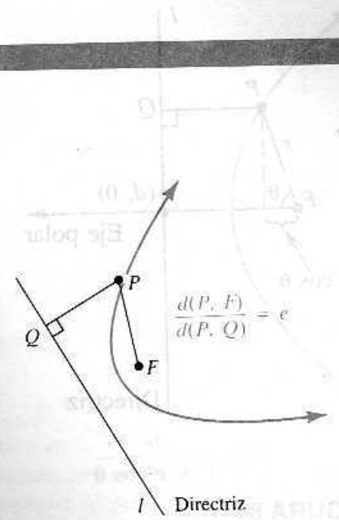


FIGURA 82

DEFINICION 4

Sea l una recta fija en el plano y sea F un punto que no está sobre la recta. **Sección cónica** es el conjunto de todos los puntos P en el plano para los cuales la distancia de P a F, dividida por la distancia de P a l es una constante.

La recta fija l se llama **directriz** y el punto F es un **foco.** La constante fija se llama **excentricidad** de la sección cónica y se denota por la letra e. (A pesar de que usamos el mismo símbolo e para la base del logaritmo natural, el significado se aclara por el contexto). Como se muestra en la figura 82, el punto P pertenece a la sección cónica si y solamente si

$$\frac{d(P, F)}{d(P, Q)} = e \tag{37}$$

donde Q es el pie de la perpendicular de P a la línea l.

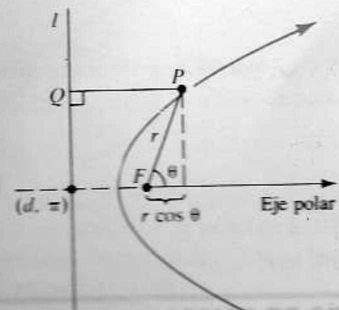


FIGURA 83

Podemos usar coordenadas polares para interpretar la ecuación (37). Como se muestra en la figura 83, introducimos un sistema de coordenadas polares orientado de tal forma que el origen está en el foco F y la directriz l sea perpendicular al eje polar extendido y d unidades a la izquierda de F. Vemos que $d(P, F) = r$ y $d(P, Q) = d + r \cos \theta$. Así, volviendo a escribir (37) y haciendo estas sustituciones, obtenemos

$$d(P, F) = ed(P, Q),$$

o

$$r = e(d + r \cos \theta) .$$

Resolviendo para r obtenemos

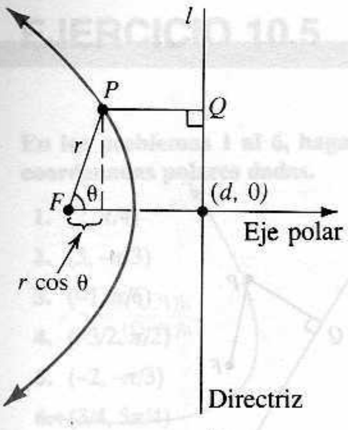
$$r - er \cos \theta = ed \tag{38}$$

$$r(1 - e \cos \theta) = ed$$

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta} \tag{39}$$

Esta es una **ecuación polar para una sección cónica** con un foco en el origen y la directriz vertical d unidades a la izquierda del foco.

Para ver que la definición 4 es consistente con nuestras anteriores definiciones y ecuaciones de las secciones cónicas, convertimos la ecuación polar (39) en coordenadas rectangulares. Sustituyendo $r = \pm|\sqrt{x^2 + y^2}$ y $r \cos \theta = x$ en la forma equivalente (38) y simplificando, encontraremos



$$r = \frac{de}{1 + e\cos\theta}$$

FIGURA 84

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} - ex = ed$$

$$x^2 + y^2 = e^2x^2 + 2e^2dx + e^2d^2 \tag{40}$$

$$(1 - e^2)x^2 - 2e^2dx + y^2 = e^2d^2$$

Si $e = 1$, la última ecuación se convierte en

$$-2dx + y^2 = d^2, \quad \text{o} \quad y^2 = 2d\left(x + \frac{d}{2}\right)$$

la cual es una ecuación de la parábola con vértice $(-d/2, 0)$ y foco en el origen. Al completar el cuadro, podemos demostrar que la gráfica de (40) es una elipse para $0 < e < 1$ y una hipérbola para $e > 1$. En cada caso, F es un foco de la cónica (véase problema 27).

Si hubiéramos colocado el foco F a la izquierda de la directriz en nuestra deducción de la ecuación polar (39) para la cónica, entonces se obtendría la ecuación $r = de/(1 + e\cos\theta)$. (Note el cambio de signo en el denominador). Véase figura 84.

Como se muestra en la figura 85, si la directriz l está en una posición paralela al eje polar a través de $(d, \pi/2)$ o $(d, 3\pi/2)$, entonces $\cos\theta$ sería remplazado por $\operatorname{sen}\theta$ en las ecuaciones resultantes.

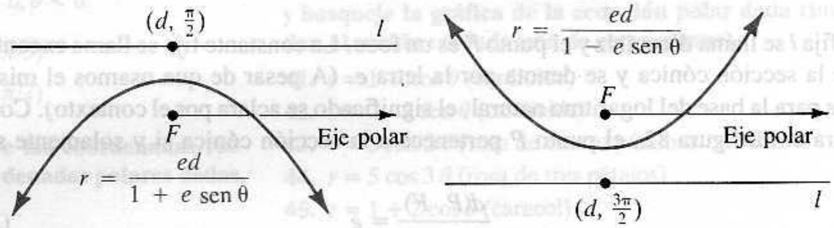


FIGURA 85

Los siguientes cuadros resumen los resultados de nuestro análisis.

TIPO DE CONICA

CONICA	EXCENTRICIDAD
Parábola	$e = 1$
Elipse	$0 < e < 1$
Hipérbola	$e > 1$

SECCIONES CONICAS CON UN FOCO EN EL POLO Y EXCENTRICIDAD *e*

ECUACION POLAR	DIRECCION Y COLOCACION DE LA DIRECTRIZ
$r = \dfrac{ed}{1 - e\cos\theta}$	Vertical, d unidades a la izquierda del polo
$r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$	Vertical, d unidades a la derecha del polo
$r = \dfrac{ed}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$	Horizontal, d unidades debajo del polo
$r = \dfrac{ed}{1 + e\operatorname{sen}\theta}$	Horizontal, d unidades arriba del polo

Para cada una de las ecuaciones polares anteriores, la directiz es perpendicular al eje de la parábola, al eje mayor de la elipse o al eje transverso de la hipérbola.

EJEMPLO 1

Identifique cada una de las siguientes secciones cónicas:

(a) $r = \dfrac{4}{1 - 2\operatorname{sen}\theta}$ (b) $r = \dfrac{3}{4 + \cos\theta}$

Solución

(a) Al comparar la ecuación dada con la forma polar $r = ed/(1 - e \text{ sen } \theta)$ nos habilita para hacer la identificación $e = 2$. Así concluimos que la sección cónica es una hipérbola.

(b) Para identificar la sección cónica, dividimos el numerador y el denominador de la fracción por 4 y obtenemos

$$r = \frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{4}\cos\theta}$$

Entonces, podemos ver que $e = \frac{1}{4}$. Así, esta ecuación representa una elipse.

Si la ecuación de una sección cónica es dada por una de las formas polares anteriores, podemos obtener un esquema de su gráfica determinando la orientación de su eje y marcando los puntos que corresponden a los intersectos x y y. Estos puntos se encuentran tomando $\theta = 0$, $\pi/2$, π y $3\pi/2$. Puesto que el foco está en el origen y el eje es o vertical u horizontal, el vértice (o los dos vértices) de la cónica se encontrarán en estos intersectos.

EJEMPLO 2

Bosqueje la gráfica de

$$r = \frac{6}{3 - 2 \text{ sen } \theta}$$

Solución. Dividiendo el numerador y el denominador por 3 obtenemos

$$r = \frac{2}{1 - \frac{2}{3} \text{ sen } \theta}$$

Así, $e = \frac{2}{3}$, y la gráfica es una elipse con un foco en el polo. El término sen θ nos dice que la directriz es horizontal y, por consiguiente, el eje mayor de la elipse es vertical. Al dibujar los intersectos x y y dados en el cuadro siguiente, localizamos dos vértices de la elipse (véase figura 86).

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	2	6	2	$\frac{6}{5}$

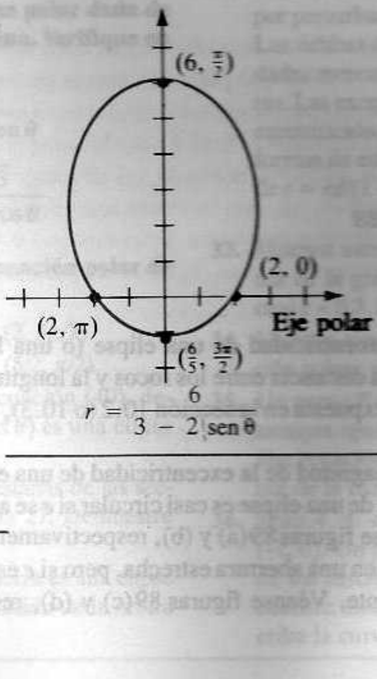


FIGURA 86 $r = \dfrac{6}{3 - 2 \text{ sen } \theta}$

EJEMPLO 3

Bosqueje la gráfica de $r = \dfrac{2}{1 + 2\cos\theta}$

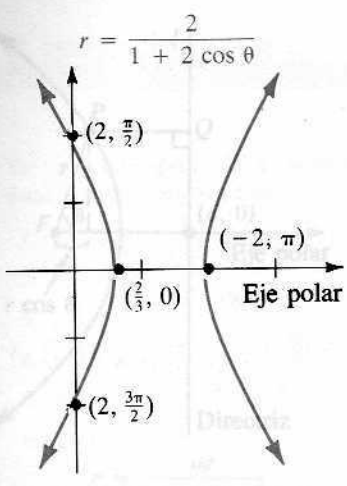


FIGURA 87

Solución. Puesto que esta ecuación tiene la forma estándar de $r = ed/(1 + e\cos\theta)$, vemos que $e = 2$. Concluimos que la ecuación describe una hipérbola. Encontramos y ubicamos los intersectos $(2/3, 0)$, $(2, \pi/2)$, $(-2, \pi)$, y $(2, 3\pi/2)$. La presencia de los términos $\cos\theta$ indica que el eje transverso es horizontal. Esto identifica a $(2/3, 0)$ y $(-2, \pi)$ como los vértices. A partir de esto obtenemos un bosquejo de la gráfica, como se muestra en la figura 87.

EJEMPLO 4

Bosqueje la gráfica de

$$r = \frac{1}{2 - 2\cos\theta}$$

Solución. Para obtener la forma apropiada, dividimos el numerador y el denominador por 2, y obtenemos

$$r = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \cos\theta}$$

Así, $e = 1$, y la gráfica es una parábola con foco en el polo. Los puntos correspondientes a los intersectos x y y se obtienen de la tabla siguiente. Note que no hay punto correspondiente a $\theta = 0$, puesto que el denominador $1 - \cos\theta = 0$ en este valor. El término $\cos\theta$ indica que el eje de la parábola es horizontal y así $(1/4, \pi)$ es el vértice de la parábola (véase figura 88).

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

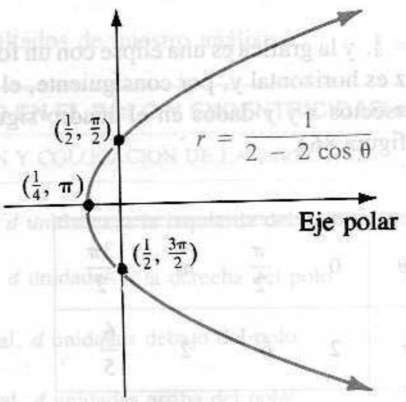
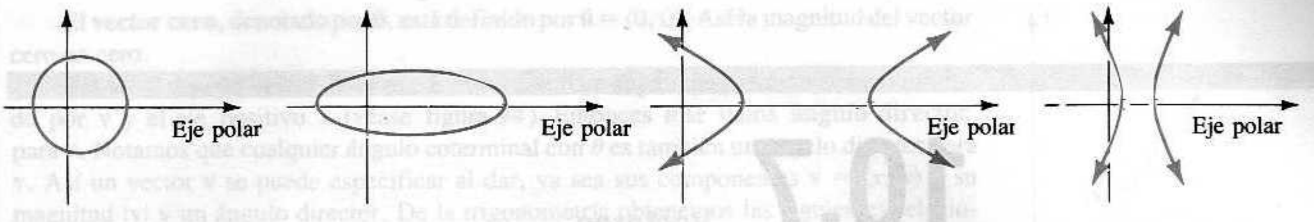


FIGURA 88

La excentricidad de una elipse (o una hipérbola) puede también definirse como la razón de la distancia entre los focos y la longitud del eje mayor (o del eje transverso). Con la notación expuesta en la sección 10.2 (o 10.3), ésta es equivalente a $e = c/a$ (véase problema 28).

La magnitud de la excentricidad de una elipse o de una hipérbola determina su forma. La gráfica de una elipse es casi circular si e se acerca a 0; pero la elipse se alarga si e se acerca a 1. Véanse figuras 89(a) y (b), respectivamente. Para la hipérbola, si e está cerca de 1, sus ramas tienen una abertura estrecha, pero si e es mucho más grande que 1, sus ramas se abren ampliamente. Véanse figuras 89(c) y (d), respectivamente.



(a) e cerca de 0 (b) e cerca de 1 (c) e cerca de 1 (d) e mucho más grande que 1

FIGURA 89

EJERCICIO 10.6

En los problemas 1 al 10, determine la excentricidad, identifique la sección cónica y haga un bosquejo de su gráfica.

1. $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$ **2.** $r = \dfrac{1}{2-\operatorname{sen}\theta}$

3. $r = \dfrac{8}{2+\cos\theta}$ **4.** $r = \dfrac{4}{3+3\operatorname{sen}\theta}$

5. $r = \dfrac{1}{1+2\cos\theta}$ **6.** $r = \dfrac{-2}{\operatorname{sen}\theta - 1}$

7. $r = \dfrac{8}{2-4\cos\theta}$ **8.** $r = \dfrac{3\csc\theta}{2\csc\theta+1}$

9. $r = \dfrac{4\sec\theta}{\sec\theta+1}$ **10.** $r = 2\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)$

En los problemas 11 al 16, encuentre una ecuación polar de la sección cónica con un foco en el polo y la excentricidad y la directriz dada.

11. $e = 1, r = \dfrac{2}{\operatorname{sen}\theta}$ **12.** $e = 5/2, r = \dfrac{3}{\cos\theta}$

13. $e = 1/3, r = -2\sec\theta$ **14.** $e = 1/4, r = 3\csc\theta$

15. $e = 3, r = 6\csc\theta$ **16.** $e = 1, r = -2\sec\theta$

En los problemas 17 al 20, convierta la forma polar dada de una sección cónica en una ecuación cartesiana. Verifique en cada caso que $e = c/a$.

17. $r = \dfrac{4}{1+2\cos\theta}$ **18.** $r = \dfrac{12}{2-3\operatorname{sen}\theta}$

19. $r = \dfrac{18}{3-2\operatorname{sen}\theta}$ **20.** $r = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\cos\theta}$

En los problemas 21 al 26, encuentre una ecuación polar de la parábola con foco en polo y vértice dado.

21. $(1/2, \pi/2)$ **22.** $(3, \pi)$ **23.** $(2, 3\pi/2)$

24. $(4, 0)$ **25.** $(1/3, \pi)$ **26.** $(5/2, \pi/2)$

27. Completando el cuadrado para x en la ecuación (40), demuestre que la gráfica de $r = de/(1 - e\cos\theta)$ es una elipse si $0 < e < 1$, y una hipérbola si $e > 1$.

28. Identifique a, b y c en las ecuaciones cartesianas de las secciones cónicas encontradas en el problema 27. Demuestre que $e = c/a$.

29. Si la órbita de un satélite alrededor de la Tierra es una elipse con la Tierra en un foco, entonces una ecuación de la órbita es dada por

$$r = \frac{ed}{1-e\cos\theta},\ 0 < e < 1$$

Si rp designa la longitud de r en su perigeo (el punto sobre la órbita del satélite que está más cerca de la Tierra), y ra designa la longitud de r en su apogeo (el punto sobre la órbita del satélite que está más lejos de la Tierra), demuestre que la excentricidad de la órbita está dada por

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

(véase figura 90)

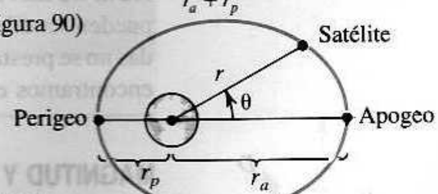


FIGURA 90

30. Un satélite de comunicaciones está a 20,000 km del centro de la Tierra en su perigeo. Si la excentricidad de su órbita es 0.2, encuentre su distancia más lejana del centro de la Tierra. [*Sugerencia*: use el resultado del problema 29].

31. Determine una ecuación polar de la órbita del satélite en el problema 30. [*Sugerencia*: el apogeo corresponde a $\theta = 0$].

32. Las órbitas de los nueve planetas alrededor del Sol, excepto por perturbaciones menores, son elipses con el Sol en un foco. Las órbitas de siete de los nueve planetas tienen excentricidades menores que 0.01 y, por consiguiente, son casi circulares. Las excepciones son Mercurio y Plutón, los cuales tienen excentricidades 0.206 y 0.249, respectivamente. Examine las formas de estas dos órbitas haciendo el bosquejo de la gráfica de $r = ed/(1 - e\cos\theta)$ para $e = 0.2$ y para $e = 0.25$. Sea $d = 10$.

33. Muchos asteroides tienen órbitas elípticas. Bosqueje la forma de la gráfica de la órbita del asteroide Hidalgo para el cual $e \approx 0.7$. Use $r = ed/(1 - e\cos\theta)$ con $d = 1$.

34. Muestre que un círculo de radio R y centro (R, α) tiene ecuación polar $r = 2R\cos(\theta - \alpha)$. [*Sugerencia*: use la ley de coseno].

35. Un punto P se mueve de tal forma que su distancia al polo es siempre igual a su distancia a la recta $r\operatorname{sen}\theta = 4$. ¿Cuál es una ecuación polar de la curva resultante? ¿Cuál es el nombre de la curva que describe?

36. Sean A, A' dos puntos fijos con coordenadas polares $(c, 0)$ $(-c, 0)$. Un punto P se mueve de tal forma que el producto de sus distancias de A y A' es igual a la constante C^2. Encuentre una ecuación polar de la forma $r^2 = f(0)$ que describa la curva resultante y haga su gráfica.

10.7 Vectores

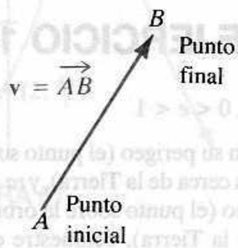


FIGURA 91

Para describir ciertas cantidades físicas con precisión, debemos tener dos datos: una magnitud y una dirección. Por ejemplo, cuando analizamos el vuelo de un aeroplano, tanto su velocidad como su dirección son importantes. Cantidades que incluyen a la vez magnitud y dirección se representan por **vectores.** Como vemos en la figura 91, un vector está frecuentemente descrito como un segmento de recta dirigido, es decir, un segmento de recta con una dirección especificada por una flecha. Usamos letras en negrita, tales como **v** o **w**, para denotar vectores. Si un vector se extiende de un punto A a un punto B con una flecha direccional en B, entonces A se llama **punto inicial** y B **punto final.** El vector se denota como $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$.

Nota de advertencia: se debe deducir de este análisis que todas las cantidades vectoriales pueden ser dibujadas con flechas. Muchas aplicaciones de vectores en matemáticas avanzadas no se prestan para esta interpretación. Sin embargo, para nuestro propósito en este texto, encontramos esta interpretación a la vez conveniente y útil.

MAGNITUD Y DIRECCION

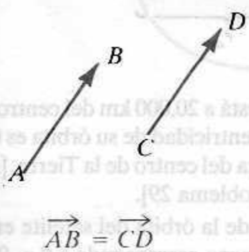


FIGURA 92

La longitud del segmento de recta dirigido se llama **magnitud** del vector $\overrightarrow{AB}$ y se denota con $|\overrightarrow{AB}|$. Se dice que dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **iguales,** lo cual se escribe

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

si tienen ambos la misma magnitud y dirección, como se muestra en la figura 92. Así los vectores pueden trasladarse de una posición a otra siempre que ni la magnitud ni la dirección se cambien.

En esta sección consideraremos solamente los vectores que están en el mismo plano coordenado. Puesto que podemos mover un vector sin que su magnitud y dirección se cambien, podemos colocar el punto inicial en el origen. Entonces, como se muestra en la figura 93, el punto terminal P tendrá coordenadas rectangulares (x, y). Por el contrario, cada par ordenado de números reales (x, y) determina un vector $\overrightarrow{OP}$, donde P tiene coordenadas rectangulares (x, y). Así tenemos una correspondencia uno a uno entre vectores y pares ordenados de números reales. Decimos que $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ es el **vector de posición** del punto $P(x, y)$. Los números x y y se llaman **componentes** de $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$, y escribimos

$$\mathbf{v} = \langle x, y \rangle$$

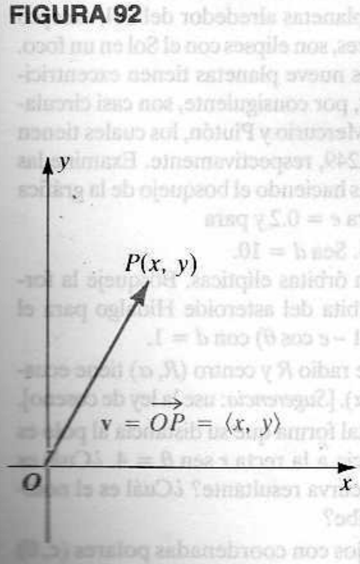


FIGURA 93

Para evitar confundir el vector $\langle x, y\rangle$ con el punto $P(x, y)$, usaremos paréntesis especiales $\langle\ \rangle$ para denotar el vector. Puesto que la magnitud de $\langle a, b\rangle$ es la distancia de (a, b) al origen, tenemos el siguiente resultado.

Magnitud

La **magnitud** $|\mathbf{v}|$ del vector $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ es

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

El **vector cero,** denotado por **0**, está definido por $\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle$. Así la magnitud del vector cero es cero.

Sea $\mathbf{v} = \langle x, y\rangle$ un vector diferente de cero. Sea θ un ángulo en posición normal formado por $\mathbf{v}$ y el eje positivo x (véase figura 94). Entonces θ se llama **ángulo director** para **v.** Notamos que cualquier ángulo coterminal con θ es también un ángulo director para **v.** Así un vector **v** se puede especificar al dar, ya sea sus componentes $\mathbf{v} = \langle x, y\rangle$ o su magnitud $|\mathbf{v}|$ y un ángulo director. De la trigonometría obtenemos las siguientes relaciones.

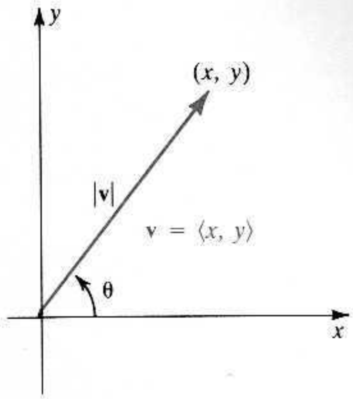


FIGURA 94

Angulo director

Para cualquier vector diferente de cero $\mathbf{v} = \langle x, y\rangle$ con **ángulo director** θ:

$$\cos\theta = \frac{x}{|\mathbf{v}|} \quad \text{o} \quad x = |\mathbf{v}|\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|\mathbf{v}|} \quad \text{o} \quad y = |\mathbf{v}|\operatorname{sen}\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \text{ si } \quad x \neq 0$$

donde $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y_2}$.

Al vector cero no se le asigna ninguna dirección.

EJEMPLO 1

Bosqueje cada uno de los siguientes vectores. Encuentre la magnitud y el menor ángulo director positivo θ de cada vector.

(a) $\mathbf{v} = \langle -2, 2\rangle$
(b) $\mathbf{u} = \langle 0, 3\rangle$
(c) $\mathbf{w} = \langle 1, -\sqrt{3}\rangle$

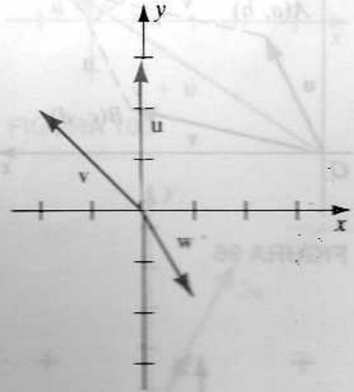


FIGURA 95

Solución. Los vectores se bosquejan en la figura 95. Esto nos ayudará a encontrar los ángulos directores deseados.

(a) Del análisis anterior tenemos

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

y

$$\tan\theta = \frac{2}{-2} = -1$$

Puesto que θ es un ángulo en el cuadrante **II** (figura 95), concluimos que $\theta = 3\pi/4$.

(b) La magnitud de **u** es $|\mathbf{u}| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$ y con base en la figura 96 vemos que $\theta = \pi/2$.

(c) La magnitud de **w** es $|\mathbf{w}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{4} = 2$. Puesto que $\tan\theta = -\sqrt{3}$ y θ es un ángulo en el cuadrante IV, tomamos $\theta = 5\pi/3$.

OPERACIONES CON VECTORES

Hay una variedad de operaciones con vectores. Definiremos la **suma,** la **resta** y la **multiplicación por escalar.**

Operaciones con vectores

Sean los vectores $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$, y sea k cualquier número real. Definimos la:

Suma: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a + c,\ b + d\rangle$;
Resta: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle a - c,\ b - d\rangle$;
Multiplicación por escalar: $k\mathbf{u} = \langle ka,\ kb\rangle$.
el vector $k\mathbf{u}$ se denomina múltiplo escalar del vector $\mathbf{u}$.

Estas operaciones satisfacen las siguientes propiedades.

Propiedades de los vectores

(i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
(ii) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
(iii) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
(iv) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$
(v) $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0}$
(vi) $0\mathbf{u} = \mathbf{0},\ 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

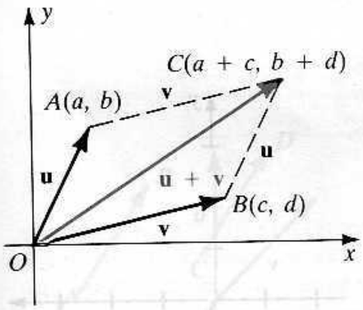


FIGURA 96

EJEMPLO 2

Si $\mathbf{u} = \langle 2, 1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 5\rangle$ encuentre $4\mathbf{u}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, y $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$

Solución. A partir de las definiciones de suma, resta y multiplicación por escalar de vectores, encontramos

$$4\mathbf{u} = 4\langle 2, 1\rangle = \langle 8, 4\rangle$$
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle + \langle -1, 5\rangle = \langle 1, 6\rangle$$
$$3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = 3\langle 2, 1\rangle - 2\langle -1, 5\rangle = \langle 6, 3\rangle - \langle -2, 10\rangle = \langle 8, -7\rangle$$

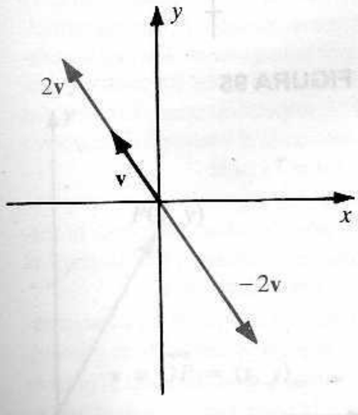


FIGURA 97

INTERPRETACIONES GEOMETRICAS

La suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ de dos vectores se puede interpretar geométricamente así: si $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$, entonces $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ se pueden representar por los segmentos de recta dirigidos del origen a los puntos $A(a, b)$, $B(c, d)$, y $C(a + c, b + d)$, respectivamente. Como se muestra en la figura 96, si el vector $\mathbf{v}$ se traslada para que su punto inicial sea A, entonces su punto terminal será C. Así, una representación geométrica de la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ se puede obtener colocando el punto inicial de $\mathbf{v}$ sobre el punto terminal de $\mathbf{u}$ y dibujando el vector del punto inicial de $\mathbf{u}$ al punto terminal de $\mathbf{v}$. Al examinar las coordenadas del cuadrilátero $OACB$ en la figura 96, vemos que es un peralelogramo formado por los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ con $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ como una de sus diagonales.

Ahora consideramos múltiplos escalares del vector $\mathbf{v} = \langle x, y\rangle$. Sea k cualquier número real; entonces

$$|k\mathbf{v}| = \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} = \sqrt{k^2(x^2 + y^2)}$$
$$= \sqrt{k^2}\sqrt{x^2 + y^2} = |k|\sqrt{x^2 + y^2} = |k||\mathbf{v}|$$

Hemos obtenido la siguiente propiedad de multiplicación por escalar

$$|k\mathbf{v}| = |k||\mathbf{v}|$$

Esta propiedad establece que en la multiplicación por escalar de un vector **v** por un número real k, la magnitud de **v** se multiplica por $|k|$. Como se muestra en la figura 97, si $k > 0$ la dirección de **v** no cambia; pero si $k < 0$, la dirección de **v** se revierte. En particular, **v** y $-$ **v** tienen la misma longitud, pero direcciones opuestas.

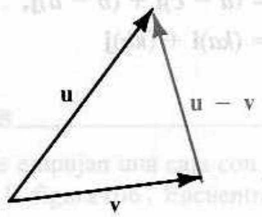


FIGURA 98

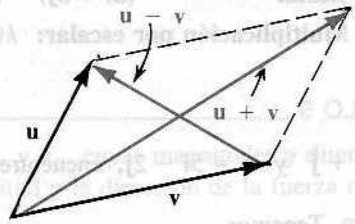


FIGURA 99

La interpretación geométrica de la diferencia $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ de dos vectores se obtiene observando que

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v})$$

Así $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es el vector que, cuando se suma a **v**, produce **u**. Como vemos en la figura 98, el punto inicial de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ será en el punto terminal de **v** y el punto terminal de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ coincide con el punto terminal de **u**. Por consiguiente, el vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es una diagonal del paralelogramo determinado por **u** y **v** como la otra diagonal (véase figura 99).

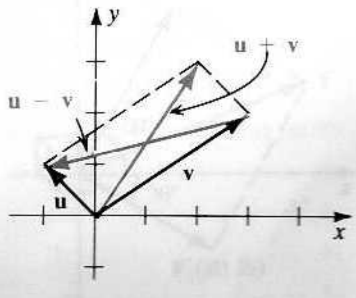


FIGURA 100

EJEMPLO 3

Sea $\mathbf{u} = \langle -1, 1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 3, 2\rangle$. Bosqueje las interpretaciones geométricas de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Solución. Formamos el paralelogramo determinado por los vectores **u** y **v** e identificamos las diagonales $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, como se muestra en la figura 100.

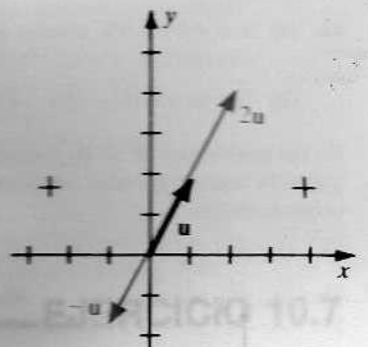


FIGURA 101

EJEMPLO 4

Sea $\mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle$. Las interpretaciones geométricas de $2\mathbf{u}$ y $-\mathbf{u}$ se muestran en la figura 101.

VECTORES UNITARIOS

Cualquier vector con magnitud 1 se llama **vector unitario.** Los vectores unitarios en la dirección de los ejes positivos x y y se denotan

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$$

Véase figura 102.

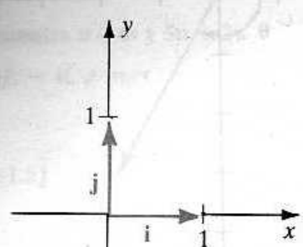


FIGURA 102

Los vectores unitarios **i** y **j** nos suministran otra manera de denotar vectores. Si $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$, entonces

$$\mathbf{u} = \langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle = a\langle 1, 0\rangle + b\langle 0, 1\rangle$$

o

$$\mathbf{u} = \langle a, b\rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

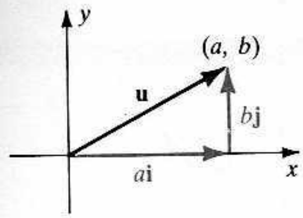


FIGURA 103

Como se muestra en la figura 103, puesto que **i** y **j** son vectores unitarios, los vectores $a\mathbf{i}$ y $b\mathbf{j}$ son vectores horizontales y verticales de longitud $|a|$ y $|b|$, respectivamente. Por esta razón, a se llama **componente horizontal** de **u**, y b se llama **componente vertical.** Se dice que el vector $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es una **combinación lineal** de **i** y **j**. Usando esta notación para los vectores $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$, podemos escribir la definición de la suma, la resta y la multiplicación por escalar de **u** y **v** como sigue:

Suma: $(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) + (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) = (a + c)\mathbf{i} + (b + d)\mathbf{j}$,

Resta: $(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) - (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) = (a - c)\mathbf{i} + (b - d)\mathbf{j}$,

Multiplicación por escalar: $k(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) = (ka)\mathbf{i} + (kb)\mathbf{j}$

EJEMPLO 5

Si $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, encuentre $4\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} 4\mathbf{u} - 2\mathbf{v} &= 4(3\mathbf{i} + \mathbf{j}) - 2(5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \\ &= (12\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) - (10\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \\ &= 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} \end{aligned}$$

LA FORMA POLAR DE UN VECTOR

Hay todavía otra manera de representar vectores. Para un vector diferente de cero $\mathbf{v} = \langle x, y\rangle$ con ángulo director θ recordamos que $x = |\mathbf{v}| \cos\theta$ y $y = |\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta$.

Así,

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = |\mathbf{v}| \cos\theta\mathbf{i} + |\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$$

o

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}|(\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j})$$

Esta última representación se llama **forma polar** de **v** o **forma trigonométrica** de **v**.

EJEMPLO 6

Exprese $\mathbf{v} = \sqrt{3}\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ en forma polar.

Solución. Para escribir **v** en forma polar, debemos encontrar la magnitud $|\mathbf{v}|$ y el ángulo director θ. Encontramos

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

y

$$\tan\theta = -3/\sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

Para determinar θ, bosquejamos **v** para encontrar que θ es un ángulo en el cuadrante IV (véase figura 104). Así $\theta = 5\pi/3$, y en forma polar,

$$\mathbf{v} = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3}\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\mathbf{j}\right)$$

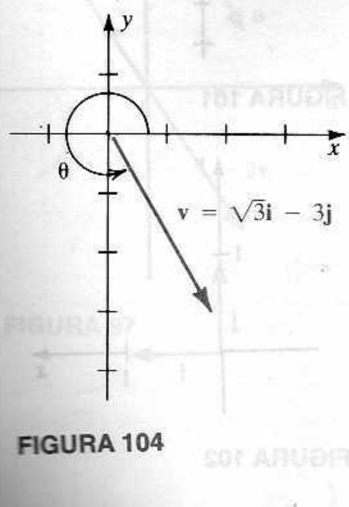


FIGURA 104

EJEMPLO 7

Dado que un aeroplano está volando a 200 mph con una orientación N 20° E, exprese su velocidad como un vector.

Solución. El vector deseado **v** se muestra en la figura 106. Puesto que $\theta = 90° - 20° = 70°$ y $|\mathbf{v}| = 200$, tenemos

$$\mathbf{v} = 200(\cos 70°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 70°\mathbf{j}) \approx 68.4\mathbf{i} + 187.9\mathbf{j}$$

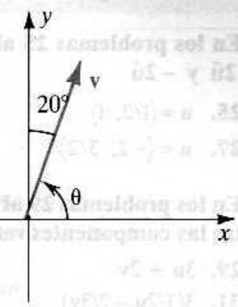


FIGURA 105

En física se demuestra que, cuando dos fuerzas actúan simultáneamente en el mismo punto P sobre un objeto, el objeto reacciona como si una sola fuerza igual a la suma vectorial de las dos fuerzas estuviera actuando sobre el objeto en P. Esta fuerza única se llama **fuerza resultante.**

EJEMPLO 8

Dos personas empujan una caja con fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, cuyas magnitudes y direcciones se muestran en la figura 106. Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.

Solución. A partir de la figura 106, vemos que los ángulos directores para las dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son $\theta_1 = 60°$ y $\theta_2 = 330°$, respectivamente, así,

$$\mathbf{F}_1 = 100(\cos 60°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 60°\mathbf{j}) = 50\mathbf{i} + 50\sqrt{3}\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{F}_2 = 80(\cos 330°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 330°\mathbf{j}) = 40\sqrt{3}\mathbf{i} - 40\mathbf{j}$$

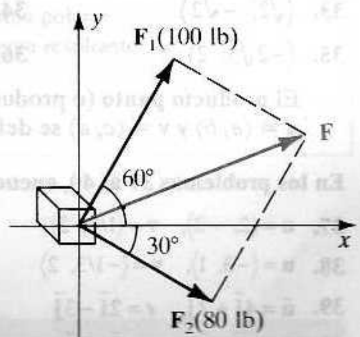


FIGURA 106

La fuerza resultante **F** puede, entonces, encontrarse por el vector suma

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 &= (50\mathbf{i} + 50\sqrt{3}\mathbf{j}) + (40\sqrt{3}\mathbf{i} - 40\mathbf{j}) \\ &= (50 + 40\sqrt{3})\mathbf{i} + (50\sqrt{3} - 40)\mathbf{j}\end{aligned}$$

Así la magnitud $|\mathbf{F}|$ de la fuerza resultante es

$$\mathbf{F} = \sqrt{(50 + 40\sqrt{3})^2 + (50\sqrt{3} - 40)^2} \approx 128.06$$

Si θ es un ángulo director para **F**, entonces

$$\tan \theta = (50\sqrt{3} - 40)/(50 + 40\sqrt{3}) \approx 0.3907$$

Puesto que θ es un ángulo en el cuadrante I, hallamos que

$$\theta \approx 21.34°$$

EJERCICIO 10.7

En los problemas 1 al 8 bosqueje el vector dado. Encuentre la magnitud y el menor ángulo director positivo de cada vector.

1. $(\sqrt{3}, -1)$ **2.** $(-3, 3)$

3. $(5, 0)$ **4.** $(-2\sqrt{3}, 2)$

5. $-4\mathrm{i} + 4\sqrt{3}\mathrm{j}$ **6.** $2\mathrm{i} - 2\mathrm{j}$

7. $-10\mathrm{i} + 10\mathrm{j}$ **8.** $-6\mathrm{j}$

En los problemas 9 al 14, encuentre $u + v$, $u - v$, $-3u$ y 3u – 4v.

9. $\mathbf{u} = \langle -1, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 4\rangle$

10. $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$

11. $\mathbf{u} = \langle -2, 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, -2\rangle$

12. $\mathbf{u} = \langle 3, -6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -3\rangle$

13. $\mathbf{u} = \langle 1/3, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, -1/4\rangle$

14. $\mathbf{u} = \langle -1.2, 2.2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2.1, -1.3\rangle$

En los problemas 15 al 20, encuentre u – 4v y 5u + 2v.

15. $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$, $\mathbf{v} = -\bar{i} + 2\bar{j}$

16. $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j}$, $\mathbf{v} = -\frac{1}{2}\bar{i} - 2\bar{j}$

17. $\bar{u} = -2\bar{i} - \frac{1}{5}\bar{j}$, $v = \frac{1}{4}\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j}$

18. $\mathbf{u} = 0.1\bar{i} + 0.2\bar{j}$, $v = -0.5\bar{i} + 1.5\bar{j}$

19. $\mathbf{u} = 4\bar{i} + 0.8\bar{j}$, $\mathbf{v} = 2\bar{j}$

20. $\mathbf{u} = 3\bar{i}$, $\mathbf{v} = -\bar{j}$

En los problemas 21 al 24, bosqueje las interpretaciones geométricas de u + v y u – v.

21. $\mathbf{u} = 3\bar{i} + \bar{j}$, $\mathbf{v} = \bar{i} - \bar{j}$ **22.** $\mathbf{u} = -\bar{i} + 2\bar{j}$, $\mathbf{u} = 2\bar{i} + \bar{j}$

23. $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $v = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ **24.** $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $v = -\vec{i} + 3\vec{j}$

En los problemas 25 al 28, bosqueje las interpretaciones de $2\vec{u}$ y $-2\vec{u}$

25. $u = \langle 1/2, 1\rangle$ **26.** $\langle -1, -1/2\rangle$

27. $u = \langle -2, 3/2\rangle$ **28.** $\langle 2, -1\rangle$

En los problemas 29 al 32, si $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ y $v = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, encuentre las componentes vertical y horizontal del vector indicado.

29. $3u + 2v$ **30.** $-3/2u + v$

31. $3(1/2u - 2/3v)$ **32.** $2(-u - 2v)$

En los problemas 33 al 36, exprese el vector dado (a) en la forma polar y (b) como una combinación lineal de los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$.

33. $\langle\sqrt{2}, -\sqrt{2}\rangle$ **34.** $\langle 4, 4\sqrt{3}\rangle$

35. $\langle -2\sqrt{3}, 2\rangle$ **36.** $\langle -2, -2\rangle$

El **producto punto** (o producto escalar) de dos vectores $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$ se define por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ac + bd$

En los problemas 37 al 40, encuentre el producto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

37. $u = \langle 2, -3\rangle$, $v = \langle 1/2, 2\rangle$

38. $u = \langle -3, 1\rangle$, $v = \langle -1/3, 2\rangle$

39. $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, $v = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

40. $\vec{u} = -\vec{i} - \vec{j}$, $v = -\vec{i} - 3\vec{j}$

41. Demuestre que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre **u** y **v**.

42. **(a)** Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, pruebe que **u** y **v** son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

(b) Pruebe que $5\vec{i} - 4\vec{j}$ y $\frac{1}{5}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j}$ son perpendiculares.

En los problemas 43 al 46, encuentre el ángulo (aproximado hasta la centésima más cercana de grado) entre el par de vectores dados.

43. $\langle 2, 3\rangle$; $\langle -1, 2\rangle$ **44.** $\langle 1, 6\rangle$; $\langle 2, 4\rangle$

45. $2\vec{i} - 2\vec{j}$; $5\vec{i} + \vec{j}$ **46.** $2\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{j} - 2\vec{j}$

47. Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de magnitudes 12 kg y 18 kg respectivamente, actúan sobre un punto. Si el ángulo entre las fuerzas es de 51°, encuentre la magnitud de la fuerza resultante **F** y del ángulo entre **F** y $\mathbf{F}_1$.

48. La resultante **F** de dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ tiene una magnitud de 60 kg y dirección, como se muestra en la figura 107. Si $\mathbf{F}_1 = -120\,\vec{i}$, encuentre las componentes horizontal y vertical de $\mathbf{F}_2$.

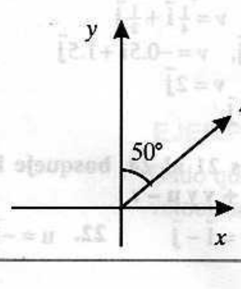


FIGURA 107

49. Un peso de 40 libras está colgado de una cuerda. Una fuerza de 8 libras se aplica horizontalmente al peso moviendo la cuerda de su posición horizontal (véase figura 108). Encuentre la resultante de esta fuerza y la fuerza debida a la gravedad.

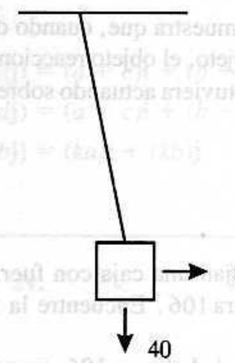


FIGURA 108

50. Un bote se orienta hacia el este en una corriente de agua que fluye hacia el norte con rapidez de 1.6 millas/hora. Si el bote se desplaza a 3 millas/hora, determine la velocidad y el curso en que viaja el bote.

51. Un avión se orienta a N28°E con una rapidez de 375 millas/hora. Si el viento sopla hacia el oeste a 26 millas/hora, determine el curso y rapidez absoluta del avión.

52. Un tren de carga que viaja a 12 millas/hora pasa por un desembarcadero y lanza un saco de correo perpendicularmente a una velocidad de 18 pies/seg. ¿En qué dirección cae el saco sobre el desembarcadero?

53. Un objeto en reposo está en equilibrio estático. Para que un objeto esté en equilibrio estático es necesario que la suma de todas las componentes horizontales, así como la suma de todas las componentes verticales de las fuerzas que actúan sobre el objeto se anulen. Considere el siguiente diagrama de fuerzas (figura 109), que representa un peso de 100 kg colgante de dos cables en los ángulos indicados. Si la tensión de *OA* es 50 kg, ¿cómo debe ser la tensión en *OB* para mantener el objeto en equilibrio estático?

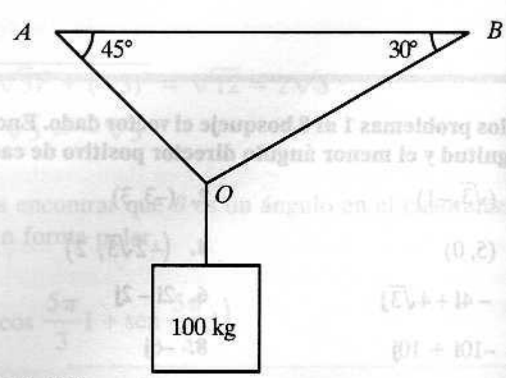


FIGURA 109

54. Un barco sale de un puerto y navega 20 millas en dirección noreste, luego 30 millas hacia el oeste y posteriormente 40 millas hacia el sudeste. ¿A qué distancia y en qué dirección se encuentra del puerto?

CONCEPTOS IMPORTANTES

Sección cónica
Parábola
- foco
- directriz
- eje
- vértice

Elipse
- focos
- centro
- eje mayor
- eje menor
- vértices

Hipérbola
- focos
- centro
- ramas
- eje transverso
- vértices
- eje conjugado
- asíntotas
- rectángulo auxiliar

Traslación de ejes
- ecuaciones de traslación

Rotación de ejes
- ecuaciones de rotación

Sistema de coordenadas polares
- polo
- eje polar
- coordenadas polares
- gráficas polares

Ecuaciones polares de las secciones cónicas
- excentricidad

Vectores
- punto inicial
- punto final
- magnitud
- vector de posición
- componentes
- vector cero
- ángulo director
- suma
- diferencia
- multiplicación por escalar
- vector unitario
- combinación lineal
- forma polar
- fuerza resultante

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 10, conteste verdadero o falso.

1. La parábola $y^2 = -8x$ tiene un eje horizontal. ________
2. Los focos de una hipérbola están en su gráfica. ________
3. La excentricidad de una elipse es siempre menor que 1. ____
4. Si el origen del sistema XY está en el punto $(-3, 2)$ en el sistema xy, entonces el punto $(-1, 1)$ en el sistema xy se representa en el sistema XY por $(-4, 3)$. ________
5. El punto $(1, \pi)$ en coordenadas polares representa el mismo punto que $(-1, 0)$ en coordenadas cartesianas. ________
6. La gráfica de $r(1 + \operatorname{sen}\theta) = 1$ es una parábola con eje horizontal. ________
7. En una hipérbola el eje transverso es siempre mayor que el eje conjugado. ________
8. La excentricidad de una hipérbola es siempre mayor que 1. ________
9. Si **u** es un vector con ángulo director θ, entonces su componente horizontal es $|\mathbf{u}| \operatorname{sen}\theta$. ________
10. Las longitudes de las diagonales del paralelogramo determinado por **u** y **v** son $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$ y $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$. ________

En los problemas 11 al 14, encuentre el vértice, el foco, la directriz y el eje de la parábola dada y bosqueje su gráfica.

11. $(x-2)^2 = -4y$
12. $4(y+2)^2 = x-1$
13. $y^2 - 2y + 4x + 1 = 0$
14. $x^2 + 10x + 8y + 41 = 0$

En los problemas 15 al 18, encuentre una ecuación cartesiana de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

15. Foco $(-1, 2)$, directriz $x = -5$
16. Foco $(-2, 2)$, vértice $(-2, 0)$
17. Vértice $(2, 1)$, eje horizontal y pasa por $(5, 4)$
18. Vértice $(-4, -1)$, directriz $y = 2$

En los problemas 19 al 22, encuentre el centro, los vértices y los focos de la elipse dada y bosqueje su gráfica.

19. $\dfrac{(x+3)^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
20. $\dfrac{(x+1)^2}{12} + \dfrac{(y-2)^2}{8} = 1$
21. $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$
22. $9x^2 + 5y^2 + 54x - 20y + 56 = 0$

En los problemas 23 al 26, encuentre una ecuación cartesiana de la elipse que satisfaga las condiciones dadas.

23. Vértice $(\pm 4, 0)$, focos $(0, \pm 5)$
24. Focos $(-1 \pm \sqrt{3}, 2)$, vértice $(-1, 4)$
25. Los vértices $(-2, \pm 2)$ y pasa por el punto $\left(-2 + \sqrt{3}/2,\ 1\right)$
26. El centro $(4, 2)$, un foco $(1, 2)$, un vértice $(0, 2)$

En los problemas 27 al 30, encuentre el centro, los vértices, los focos y las asíntotas de la hipérbola dada y bosqueje su gráfica.

27. $(x-2)(x+2)=y^2$

28. $x^2-\dfrac{(y+3)^2}{4}=1$

29. $-x^2+9y^2-2x-54y+71=0$

30. $16x^2-9y^2-64x-80=0$

En los problemas 31 al 34, encuentre una ecuación cartesiana de la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas.

31. Un centro (0, 0), un vértice (6, 0) y un foco (8, 0)

32. Los focos $(\pm 3, 2)$ y un vértice $(-3/2, 2)$

33. Los focos $(\pm 2\sqrt{5},\ 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$

34. Vértices (2, –3), (4, –3), un foco $(3+\sqrt{2},\ -3)$

35. Exprese la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 6 = 0$ en términos del sistema XY, donde el origen del sistema XY está en el punto (–1, 5) en el sistema xy.

36. Exprese la ecuación $X - 3Y = 0$ en términos del sistema xy, donde el origen del sistema XY está en el punto (2, 4) en el sistema xy.

En los problemas 37 y 38, use una traslación de los ejes para analizar y bosquejar la gráfica de la ecuación dada.

37. $x^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ **38.** $x^2 - 14x + y^2 - 8y - 66 = 0$

En los problemas 39 y 40, realice una rotación apropiada de ejes para que la ecuación resultante $x'y'$. Bosqueje la gráfica.

39. $x \cdot y = -8$ **40.** $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 40$

En los problemas 41 y 42, encuentre las coordenadas polares que satisfacen (a) $r > 0, -\pi < \theta \le \pi$ (b) $r < 0, -\pi < \theta \le \pi$, para cada punto con las coordenadas rectangulares dadas.

41. $(3,\ -\sqrt{3})$ **42.** (1/2, –1/2)

En los problemas 43 al 46, aplique las pruebas para simetría y haga la gráfica de la ecuación polar dada.

43. $r \cos\theta = 5$ **44.** $\theta = \pi/3$

45. $r = 4 - 4\cos\theta$ **46.** $r = 2\operatorname{sen} 6\theta$

En los problemas 47 al 50, determine la excentricidad, identifique la sección cónica y bosqueje su gráfica.

47. $r = \dfrac{16}{1-\operatorname{sen}\theta}$ **48.** $r = \dfrac{12}{2-4\operatorname{sen}\theta}$

49. $r = \dfrac{8}{4+\cos\theta}$ **50.** $r = \dfrac{3\sec\theta}{\sec\theta+1}$

En los problemas 51 y 52, convierta la sección cónica dada de la forma polar a la cartesiana. Verifique que $e = c/a$ en cada caso.

51. $r = \dfrac{2}{1+4\operatorname{sen}\theta}$ **52.** $r = \dfrac{4}{1-\cos\theta}$

En los problemas 53 al 56, encuentre el vector indicado si $\mathbf{u} = \langle -5, 2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 3, -4\rangle$

53. $-\mathbf{u}$ **54.** $\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

55. $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ **56.** $2\mathbf{u} - 4\mathbf{v}$

En los problemas 57 al 60, encuentre la magnitud y el menor ángulo director θ positivo del vector dado.

57. $\langle \sqrt{3}, -3\rangle$ **58.** $\langle -\pi, \pi\rangle$

59. $2(\mathbf{i}-\mathbf{j})$ **60.** $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2(\mathbf{i}-\mathbf{j})$

En los problemas 61 y 62, encuentre las componentes horizontal y vertical del vector indicado si $\vec{u} = \mathbf{i} + 4\vec{j}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$

61. $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ **62.** $3(4\mathbf{u} + \mathbf{v})$

En los problemas 63 y 64, exprese el vector dado como una combinación lineal de los vectores unitarios i y j.

63. $\langle 4, -2\rangle$ **64.** $\langle 10, -3\rangle$

En los problemas 65 y 66, exprese el vector dado en forma polar.

65. $\langle \sqrt{15}, \sqrt{5}\rangle$ **66.** $\langle 0, -2\rangle$

67. El faro delantero de un automóvil está diseñado de tal forma que una sección longitudinal a través de su eje es una parábola y la fuente de luz está en el foco. Encuentre la colocación de la fuente de luz, si el faro delantero tiene 6 pulgadas a través y 2 pulgadas de profundidad.

68. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en B; C y B son los focos de una elipse y A está sobre la elipse. Si $\overline{AB} = 6$ y $\overline{BC} = 8$, determine las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse.

69. Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ actúan en un punto tal que la fuerza resultante $\mathbf{F}$ tiene una magnitud de 5 lb y es perpendicular a $\mathbf{F}_1$. Si $|\mathbf{F}_1| = 5$ lb, encuentre la magnitud de $\mathbf{F}_2$ y el ángulo entre $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$.

70. Encuentre una ecuación de la elipse inscrita en el rectángulo auxiliar de la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ (véase figura 110).

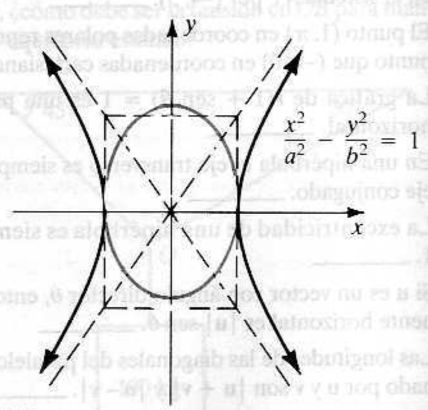


FIGURA 110

71. Para la ecuación $2x^2 - 4xy - y^2 + 20x - 2y + 17 = 0$

(a) Rote los ejes a un sistema $x'y'$ para que el término $x'y'$ desaparezca y

(b) traslade los ejes para que los términos de 1$^{\text{er}}$ grado se eliminen.

11

Sucesiones, series y probabilidad

Blaise Pascal

Este capítulo podría haberse titulado "Matemáticas discretas", puesto que cada uno de los temas que consideraremos —sucesiones, series, inducción, teorema del binomio, conteo y probabilidad— dependen de una manera especial sólo de un conjunto de números enteros. Por ejemplo, veremos en la sección 11.1 que sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos.

Cuando estudiemos probabilidad en la sección 11.6 dejamos el mundo de la certeza. En la vida un acontecimiento puede suceder o no. Cuando lanzamos una moneda al aire, existe la misma probabilidad de que caiga cara o sello. Si se nos preguntara: "¿aparecerá cara si se lanza la moneda?", nuestra mejor respuesta sería: "hay 50-50 de probabilidades de que aparezca cara". En una terminología matemática más precisa, la probabilidad de que aparezca cara es 1/2 (una posibilidad entre dos).

El año 1654 marca el comienzo de la teoría de la probabilidad. Fue entonces cuando el Chevalier de Méré, miembro de la nobleza francesa, le envió algunas preguntas que se le habían ocurrido mientras jugaba al azar al matemático y filósofo Blas Pascal (1623 - 1662). A Pascal se le despertó el interés y, a su vez, le escribió a Pierre de Fermat (1601-1665), el principal matemático de su tiempo. El resultado de este intercambio de cartas contenía las deducciones básicas sobre el tema.

11.1 Sucesiones

La mayoría de la gente ha escuchado las frases "sucesión de cartas", "sucesión de eventos" y "sucesión de cuotas del auto". Intuitivamente podemos describir una sucesión como una lista de objetos, eventos o números que vienen uno después del otro, es decir, una lista de cosas dadas en algún orden definido. Los meses del año se enumeran en el orden en que ocurren.

Enero, febrero, marzo,..., diciembre **(1)**

y $$3, 4, 5, \ldots, 12 \tag{2}$$

son dos ejemplos de sucesiones. Cada objeto de la lista se llama **término** de la sucesión. Las listas (1) y (2) son **sucesiones finitas**: la sucesión (1) tiene 12 términos y la sucesión (2) tiene 10 términos. Una sucesión como

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \tag{3}$$

donde no se indica el último término, se conoce como **sucesión infinita.** Los tres puntos de (1), (2) y (3) se llaman elipsis e indican que los términos siguientes tiene el mismo patrón que el establecido por los ya dados.

En este capítulo, a menos que se especifique otra cosa, usaremos la palabra *sucesión* para referirnos a una *sucesión infinita*.

Los términos de una sucesión pueden colocarse en correspondencia uno a uno con el conjunto N de números enteros positivos. Por ejemplo, una correspondencia natural para la secuencia en (3) es

$$\begin{array}{ccccc} 1, & \tfrac{1}{2}, & \tfrac{1}{3}, & \tfrac{1}{4}, & \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \end{array}$$

Debido a esta propiedad de correspondencia, podemos definir una sucesión matemáticamente.

DEFINICION 1

> **Sucesión** es una función f cuyo dominio es el conjunto N de enteros positivos.

Sucesión finita es una función cuyo dominio es un subconjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ del conjunto N.

Los elementos del rango de una sucesión son, simplemente, los términos de la sucesión. Supondremos, de aquí en adelante, que el rango de una sucesión es un conjunto de números reales. El número $f(1)$ se toma como primer término de la sucesión, el segundo término es $f(2)$ y, en general, el término *n-ésimo* es $f(n)$. Más que usar una notación de funciones, representamos comúnmente los términos de una secuencia usando subíndices: $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots$, y así sucesivamente. El término n-ésimo $f(n) = a_n$ se llama también **término general** de la sucesión. Denotamos una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

por la notación $\{a_n\}$. Si identificamos el término general en (3) como $1/n$, la sucesión se puede escribir en forma compacta como $\{1/n\}$.

EJEMPLO 1

Enumere los primeros cinco términos de la sucesión cuyo término general es dado.

(a) $a_n = 2^n$

(b) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

Solución. Si n tiene los valores 1, 2, 3, 4 y 5, tenemos lo siguiente

(a) $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ o $2, 4, 8, 16, 32$

(b) $\dfrac{1}{1^2}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{4^2}, \dfrac{1}{5^2}$ o $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}$

(c) $\dfrac{(-1)^1 \cdot 1}{1+1}, \dfrac{(-1)^2 \cdot 2}{2+1}, \dfrac{(-1)^3 \cdot 3}{3+1}, \dfrac{(-1)^4 \cdot 4}{4+1}, \dfrac{(-1)^5 \cdot 5}{5+1}$ o

$-\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, -\dfrac{5}{6}$

FORMULAS DE RECURRENCIA

En lugar de dar el término general de una secuencia

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$$

podemos definir la sucesión usando una **fórmula de recurrencia** en la cual a_{n+1} se expresa usando los términos anteriores. Por ejemplo, podemos establecer $a_1 = 1$ y requiere que $a_{n+1} = a_n + 2$ para $n = 1, 2, \ldots$, Entonces,

$$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$
$$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$$
$$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7$$

y así sucesivamente.

EJEMPLO 2

Enumere los primeros cinco términos de la sucesión definida por $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = (n+2)a_n$

Solución. Se nos da $a_1 = 2$. De la fórmula de recurrencia tenemos, respectivamente, para $n = 1, 2, 3, 4$.

$$a_2 = (1 + 2)a_1 = 3(2) = 6$$
$$a_3 = (2 + 2)a_2 = 4(6) = 24$$
$$a_4 = (3 + 2)a_3 = 5(24) = 120$$
$$a_5 = (4 + 2)a_4 = 6(120) = 720$$

Así, los primeros cinco términos de la sucesión son 2, 6, 24, 120 y 720.

Para el resto de esta sección examinaremos dos tipos especiales de sucesiones que se definen mediante fórmulas de recurrencia.

PROGRESION ARITMETICA

En la sucesión 1, 3, 5, 7, ..., nótese que cada término, después del primero, se obtiene sumando el número 2 al término anterior. En otras palabras, los términos sucesivos de la sucesión difieren en 2. Una sucesión de este tipo se conoce como **progresión aritmética** o **sucesión aritmética**.

DEFINICION 2

Una sucesión, tal que los términos sucesivos a_{n+1} y a_n, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, tienen una diferencia fija $a_{n+1} - a_n = d$, se llama **progresión aritmética.** El número d se llama **diferencia aritmética** de la progresión.

De $a_{n+1} - a_n = d$, obtenemos la fórmula

$$a_{n+1} = a_n + d \tag{4}$$

para una progresión aritmética con diferencia d.

EJEMPLO 3

La sucesión definida por

$$a_1 = 3 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + 4 \quad \text{es} \quad 3, 7, 11, 15, 19, \ldots$$

Esta es una progresión aritmética con diferencia 4.

Si tenemos a_1 como primer término de una progresión aritmética, con una diferencia d, encontramos mediante la fórmula de recurrencia (4) que

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

y así sucesivamente. En general, el término n-ésimo a_n de una progresión aritmética con el primer término a_1 y diferencia aritmética d está dado por

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \tag{5}$$

El resultado se puede probar usando la técnica que se analizó en la sección 11.3.

EJEMPLO 4

Una mujer decide trotar una distancia particular cada semana, de acuerdo con el siguiente horario: la primera semana trotará 1,000 metros por día. Cada semana siguiente trotará 250 metros más por día de lo que trotó la semana anterior.

(a) ¿Qué distancia recorrerá por día en la semana número 26?
(b) ¿En cuál semana trotará 10,000 metros por día?

Solución

(a) El ejemplo describe una progresión aritmética con $a_1 = 1{,}000$ y $d = 250$. Para encontrar la distancia que la mujer trota por día en la semana número 26, establecemos $n = 26$ y calculamos a_{26} usando (5):

$$a_{26} = 1{,}000 + (26 - 1)(250) = 1{,}000 + 6{,}250 = 7{,}250$$

Así, ella trotará 7,250 metros por día en la semana número 26.

(b) Aquí se nos da $a_n = 10{,}000$ y necesitamos encontrar n. De (5) tenemos

$$10{,}000 = 1{,}000 + (n - 1)(250)$$

en la cual despejamos n:

$$\begin{aligned} 9{,}000 &= (n - 1)(250) \\ n - 1 &= \tfrac{9000}{250} \\ n - 1 &= 36 \\ n &= 37 \end{aligned}$$

Por tanto, ella trotará 10,000 metros por día en la semana número 37.

EJEMPLO 5

La diferencia en una progresión aritmética es -2 y el sexto término es 3. Encuentre el primer término de la progresión.

Solución. El sexto término de la progresión es

$$a_6 = a_1 + (6 - 1)d$$

Estableciendo $a_6 = 3$ y $d = -2$, tenemos

$$3 = a_1 + 5(-2), \quad \text{o} \quad a_1 = 3 + 10$$

Así, el primer término es $a_1 = 13$.

Prueba: la secuencia con $a_1 = 13$ y $d = -2$ es 13, 11, 9, 7, 5, 3, ...
El sexto término de esta secuencia es 3.

MEDIA ARITMETICA

Si una progresión aritmética finita tiene tres términos,

$$a, m, b$$

el segundo término se llama **media aritmética** de a y b. Puesto que (5) implica que

an a1 n

$$b = a + (3 - 1)d, \quad \text{o} \quad d = \frac{b - a}{2}$$

se deduce que

$$m = a + d = a + \frac{b-a}{2}, \quad \text{o} \quad m = \frac{a+b}{2}.*$$

En general, si

$$a,\ m_1,\ m_2,\ \ldots\ ,\ m_k,\ b$$

es una progresión aritmética finita con $k + 2$ términos, entonces, los números $m_1, m_2, \ldots, m_k$ se llaman **k medios aritméticos** de a y b.

EJEMPLO 6

Puesto que 10, 13, 16, 19, 22, 25 y 28 es una progresión aritmética finita con diferencia 3, los números 13, 16, 19, 22 y 25 son cinco medios aritméticos de 10 y 28.

EJEMPLO 7

a_1 a_6

Intercale cuatro medios aritméticos entre 1 y 2.

Solución. Esta progresión aritmética finita debe tener seis términos. Con $a_1 = 1$, $a_6 = 2$ y $n = 6$, la fórmula (5) da

$$2 = 1 + (6-1)d, \quad \text{o} \quad d = \tfrac{1}{5}$$

Así, los cuatro medios aritméticos son

$$\begin{aligned} m_1 &= a_1 + d = 1 + \tfrac{1}{5} = \tfrac{6}{5} \\ m_2 &= m_1 + d = \tfrac{6}{5} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{7}{5} \\ m_3 &= m_2 + d = \tfrac{7}{5} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{8}{5} \\ m_4 &= m_3 + d = \tfrac{8}{5} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{9}{5} \end{aligned}$$

Esta progresión aritmética finita es, pues,

$$1,\ \tfrac{6}{5},\ \tfrac{7}{5},\ \tfrac{8}{5},\ \tfrac{9}{5},\ 2$$

PROGRESION GEOMETRICA

En la sucesión 1, 2, 4, 8, ..., cada término después del primero se obtiene multiplicando el término anterior por el número 2. En este caso, observamos que la razón de un término con el término anterior es una constante, digamos, 2. Se dice que una sucesión de este tipo es una **progresión geométrica** o **sucesión geométrica.**

DEFINICION 3

> Una sucesión cuyos términos sucesivos a_{n+1} y a_n, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, tienen una razón fija $a_{n+1}/a_n = r$, se llama **progresión geométrica.**

De $a_{n+1}/a_n = r$, vemos que una progresión geométrica con una razón r se define mediante la fórmula de recurrencia

$$a_{n+1} = a_n r \tag{6}$$

* Esto también se deduce del hecho de que $m - a = b - m$.

EJEMPLO 8

La sucesión definida por

$$a_1 = 2 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = -3a_n \quad \text{es} \quad 2, -6, 18, -54, \ldots$$

Esta es una progresión geométrica con razón $r = -3$.

Si tenemos $a_1 = a$ como primer término de una progresión geométrica con razón r, encontramos a partir de la fórmula de recurrencia (6) que

$$a_2 = a_1 r = ar$$
$$a_3 = a_2 r = ar^2$$
$$a_4 = a_3 r = ar^3$$

y así sucesivamente. En general, el término n-ésimo de una progresión geométrica con primer término a y razón r es

$$a_n = ar^{n-1} \tag{7}$$

EJEMPLO 9

Encuentre el tercer término de una progresión geométrica con razón $\frac{2}{3}$ y sexto término $\frac{128}{81}$.

Solución. Primero encontremos a. Puesto que $a_6 = \frac{128}{81}$ y $r = \frac{2}{3}$, tenemos de (7) que

$$\frac{128}{81} = a\left(\tfrac{2}{3}\right)^{6-1}$$

Despejando a encontramos

$$a = \frac{\frac{128}{81}}{\left(\frac{2}{3}\right)^5} = \frac{2^7}{3^4}\left(\frac{3^5}{2^5}\right) = 12$$

Aplicando (7) de nuevo con $n = 3$, tenemos

$$a_3 = 12\left(\tfrac{2}{3}\right)^{3-1} = 12\left(\tfrac{4}{9}\right) = \tfrac{16}{3}$$

El tercer término de la progresión es $a_3 = \frac{16}{3}$

INTERES COMPUESTO

La cantidad inicial de dinero depositada en una cuenta de ahorros se llama **capital** y se representa por P. Si la tasa de interés anual es r, entonces al final del primer año el interés de P será Pr. Cuando el interés es *compuesto anualmente*, el interés que se gana cada año se deposita en la cuenta al final del año. Así, la cantidad A_1 acumulada en la cuenta al final del primer año es

$$A_1 = P + Pr = P(1 + r)$$

El interés ganado sobre esta cantidad al final del segundo año es $P(1 + r)r$. Si esta cantidad se deposita entonces al final del segundo año, la cuenta contiene

$$A_2 = P(1 + r) + P(1 + r)r$$
$$= P(1 + 2r + r^2) = P(1 + r)^2$$

Continuando de esta manera, podemos construir la siguiente tabla.

AÑO	CANTIDAD AL FINAL DEL AÑO
1	$P(1 + r)$
2	$P(1 + r)^2$
3	$P(1 + r)^3$
4	$P(1 + r)^4$
$\vdots$	$\vdots$

Las cantidades de la segunda columna de la tabla forman una progresión geométrica con el primer término $P(1 + r)$ y razón $1 + r$. Así podemos concluir de (7) que la cantidad en la cuenta de ahorros al final del año n-ésimo es

$$A_n = [P(1 + r)](1 + r)^{n-1}$$

o

$$A_n = P(1 + r)^n \tag{8}$$

EJEMPLO 10

El 1o. de enero de 1980 se depositó un capital de US\$200 en una cuenta que percibe 6% de interés compuesto anualmente. Encuentre la cantidad que habrá en la cuenta el 1o. de enero de 1994.

Solución. Hacemos la identificación $P = 200$ y $r = 0.06$. El 1o. de enero de 1994, el capital habrá estado percibiendo interés por 14 años. Usando (8) y la tecla $\boxed{y^x}$ en una calculadora, encontramos

$$\begin{aligned} A_{14} &= 200(1 + 0.06)^{14} \\ &= 200(1.06)^{14} \\ &\approx 200(2.26) \\ &= 452 \end{aligned}$$

La cuenta tendrá aproximadamente US\$452 después de 14 años.

EJERCICIO 11.1

En los problemas 1 al 10, enumere los cinco primeros términos de la sucesión con el término general especificado.

1. $a_n = (-2)^n$
2. $a_n = \dfrac{n+1}{n+4}$
3. $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
4. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$
5. $a_n = \dfrac{1}{n^3+1}$
6. $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$
7. $a_n = n \operatorname{sen} n\pi$
8. $a_n = \dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{n\pi}{2}$
9. $a_n = \dfrac{n+(-1)^{n-1}}{3n+2}$
10. $a_n = (-1)^n (n-1)$

En los problemas 11 y 12, enumere los primeros seis términos de una sucesión cuyo término general es dado.

11. $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2} \text{ si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{n-1}{n+1} \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$
12. $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{1}{n}} \text{ si } n \text{ es impar} \\ \sqrt{n} \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$

En los problemas 13 y 14, descubra un patrón para la sucesión dada, y determine los tres términos siguientes al último dado.

13. $-1/2, 4, -1/8, 16, -1/32, 36, \ldots$
14. $3, 4, 6, 9, 13, 18, \ldots$

En los problemas 15 al 22, enumere los cinco primeros términos de la sucesión definida por la fórmula de recurrencia dada.

15. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + (n+2)$

16. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1$

17. $a_1 = 1/2, \quad a_{n+1} = (-1)^n na_n$

18. $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \dfrac{na_n}{2} + 1$

19. $a_1 = 1, \; a_2 = 2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

20. $a_1 = 0, \; a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n$

21. $a_1 = 0, \; a_2 = 1, \quad a_{n+2} = na_{n+1} - (n+1)a_n$

22. $a_1 = 1, \; a_2 = 2, \quad a_{n+2} = \sqrt{a^2{}_{n+1} + a^2{}_n}$

En los problemas 23 al 32, la sucesión dada es una progresión aritmética o una progresión geométrica. Encuentre la diferencia aritmética o la razón geométrica. Escriba el término general y la fórmula de recurrencia de la progresión.

23. $1, -2, -5, -8, \ldots$

24. $\dfrac{1}{243}, \dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{3}, \ldots$

25. $24, -9, 27/8, -81/64, \ldots$

26. $1/3, 2/3, 1, 4/3, \ldots$

27. $-3, 2, 7, 12, \ldots$

28. $1/8, -1/4, 1/2, -1, \ldots$

29. $1, 0.1x, 0.01x^2, 0.001x^3, \ldots$

30. $-x, 2x, 5x, 8x, \ldots$

31. $1, -1/4, 1/16, -1/64, \ldots$

32. $\ln 3, \ln 9, \ln 27, \ln 81, \ldots$

33. Sea la progresión aritmética finita $-2, 2, 6, 10, 14, 18$; ¿cuáles son los medios aritméticos de -2 y 18?

34. Suponga que $3, 9/2, a, b, c, d, 12$ es una progresión aritmética finita. Encuentre los medios aritméticos a, b, c, d de 3 y 12.

35. Intercale 4 medios aritméticos entre 2 y 4.5.

36. Intercale 8 medios aritméticos entre 2 y 5.

37. Halle el trigésimo término de la sucesión $-7, -4, -1, 2, \ldots$

38. Halle el vigésimo término de la sucesión $1.5, 3, 4.5, \ldots$

39. Halle el sexto y el séptimo términos de una sucesión que es una progresión geométrica cuyo primer término es -2 y cuya razón es $r = -1/2$.

40. Halle el décimo término de la sucesión $\dfrac{1}{729}, \dfrac{1}{243}, \dfrac{1}{81}, \ldots$

41. Halle el primer término de una progresión geométrica cuyos cuarto y quinto términos son -8 y 32 respectivamente.

42. Halle el primer término de una progresión aritmética cuyos quinto y sexto términos son 3 y -4 respectivamente.

43. Halle el noveno término de una progresión aritmética cuyo primer y tercer términos son 181 y 150 respectivamente.

44. Halle el octavo término de una progresión geométrica si el segundo y el cuarto términos son 20/9 y 80/81 respectivamente.

45. Halle una progresión aritmética cuyo primer término es 3 y la suma del segundo y tercer término es 18.

46. Halle una sucesión geométrica cuyo segundo término es 4, y tal que

$$\frac{a_4}{a_6} = \frac{25}{4}$$

47. Una pareja decide ahorrar US\$10 cada mes del primer año de matrimonio, US\$25 cada mes del segundo año de matrimonio, US\$40 cada mes del tercer año de matrimonio, y así sucesivamente aumentando US\$15 la cantidad mensual cada año. Halle la cantidad que deberá ahorrar cada mes del año décimo.

48. En el problema 47, encuentre una fórmula para la cantidad que la pareja deberá ahorrar cada mes del año n-ésimo.

49. Si se invierten US\$2,000 a 8% de interés compuesto anual, halle la cantidad en la cuenta después de 15 años.

50. Halle la cantidad que debe depositarse en una cuenta a 6% de interés compuesto anual para tener US\$20,000 al cabo de 15 años.

51. A qué tasa de interés anual se deberán depositar US\$2,000 para tener US\$10,000 en la cuenta 20 años después.

52. ¿Cuánto tiempo se demorará en triplicarse una inversión al 10% de interés compuesto anual?

53. Cierta población de bacterias aumenta geométricamente con un factor diario de 1.2. ¿De cuánto será su población al cabo de una semana si inicialmente era de 100?

54. Se conoce que una pareja de ratones blancos tiene al mes siguiente después de madurar, dos crías cada mes: un macho y una hembra. Además, se demoran en madurar un mes. Un laboratorio que necesita ratones blancos para su investigación adquiere dos crías de ratones blancos, un macho y una hembra a principios de año. ¿Con cuántos pares de ratones blancos deberá contar el mes 10 del año? Halle una fórmula de recurrencia que dé el número de pares de ratones blancos que habrá en el n-ésimo mes.

55. Al nacer su hija, una pareja deposita un capital de US\$10,000 que gana un interés de 14% compuesto anual para regalarle el monto que habrá en la cuenta el día que se case. Si ella se casa a los 20 años de edad, ¿de cuánto fue el monto del regalo por concepto de esa cuenta?

56. Una persona recibe una herencia. Después de satisfacer ciertas necesidades, ella quiere hacer un depósito en una cuenta que le garantice que dentro de 30 años tendrá 2 millones de dólares. Si el banco le da una tasa de interés de 12% compuesto anual, ¿cuál será el capital que deberá depositar en la cuenta?

57. Considere las sucesiones

$$0, 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

y

$$0.4, 0.7, 1.0, 1.6, 2.8, 5.2, \ldots$$

Cada término de la segunda sucesión se obtiene del correspondiente término de la primera sucesión multiplicándolo por 0.3 y luego sumándole 0.4. En 1972 el astrónomo alemán J. E. Bode arguyó que la segunda sucesión podría usarse para predecir las distancias medias del Sol a los planetas (medidas en unidades astronómicas: 1 U.A. = 93 millones de millas). Los términos de la sucesión de Bode concuerdan razonablemente bien con las distancias reales (en U.A.) para Mercurio (0.39), Venus (0.72), la Tierra (1.0), Marte (1.52), los asteroides (2.77) y Júpiter (5.2). Use la sucesión de Bode para predecir las distancias medias del Sol a los planetas Saturno, Urano, Neptuno y Plutón. Compare sus respuestas con las distancias reales: 9.54, 19.18, 30.07 y 39.46, respectivamente.

58. Puede probarse que los términos de la sucesión $\{a_n\}$ definidos por la fórmula de recurrencia

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{r}{a_n}\right)$$

se aproximan cada vez más a $\sqrt{r}$ cuando n aumenta. Suponga que $a_1 = 1$. En cada uno de los siguientes casos halle a_{10} y compare con el valor correspondiente que dé su calculadora.

(a) $r = 2$ **(b)** $r = 3$ **(c)** $r = 5$

59. La media geométrica de dos números positivos a y b es el número m tal que a, m y b son términos consecutivos de una progresión geométrica finita. Encuentre una fórmula para la media geométrica de a y b.

60. Los grados de abertura útil de una cámara corresponden a la cantidad de luz que entra en ella. Cuando los números de abertura útil aumentan, el diámetro de la apertura de las lentes disminuye. En una lente típica, los primeros números de abertura útil son 1, 4, 2, 2.8, 4, . . .

Los números de abertura útil se aproximan mediante los términos de la sucesión geométrica

$$1.4,\ \sqrt{2}(1.4),\ \sqrt{2}\left(\sqrt{2}(1.4)\right),\ \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{2}(1.4)\right)\right), \ldots$$

(a) Calcule el segundo, tercero y cuarto términos de la última sucesión, y compare sus resultados con los números de abertura dados anteriormente.

(b) Usando la sucesión geométrica, calcule los valores aproximados de los tres números de abertura útil siguientes. Aproxime sus respuestas a una cifra decimal.

11.2 Series

En el siguiente análisis, nos interesaremos en la suma de los términos de las sucesiones finitas como también en las sumas de los términos de ciertas progresiones geométricas infinitas.

NOTACION DE LA SUMA

El símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$ es una representación concisa de la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Esto se llama **notación de la suma** y se lee "la suma de $k = 1$ a n de a sub k. El subíndice k se llama **índice de la suma** y toma sucesivos valores 1, 2,..., n. Puesto que la notación de la suma usa la letra griega mayúscula sigma, Σ, se la llama algunas veces **notación sigma.**

EJEMPLO 1

(a) $\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16$

(b) $\sum_{k=1}^{20} [3k + 1] = [3(1) + 1] + [3(2) + 1] + \cdots + [3(20) + 1]$
$= 4 + 7 + \cdots + 61$

(c) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k = (-1)^{1+1} a_1 + (-1)^{2+1} a_2 + (-1)^{3+1} a_3$
$+ \cdots + (-1)^{n+1} a_n$
$= a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n$

La selección de esta letra como índice de la suma es arbitraria. Aunque usamos consistentemente la letra k, notamos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{m=1}^{n} a_m$$

y así sucesivamente. También, como veremos en el siguiente ejemplo, podemos permitir algunas veces que el índice de la suma inicie con un valor dierente de $k = 1$.

EJEMPLO 2

Escriba $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{256}$ en notación de suma.

Solución. Observamos que el término k-ésimo de la sucesión $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$ se puede escribir como $(-1)^k(1/2^k)$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots$ Nótese también que $\frac{1}{256} = 1/2^8$. Por tanto,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{256} = \sum_{k=0}^{8} (-1)^k \frac{1}{2^k}$$

PROPIEDADES DE LA NOTACION DE LA SUMA

La siguiente es la lista de las propiedades de la notación de la suma.

Propiedades de la notación de la suma

Si c representa cualquier número real, entonces:

(i) $\Sigma_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \Sigma_{k=1}^{n} a_k + \Sigma_{k=1}^{n} b_k$;

(ii) $\Sigma_{k=1}^{n} ca_k = c\, \Sigma_{k=1}^{n} a_k$;

(iii) $\Sigma_{k=1}^{n} c = nc$.

Las pruebas de las propiedades (i) y (ii) se dejan como ejercicios (véanse problemas 62 y 63). Para entender la propiedad (iii), consideremos los siguientes ejemplos simples:

$$\overbrace{2 + 2 + 2}^{\text{tres } 2} = 3 \cdot 2 = 6 \qquad \overbrace{7 + 7 + 7 + 7}^{\text{cuatro } 7} = 4 \cdot 7 = 28$$

Así, si $a_k = c$ es una constante real para $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$a_1 = c, \quad a_2 = c, \ldots, \quad a_n = c.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{n} c = \overbrace{c + c + c + \cdots + c}^{n \text{ términos}} = nc$$

Por ejemplo, $\Sigma_{k=1}^{10} 6 = 10 \cdot 6 = 60$

SERIES ARITMETICAS

La suma de los primeros n términos de una progresión aritmética

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1)d) = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) \tag{9}$$

se llama **serie aritmética.** Si denotamos el último término de la serie en (9) con a_n, entonces S_n se puede escribir

$$S_n = (a_n - (n-1)d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \tag{10}$$

Invirtiendo los términos en (9), tenemos

$$S_n = (a_1 + (n-1)d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \tag{11}$$

Sumando (10) y (11), obtenemos

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \\ &= n(a_1 + a_n) \end{aligned}$$

Así,

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \tag{12}$$

En otras palabras, la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética es n veces el promedio de los términos primero y n-ésimo de la progresión.

EJEMPLO 3

Halle la suma de los primeros seis términos de la progresión aritmética 5, 1, -3, -7, -11, $-15, \ldots$

Solución. El primer término de la progresión es 5 y el sexto término es -15. Tenemos así $a_1 = 5$, $a_6 = -15$ y $n = 6$.

De (12) la suma de la serie aritmética es

$$S_6 = 6\left(\frac{5 + (-15)}{2}\right) = 3(-10) = -30$$

EJEMPLO 4

Halle la suma de los primeros 100 números enteros positivos.

Solución. La sucesión de los números enteros positivos,

$$1, 2, 3, \ldots,$$

es una progresión aritmética con diferencia 1. Así, de (12),

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$$

está dada por

$$S_{100} = 100\left(\frac{1 + 100}{2}\right) = 50(101) = 5{,}050$$

Una forma alterna de (12) se puede obtener sustituyendo $a_1 + (n-1)d$ por a_n en (12). Entonces, tenemos

$$S_n = n\left(\frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\right) \tag{13}$$

lo cual expresa la suma de una serie aritmética en términos del primer término, el número de términos y la diferencia.

EJEMPLO 5

Una mujer desea pagar un préstamo libre de interés de US$ 1,300, cancelando US$10 el primer mes y aumentando su pago en US$15 cada mes. ¿En cuántos meses pagará la totalidad del préstamo? Halle la cantidad del último pago.

Solución. Los pagos mensuales forman una progresión aritmética con el primer término $a_1 = 10$ y diferencia $d = 15$. Puesto que la suma de la serie aritmética formada por la secuencia de pagos es US$1,300, establecemos que $S_n = 1{,}300$ en (13) y resolvemos para n:

$$1{,}300 = n\left(\frac{2(10) + (n-1)15}{2}\right)$$

$$= n\left(\frac{5 + 15n}{2}\right)$$

2600

$$2{,}600 = 5n + 15n^2$$

$$3n^2 + n - 520 = 0$$

$$(3n + 40)(n - 13) = 0$$

Así, $n = -40/3$ o $n = 13$. Puesto que n debe ser positivo, concluimos que empleará trece meses en pagar el préstamo.

El pago final será

$$a_{13} = 10 + (13 - 1)15 = 10 + 180 = 190 \text{ dólares}$$

SERIES GEOMETRICAS

La suma de los n términos de una progresión geométrica

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \tag{14}$$

se llama **serie geométrica.** Multiplicando (14) por r obtenemos:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \tag{15}$$

Restando (15) de (14) y simplificando obtenemos:

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n)$$
$$= a - ar^n,$$

o

$$(1 - r)S_n = a(1 - r^n)$$

Resolviendo esta ecuación para S_n, obtenemos una fórmula para la suma de una serie geométrica que contiene n términos

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \tag{16}$$

EJEMPLO 6

Calcule la suma $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}$

Solución. Esta es una serie geométrica con el primer término $a = 3$ y una razón $r = \frac{1}{2}$. Siendo $n = 6$ en (16), tenemos

$$S_6 = \frac{3(1 - (\frac{1}{2})^6)}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$= \frac{3(1 - \frac{1}{64})}{\frac{1}{2}}$$
$$= 6(\tfrac{63}{64}) = \tfrac{189}{32}.$$

EJEMPLO 7

Un urbanizador construyó una casa en 1982. Con sus utilidades pudo construir dos casas en 1983. Con las utilidades de éstas, construyó cuatro casas en 1984. Suponiendo que es capaz de continuar duplicando el número de casas que construye cada año, encuentre el número total de casas que habrá construido al final de 1992.

Solución. El número total de casas que construye en los 11 años desde 1982 hasta 1992 es la suma de la serie geométrica con primer término $a = 1$ y razón $r = 2$. De (16) tenemos

$$S_{11} = \frac{1(1 - 2^{11})}{1 - 2} = \frac{1 - 2{,}048}{-1} = 2{,}047 \text{ casas}$$

SERIES GEOMETRICAS INFINITAS

En ciertas condiciones, es posible asignar un valor numérico a una serie geométrica infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \qquad \textbf{(17)}$$

Si $|r| < 1$, se puede verificar que r^n está cerca de 0 para valores grandes de n. Así para valores cada vez mayores de n, la expresión en (16) se acerca al número $a/(1 - r)$. Esto indica que para $|r| < 1$ definimos la suma de la serie geométrica infinita en (17) como

$$S = \frac{a}{1 - r} \qquad \textbf{(18)}$$

EJEMPLO 8

Halle la suma de la serie geométrica infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \cdots$$

Solución. Puesto que $a = 1$ y $|r| = |-1/3| < 1$, encontramos de que

$$S = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{3}{4}$$

La fórmula (18) da un método para convertir un decimal periódico en un cociente de enteros. Aplicamos el hecho de que cada *decimal periódico es la suma de una serie geométrica infinita.*

EJEMPLO 9

Escriba $N = 0.232323\ldots$ como cociente de números enteros.

Solución. Primero, nótese que N se puede escribir como la serie geométrica infinita

$$N = \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \cdots$$

en la cual vemos que $a = \frac{23}{100}$ y $|r| = \left|\frac{1}{100}\right| < 1$. Así, de (18), se deduce que

$$N = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{23}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{23}{99}$$

EJERCICIO 11.2

En los problemas 1 al 6, calcule la suma dada.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{2(k-1)}{3}$ **2.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} 2^{k-1}$ **3.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^k$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} 4$ **5.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-2}}$ **6.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} (-1)^k (k-1)^2$

En los problemas 7 al 10, escriba los términos de la suma dada.

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} ka^k$ **8.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (a_k{}^2 + k)$

9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \operatorname{sen}\left(\tfrac{k}{2}\pi\right)$ **10.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{(k^2+k)}{a_k}$

En los problemas 11 al 16, escriba las series dadas en notación de suma (Σ).

11. $4 + 8 + 16 + 32 + 64$ **12.** $1 + \frac{4}{3} + \frac{9}{5} + \frac{16}{7} + \frac{25}{9}$

13. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ **14.** $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}$

15. $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100}$ **16.** $a_0 + 3a_2 + 5a_4 + 7a_6 + \ldots + (2n+1)a_{2n}$

En los problemas 17 al 22, encuentre la suma de las series aritméticas dadas.

17. $2 + 4 + 8 + 16 + 32$ **18.** $125 + 110 + 95 + 80 + 65$

19. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} [2 + 3(k-1)]$ **20.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} [-3 + 5(k-1)]$

21. $20 + 15 + 10 + 5 + \ldots + (-50)$ **22.** $-20 + (-16) + (-12) + \ldots + 40$

En los problemas 23 al 28, encuentre la suma de las series geométricas dadas.

23. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27}$ **24.** $5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{16}$

25. $20 + 2 + 0.2 + 0.02$ **26.** $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64}$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \left(\tfrac{1}{5}\right)^{k-1}$ **28.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1} \left(\tfrac{2}{5}\right)^{k-1}$

En los problemas 29 al 34, encuentre la suma de las series infinitas dadas.

29. $3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots$ **30.** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

31. $\frac{3}{4} - \frac{9}{16} + \frac{27}{64} \ldots$ **32.** $1 - 0.1 + 0.01 - \ldots$

33. $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots, |x| > 1$ **34.** $1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \ldots, |x| > 1$

En los problemas 35 al 38, escriba los decimales periódicos dados como un cociente de enteros.

35. $0.555\ldots$ **36.** $0.252525\ldots$

37. $0.125125125\ldots$ **38.** $0.32686868\ldots$

39. Sea $\{a_n\}$ una progresión aritmética con $d = 40$ tal que $S_{20} = 650$; halle a_1 y a_{10}.

40. Si (a_n) es una progresión aritmética con $a_{14} = 40$ y $a_{20} = 64$, encuentre (a) d, (b) a_1, (c) S_{20}

41. Suponga que $a_1 = -17.5$ y $a_n = 20$ son el primero y el n-ésimo término respectivamente de una serie aritmética para la cual $S_n = 63.75$. Halle n y d.

42. Si (a_n) es una progresión con $r = 1/5$ tal que $S_5 = 4.992$, encuentre el primer término a.

43. Si el primer término de una serie geométrica infinita es 4 y su suma es 5, halle r.

44. Halle la suma de los 8 primeros términos de la progresión aritmética

$$b, \frac{a+b}{2}, a, \ldots$$

45. Halle la suma de los 20 primeros términos de la progresión geométrica

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2, \left(\frac{b}{a}\right), 1, \ldots,$$

46. Un turista le saca una foto a una pirámide y observa que en su base hay 50 bloques, en la fila siguiente hay 49, en la siguiente 48, y así sucesivamente hasta que en la fila superior hay 8 bloques. ¿Cuántos bloques tendrá esa cara de la pirámide fotografiada?

47. Una pareja decide ahorrar US\$10 cada mes de su primer año de matrimonio, US\$25 cada mes de su segundo año de matrimonio, y así sucesivamente aumentando US\$15 la cantidad mensual cada año. ¿Cuánto habrá ahorrado al cumplir 20 años de casada?

48. En el problema 47 encuentre una fórmula para la cantidad total que habrá ahorrado al cumplir n años de casada.

49. En una reunión de 200 personas cada una le dio un apretón de manos a todas las demás personas exactamente una vez. ¿Cuántos apretones de manos hubo?

50. Hay una antigua leyenda acerca de las series geométricas y los tableros de ajedrez. Cuando un rey de Persia aprendió a jugar el ajedrez quiso agradecerle al inventor del juego por ello y le prometió concederle lo que pidiera. Este señor, llamado Sessa, quiso jugarle una broma, y con aire de modestia le pidió un grano de trigo por el primer cuadro del tablero, 2 por el segundo, 4 por el tercero, 8 por el cuarto y así sucesivamente. Explique en qué consiste la "broma" de Sessa.

51. Una persona ve dos anuncios de empleo para realizar el mismo trabajo durante todos los días de un mes o 30 días. Uno de ellos dice que pagará US\$10,000 por el mes de trabajo y el otro dice que pagará diariamente 1¢ el primer día, 2¢ el segundo, 4¢ el tercero y así sucesivamente hasta el último día del mes. ¿Cuál empleo le resulta más llamativo? ¿Por qué?

52. Un automóvil que se acelera en una razón constante recorre 3 metros el primer segundo, 8 metros el segundo segundo, 13 metros el tercer segundo, y así sucesivamente recorre 5 metros adicionales cada segundo. Halle la distancia total que el automóvil ha recorrido después de 10 segundos.

53. Halle la fórmula para la distancia total que recorre el automóvil en el problema 52 después de n segundos.

54. Una epidemia crece tan rápido que cada día hay el doble de personas contaminadas que había el día anterior. Si una población se contamina completamente en 19 días si el primer día hay 2 personas contaminadas. ¿Cuántos días se demorará si el primer día hay 4 personas contaminadas?

55. Si se invierte la misma cantidad de dinero P cada año durante n años a una tasa de interés compuesto anualmente, entonces la cantidad acumulada después del pago n está dada por $S = P(1+r)^{n-1} + P(1+r)^{n-2} + \ldots + P(1+r) + P$.

Demuestre que $S = P\left[\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}\right]$

56. Suponga que una pareja decide depositar al comienzo de cada año US\$1,000 en una cuenta de ahorros que gana un interés del 12% compuesto anual; ¿cuál será la cantidad acumulada en la cuenta después de 30 años?

57. Suponga que un gobierno inyecta 100 millones de dólares extra en la economía. Suponga además que cada negocio o persona particular gasta el 80% de sus ingresos y ahorra el resto, y que esto se repite indefinidamente; ¿cuál es el incremento total del gasto debido a la acción del gobierno? (a esto en economía se le llama "efecto multiplicador").

58. Una pelota se deja caer desde una altura inicial de 100 pies. En cada salto la pelota rebota 2/5 de su altura previa. Halle la distancia total recorrida por la pelota cuando golpea el suelo por décima vez.

59. En el problema 58, halle la distancia total recorrida suponiendo que la pelota continúa rebotando indefinidamente las dos quintas partes de su altura previa.

60. Dado un triángulo cualquiera de perímetro P, se forma un segundo uniendo los puntos medios de cada lado del primero, se forma un tercero uniendo los puntos medios de cada lado del segundo y así sucesivamente. Encuentre la longitud total de todos los segmentos de recta de la configuración resultante.

61. (a) Halle una fórmula para la suma $1+2+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k$

(b) Halle una fórmula para la suma de los primeros n números naturales pares. (c) Halle una fórmula para la suma de los primeros n números naturales impares.

62. Use el resultado de 61 para obtener:

(a) La suma de los primeros 100 números naturales.

(b) La suma de los primeros 100 números naturales pares.

(c) La suma de los primeros 100 números naturales impares.

63. Verifique: (a) La propiedad (i) de la notación de la suma.

(b) La propiedad (ii) de la notación de la suma.

64. Demuestre que una fórmula alterna para la suma de una serie geométrica

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} \text{ está dada por } S_n = \frac{a - ra_n}{1-r}$$

11.3 Inducción matemática

Con frecuencia una afirmación o proposición que depende de los números enteros positivos

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

se puede probar usando el **principio de la inducción matemática.**

Suponga que podemos demostrar que:

(i) una proposición es verdadera para el número 1; y

(ii) siempre que la proposición es verdadera para el número entero positivo k, entonces es verdadera para el siguiente entero positivo $k + 1$.

En otras palabras, supongamos que podemos demostrar que

La proposición es verdadera para 1	(19)

y que la

proposición es verdadera para k	implica que	la proposición es verdadera para $k + 1$	(20)

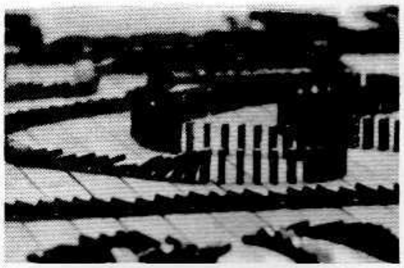
¿Qué podemos concluir de esto? De (19) tenemos que

la proposición es verdadera para el número 1,

y por (20) la *proposición es verdadera para el número* $1 + 1 = 2$.

Además, se deduce ahora de (20) que

la proposición es verdadera para el número $2 + 1 = 3$,
la proposición es verdadera para el número $3 + 1 = 4$,
la proposición es verdadera para el número $4 + 1 = 5$,



y así sucesivamente. Simbólicamente, podemos representar esta secuencia de implicaciones mediante

la proposición es verdadera para 1	$\longrightarrow$	la proposición es verdadera para 2	$\longrightarrow$	la proposición es verdadera para 3	$\longrightarrow$	la proposición es verdadera para 4	$\longrightarrow$

Parece claro que la proposición debe ser verdadera para *todos* los enteros positivos n. Esta es precisamente la afirmación del siguiente principio.

Principio de la inducción matemática

Sea $S(n)$ una proposición que contiene un número entero positivo tal que

(i) $S(1)$ es verdadera, y

(ii) siempre que $S(k)$ es verdadera para un número entero positivo k, entonces $S(k + 1)$ es también verdadera.

Entonces, $S(n)$ es verdadera para todo entero positivo.

Ilustraremos ahora el uso de la inducción con varios ejemplos.

EJEMPLO 1

Pruebe por inducción matemática que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

para todo entero positivo n.

Solución. Aquí la proposición $S(n)$ es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

El primer paso es demostrar que $S(1)$ es verdadera, donde $S(1)$ es la proposición

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

Puesto que esto es claramente verdadera, la condición (i) se satisface.

El siguiente paso es verificar la condición (ii). Esto requiere que de la hipótesis "$S(k)$ es verdadera", probemos que "$S(k+1)$ es verdadera". Así suponemos que la proposición $S(k)$,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{21}$$

es verdadera. De esta suposición necesitamos probar que $S(k+1)$,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

es también verdadera. Ahora, de (21) podemos obtener una fórmula para la suma de los primeros $k+1$ enteros positivos sumando $k+1$ a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

Así hemos demostrado que la proposición $S(k+1)$ es verdadera. Se deduce del principio de la inducción matemática que $S(n)$ es verdadera para todo entero positivo n.

En el capítulo 1 vimos que

$$x - y = x - y$$
$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

y

$$x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$$

Podemos suponer de estas factorizaciones que $x - y$ es siempre un factor de $x^n - y^n$ para cualquier entero positivo n. Ahora probaremos que esto es así.

EJEMPLO 2

Pruebe por inducción matemática que $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$ para cualquier entero positivo n.

Solución. Para la proposición $S(n)$,

$$x - y \quad \text{es factor de} \quad x^n - y^n$$

debemos demostrar que las dos condiciones del principio de inducción matemática se cumplen.

Para $n = 1$ tenemos la proposición verdadera $S(1)$.

$$x - y \quad \text{es un factor de} \quad x^1 - y^1$$

Ahora suponemos que $S(k)$,

$$x - y \quad \text{es factor de} \quad x^k - y^k$$

es verdadera. Usando esta suposición, debemos demostrar que $S(k + 1)$ es verdadera; es decir, $x - y$ es un factor de $x^{k+1} - y^{k+1}$. Para hacer esto, restamos y sumamos xy^k a $x^{k+1} - y^{k+1}$:

$$\begin{aligned} x^{k+1} - y^{k+1} &= x^{k+1} - xy^k + xy^k - y^{k+1} \\ &= x(x^k - y^k) + y^k(x - y) \end{aligned}$$

Pero, por hipótesis, $x - y$ es un factor de $x^k - y^k$. Por tanto, $x - y$ es un factor de cada término del lado derecho de la ecuación arriba mencionada. Se deduce que $x - y$ es un factor del lado derecho, y así hemos demostrado que la proposición $S(k + 1)$,

$$x - y \quad \text{es un factor de} \quad x^{k+1} - y^{k+1}$$

es verdadera.

Se deduce del principio de inducción matemática que $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$ para cualquier número entero positivo n.

EJEMPLO 3

Considere la sucesión definida por recursión*:

$$a_1 = 2$$

$$a_n = \frac{n}{n+1} a_{n-1} \tag{22}$$

De (22) vemos que los primeros cinco términos de la sucesión son

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ a_2 &= \tfrac{2}{3}a_1 = \tfrac{4}{3} \\ a_3 &= \tfrac{3}{4}a_2 = 1 \\ a_4 &= \tfrac{4}{5}a_3 = \tfrac{4}{5} \\ a_5 &= \tfrac{5}{6}a_4 = \tfrac{4}{6} \end{aligned}$$

Así podemos escribir

$$2, \tfrac{4}{3}, 1, \tfrac{4}{5}, \tfrac{4}{6}, \ldots \tag{23}$$

---

* *N. del R.*: Una sucesión está dada por recursión cuando cada término se define utilizando el anterior o una combinación de los anteriores.

$$a_n = \frac{4}{n+1}$$

De hecho, la proposición $S(n)$,

$$a_n = \frac{4}{n+1} \text{ es el término } n\text{-ésimo de la sucesión definida por (22),} \qquad \textbf{(24)}$$

puede probarse por el principio de inducción matemática.

Para $n = 1$, tenemos de (24)

$$a_1 = \tfrac{4}{2} = 2$$

lo cual concuerda con a_1 especificado en (22). Por tanto, $S(1)$ es verdadera.

Ahora supongamos que $S(k)$,

$$a_k = \frac{4}{k+1} \text{ es el término } k\text{-ésimo de la sucesión definida por (22),} \qquad \textbf{(25)}$$

es verdadera. Entonces, de (22), el término $(k + 1)$ es

$$a_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}a_k$$

Si remplazamos a_k en esta última expresión por la suposición (25), se deduce que

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{4}{k+1} \\ &= \frac{4}{k+2} \\ &= \frac{4}{(k+1)+1} \end{aligned}$$

Este último resultado demuestra que $S(k + 1)$ es verdadera.

Así, la proposición (24) es verdadera para todos los enteros positivos.

En la sección 11.1 conjeturamos que el término n-ésimo de una progresión geométrica definida por $a_{n+1} = a_n r$, $a_1 = a$, es $a_n = ar^{n-1}$. También asumimos que el término n-ésimo, de una progresión aritmética es $a_n = a_1 + (n-1)d$. Estas dos afirmaciones se pueden probar usando el principio de inducción matemática (véanse problemas 20 y 21).

EJERCICIO 11.3

En los problemas 1 al 24, use el principio de inducción matemática para probar que la proposición dada es verdadera para todo entero positivo n.

1. $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n^2 + n$
2. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$
3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
5. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \dfrac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$
6. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-1) = n(2n+1)$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(7k-5) = \frac{n(7n-3)}{2}$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k = 2(2^n - 1)$
10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1) = 1/3n(n+1)(n+2)$
11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$
12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

14. $n^2 + n$ es par

15. $n^3 + 2n$ es divisible por 3

16. $n^3 - n$ es divisible por 6

17. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 9

18. $a + b$ es un factor de $a^{2n-1} + b^{2n-1}$

19. 4 es factor de $5^n - 1$

20. $(1+a)^2 \geq 1 + na$ para $a \geq -1$

21. $3n \leq 3^n$

22. $n^2 \leq 2^n$ para $n \geq 5$

23. $\log_{10} n < n$

24. $|\operatorname{sen} nx| \leq n\,|\operatorname{sen} x|$ para todo x

En los problemas 25 al 28, use el principio de inducción matemática para probar que el a_n indicado es el término general de la sucesión definida recursivamente.

25. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 4;\quad a_n = 4n - 3$

26. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = (a_n)^2;\quad a_n = 3^{2^{n-1}}$

27. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + n + 1;\quad a_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$

28. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = -1/4a_n;\quad a_n = (-1)^{n-1}(1/4)^{n-2}$

29. Use inducción matemática para probar que

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n[\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta]$$

es verdadera para todo número entero positivo n. Este resultado, conocido como teorema de DeMoivre, se analizó en la sección 7.10.

30. Use inducción matemática para probar que

(a) El término general de la progresión geométrica definida por $a_1 = a$ y $a_{n+1} = a_n r$ es $a_n = ar^{n-1}$

(b) El término general de la progresión aritmética definida por $a_{n+1} = a_n + d$ es $a_n = a_1 + (n-1)d$, donde a_1 es el primer término de la progresión.

31. Si suponemos que $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n^2 + n + 1$ es verdadera para $n = k$, demuestre que la fórmula es verdadera para $n = k + 1$. Demuestre, sin embargo, que la fórmula en sí misma es falsa. Explique por qué esto no viola el principio de la inducción matemática.

32. ¿Qué está mal en el siguiente argumento, que propone probar que todas las personas en cualquier conjunto de n personas tienen el mismo sexo? El enunciado es cierto para un conjunto de una sola persona. Suponga que es cierto para cualquier conjunto de k personas y considere el conjunto M de $k+1$ personas. M se puede escribir como una unión de dos conjuntos de k personas y con intersección no vacía. Como en estos conjuntos todos tienen el mismo sexo por hipótesis de inducción, entonces también en M todas tienen el mismo sexo.

11.4 Teorema del binomio

EXPONENTES

Cuando $(a+b)^n$ se extiende para un entero positivo arbitrario n, los exponentes de a y b siguen un patrón definido. Por ejemplo, de

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

vemos que los exponentes de a *disminuyen* en 1, comenzando con el primer término, mientras que los exponentes de b *aumentan* en 1, comenzando con el segundo término. En el caso de $(a+b)^4$, tenemos

disminuyen en 1

$$a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + b^4.$$

aumentan en 1

Para extender este patrón consideramos que el primero y el último términos deben multiplicarse por b^0 y a^0, respectivamente; es decir,

$$(a+b)^4 = a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + a^0b^4. \qquad \textbf{(26)}$$

También notamos que la suma de los exponentes de cada término en el desarrollo de $(a + b)^4$ es 4.

EJEMPLO 1

Desarrolle $(y^2 - 1)^4$.

Solución. Con $a = y^2$ y $b = -1$, se deduce de (26) y de las leyes de los exponentes que

$$\begin{aligned}(y^2 - 1)^4 &= (y^2 + (-1))^4 \\ &= (y^2)^4 + 4(y^2)^3(-1) + 6(y^2)^2(-1)^2 + 4(y^2)(-1)^3 + (-1)^4 \\ &= y^8 - 4y^6 + 6y^4 - 4y^2 + 1\end{aligned}$$

COEFICIENTES

Los coeficientes en el desarrollo de $(a + b)^n$ también siguen un patrón. Para ilustrarlo, disponemos los coeficientes en los desarrollos de $(a + b)^0$, $(a + b)^1$, $(a + b)^2$, $(a + b)^3$ y $(a + b)^4$ en forma triangular

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

Observe que cada número del interior de este esquema es la *suma* de los dos números que se hallan directamente encima de él. Así, el siguiente renglón en el esquema se puede obtener como sigue:

$$\begin{array}{ccccccccccc} &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$

Como se espera, estos números son los coeficientes de las potencias de a y b en el desarrollo de $(a + b)^5$, que es,

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

El esquema que se obtiene continuando de esta manera se conoce como el **triángulo de Pascal.**

EJEMPLO 2

Desarrolle $(3 - x)^5$.

Solución. Del análisis anterior, con $a = 3$ y $b = -x$, podemos escribir

$$\begin{aligned}(3 - x)^5 &= (3 + (-x))^5 \\ &= 1(3)^5 + 5(3)^4(-x) + 10(3)^3(-x)^2 + 10(3)^2(-x)^3 + 5(3)(-x)^4 + 1(-x)^5 \\ &= 243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5\end{aligned}$$

NOTACION FACTORIAL

Antes de dar una fórmula general para el desarrollo de $(a + b)^n$, será útil introducir la **notación factorial.**

El símbolo $r!$ se define para cualquier entero positivo como el producto

$$r! = r(r-1)(r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

y se lee "r factorial". Por ejemplo,

$$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$$

También es conveniente definir

$$0! = 1$$

EJEMPLO 3

Simplifique

$$\frac{r!(r+1)}{(r-1)!}$$

donde r es un número entero positivo.

Solución. Usando la definición de $r!$, podemos escribir el numerador como

$$r!(r+1) = (r+1)r! = (r+1)r(r-1)\cdots 2\cdot 1 = (r+1)r(r-1)!$$

Así,

$$\frac{r!(r+1)}{(r-1)!} = \frac{(r+1)r(r-1)!}{(r-1)!} = (r+1)r$$

TEOREMA DEL BINOMIO

La fórmula general para el desarrollo de $(a + b)^n$ se da en el siguiente resultado, conocido como **teorema del binomio.**

TEOREMA 1

Teorema del binomio

Para cualquier número entero positivo n,

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + \cdots + b^n \qquad \textbf{(27)}$$

En (27) la expresión

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r \qquad \textbf{(28)}$$

es el $(r + 1)$ término en el desarrollo de $(a + b)^n$. Para $r = 0, 1, \ldots, n$, los números

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

se llaman **coeficientes binomiales** y son, por supuesto, los mismos que aquellos obtenidos del triángulo de Pascal. Antes de probar el teorema del binomio mediante inducción matemática, consideremos algunos ejemplos.

EJEMPLO 4

Usando el teorema del binomio para desarrollar $(a + b)^4$, obtenemos (26):

$$\begin{aligned}(a + b)^4 &= a^4 + \frac{4}{1!}a^{4-1}b + \frac{4(3)}{2!}a^{4-2}b^2 + \frac{4(3)(2)}{3!}a^{4-3}b^3 + \frac{4(3)(2)(1)}{4!}b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + \frac{12}{2}a^2b^2 + \frac{24}{6}ab^3 + \frac{24}{24}b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

EJEMPLO 5

Encuentre el sexto término en el desarrollo de $(x^2 - 2y)^7$.

Solución. Puesto que (28) da el $(r + 1)$ término en el desarrollo de $(a + b)^n$, el sexto término en el desarrollo de $(x^2 - 2y)^7$ corresponde a $r = 5$ (que es, $r + 1 = 5 + 1 = 6$). Identificando $n = 7$, $r = 5$, $a = x^2$ y $b = -2y$, se deduce que el sexto término es

$$\begin{aligned}\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5!}(x^2)^{7-5}(-2y)^5 &= 21x^4(-32y^5) \\ &= -672x^4y^5\end{aligned}$$

EL TEOREMA DEL BINOMIO: UNA FORMA ALTERNA

Los coeficientes binomiales se pueden escribir de una forma más compacta usando notación factorial. Si r es cualquier número entero tal que $0 \leq r \leq n$, entonces

$$\begin{aligned}n(n-1)\cdots(n-r+1) &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}\end{aligned}$$

Así los coeficientes binomiales

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

de $a^{n-r}b^r$ para $r = 0, 1, \ldots, n$ son los mismos que $n!/r!\,(n-r)!$. Este último cociente se denota generalmente $\binom{n}{r}$. Es decir,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Por tanto, el teorema del binomio (27) se puede escribir en la forma alterna

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n \qquad \textbf{(29)}$$

La siguiente propiedad del coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ se podrá usar en la prueba del teorema del binomio. Para cualquier número entero r, $0 < r \leq n$, tenemos

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r} \tag{30}$$

Dejamos la verificación de (30) como un ejercicio (véase problema 63).

PRUEBA DEL TEOREMA

Ahora probamos el teorema del binomio mediante inducción matemática. Sustituyendo $n = 1$ en (29) obtenemos una expresión verdadera,

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1$$

puesto que $$\binom{1}{0} = \frac{1!}{0!1!} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{1}{1} = \frac{1!}{1!0!} = 1$$

Esto completa la verificación de la primera condición del principio de inducción matemática.

Para la segunda condición, suponemos que (29) es verdadera para $n = k$. Debemos demostrar, entonces, que (29) es verdadera para $n = k + 1$. Así, tenemos que

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r}b^r + \cdots + \binom{k}{k}b^k$$

es verdadera. Multiplicando ambos lados de la ecuación por $(a + b)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
(a+b)(a+b)^k &= (a+b)\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots \right.\\
&\qquad \left. + \binom{k}{r}a^{k-r}b^r + \cdots + \binom{k}{k}b^k\right]\\
&= \binom{k}{0}(a^{k+1} + a^k b) + \binom{k}{1}(a^k b + a^{k-1}b^2) + \cdots +\\
&\qquad \binom{k}{r}(a^{k-r+1}b^r + a^{k-r}b^{r+1}) + \cdots + \binom{k}{k}(ab^k + b^{k+1})\\
&= \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right]a^k b + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right]a^{k-1}b^2\\
&\qquad + \cdots + \left[\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r}\right]a^{k-r+1}b^r + \cdots + \binom{k}{k}b^{k+1}
\end{aligned}$$

De (30) y del hecho de que

$$\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0} \quad \text{y} \quad \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b\\
&\qquad + \cdots + \binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^r + \cdots + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}
\end{aligned}$$

la cual es (29) con n remplazado por $k + 1$. Por tanto, por el principio de inducción matemática, la prueba está completa.

En conclusión, notamos que el teorema del binomio se puede expresar de forma condensada usando la notación de la suma. Las ecuaciones (27) y (29) se pueden escribir así

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k$$

y
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

respectivamente. De estas formas es evidente que, puesto que el índice de la suma comienza en 0 y termina en n, un desarrollo binomial contiene $n + 1$ términos.

EJERCICIO 11.4

En los problemas 1 al 12, calcule la expresión dada.

1. $4!$ **2.** $6!$ **3.** $\frac{3!}{6!}$

4. $5!/4!$ **5.** $2!\,4!$ **6.** $0!\,6!$

7. $\binom{6}{2}$ **8.** $\binom{5}{1}$ **9.** $\binom{10}{9}$

10. $\binom{3}{0}$ **11.** $\binom{7}{7}$ **12.** $\binom{4}{2}$

En los problemas 13 al 16, simplifique la expresión dada.

13. $\frac{(n+1)!}{n!}$ **14.** $\frac{(n-2)!}{(n-4)!}$

15. $\frac{(n-1)!(n+2)!}{n!(n+1)!}$ **16.** $\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}$

En los problemas 17 al 26, use la notación factorial para reescribir la expresión dada.

17. $6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1$

18. $8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1$

19. $1000{\cdot}999{\cdot}998{\cdot}997\cdots1$

20. $(m+1)m(m-1)(m-2)\cdots1$

21. $(8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1){\cdot}(4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1)$

22. $\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$

23. $8{\cdot}7$

24. $20{\cdot}19{\cdot}18{\cdot}17$

25. $m(m-1)(m-2)$

26. $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r)\; n \geq r+1$

En los problemas 27 al 32, conteste verdadero o falso.

27. $10! = 10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2$ **28.** $8! = 8{\cdot}7$

29. $\frac{6!}{2} = 3!$ **30.** $4! + 4! = 8!$

31. $(n+2)(n+1)! = (n+2)!$ **32.** $\frac{(n+1)!}{n+1} = n!$

En los problemas 33 al 42, use el teorema del binomio para expandir la expresión dada.

33. $(x^4 - 3y^2)^3$ **34.** $(x^4 - y^4)^3$

35. $(x^{-2} + y^{-2})^3$ **36.** $(x^{-3} + 1)^4$

37. $(x^{1/4} + y^{1/4})^4$ **38.** $(2 + x^2)^4$

39. $(x^3 - y^3)^5$ **40.** $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^5$

41. $((x-y)+z)^3$ **42.** $(x-(y+z))^5$

43. Refiriéndose al triángulo de Pascal, determine los coeficientes de $(a+b)^n$ para $n = 8, n = 9$.

44. Si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, use el teorema del binomio para simplificar el cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En los problemas 45 al 54, halle el término indicado en el desarrollo de la expresión dada.

45. El séptimo término de $(a+b)^7$

46. El segundo término de $(x-y)^6$

47. El tercer término de $(x^3 + y^3)^4$

48. El cuarto término de $(x-4)^5$

49. El quinto término de $(3+y)^8$

50. El sexto término de $(a-b)^6$

51. El noveno término de $(x+y)^{11}$

52. El décimo término de $(x+1)^9$

53. El onceavo término de $(2-x)^{10}$

54. El duodécimo término de $(3-t)^{13}$

55. Halle el coeficiente del término constante de $(y + 1/y)^{12}$

56. Halle los primeros cuatro términos en el desarrollo de $(x-y^2)^{10}$

57. Use los primeros tres términos en el desarrollo de $(1-0.01)^6$ para encontrar una aproximación a $(0.99)^6$. Compare con la respuesta obtenida en la calculadora.

58. Use los primeros tres términos en el desarrollo de $(1+0.01)^8$ para encontrar una aproximación a $(1.01)^8$. Compare con la respuesta obtenida en la calculadora.

59. Sin sumar los términos, determine el valor de $\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}6^k$

60. Sin sumar los términos, determine el valor de $\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}2^k3^{5-k}$

61. Use el teorema del binomio para demostrar

(a) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$

(b) $\sum_{k=0}^{5}\binom{n}{k}=2^n$

62. Pruebe que:

(a) $\binom{n}{r-1}+\binom{r}{n}=\binom{n+1}{r}\quad 0<r\le n$

(b) $\binom{n}{r+1}=\frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}\quad 0\le r<n$

63. Sin utilizar calculadora, demuestre que:

(a) $(1.0003)^{10} > 1.003004$

(b) $(1.01)^{50} > 1.5$

64. Encuentre la suma de los coeficientes en el polinomio $(4x^3 - x)^6$ después de ser expandido y simplificado.

11.5 Permutaciones y combinaciones

Una gran variedad de problemas prácticos requiere contar el número de maneras en las cuales puede ocurrir algo. Por ejemplo, el prefijo del teléfono de cierta universidad es 642. Si al prefijo los siguen cuatro dígitos, ¿cuántos números telefónicos son posibles antes de que se necesite un segundo prefijo? Seremos capaces de resolver este y otros (ejemplo 2) problemas usando las técnicas de enumeración que se analizan en esta sección.

DIAGRAMAS DE ARBOL

Comencemos por considerar un problema más abstracto. ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden hacer con tres letras a, b y c, usando dos letras al tiempo? Una manera de resolver este problema es enumerar todos los posibles arreglos. Como se muestra en la figura 1, se puede usar un **diagrama de árbol** para ilustrar todas las posibilidades.

Desde el punto llamado "comienzo", segmentos de recta salen hacia cada una de las tres posibles elecciones para la primera letra. Desde cada uno de éstos, un segmento de recta sale hacia cada una de las posibles elecciones para una segunda letra. Cada posible combinación corresponde a un camino o **rama del árbol** que empieza en el punto "comienzo" y va hacia la derecha a través del árbol. Vemos que hay seis diferentes arreglos

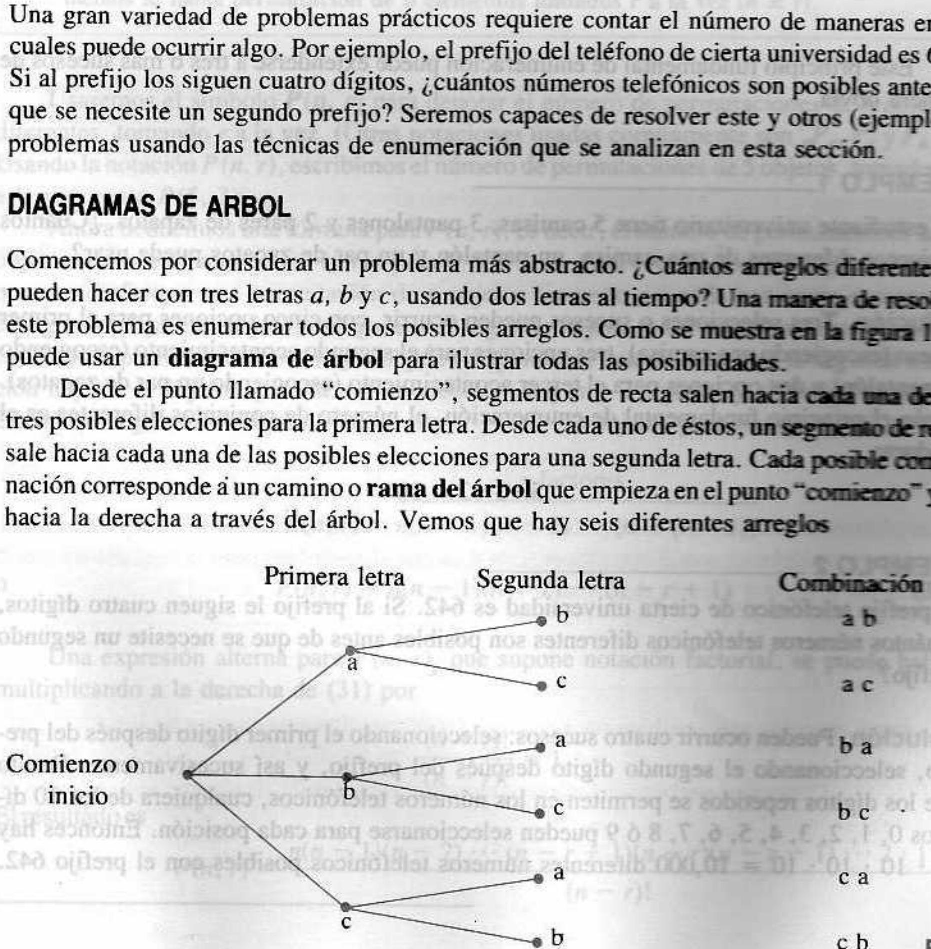


FIGURA 1

Otra manera de resolver este problema es reconocer que cada arreglo consta de una selección de letras para llenar los dos espacios en blanco indicados

Primera letra · Segunda letra

Cualquiera de las tres letras a, b o c se pueden escoger para la primera posición. Una vez que se haya hecho esta elección, cualquiera de las dos letras restantes se puede escoger para la segunda posición. Puesto que cada una de las tres letras de la primera posición se puede asociar con cualquiera de las dos restantes, el número total de arreglos está dado por el producto

Primera letra · Segunda letra

Este simple ejemplo ilustra el **principio fundamental de enumeración**.

Principio fundamental de enumeración

Si un suceso puede ocurrir de m maneras diferentes y, después de que ha sucedido, un segundo suceso puede ocurrir de n diferentes maneras, entonces el número total de las maneras en las cuales ambos sucesos pueden ocurrir es el producto de mn.

Este principio fundamental de enumeración puede extenderse a tres o más sucesos de manera obvia.

EJEMPLO 1

Un estudiante universitario tiene 5 camisas, 3 pantalones y 2 pares de zapatos. ¿Cuántos conjuntos diferentes de una camisa, un pantalón y un par de zapatos puede usar?

Solución. Tres selecciones o sucesos pueden ocurrir, con cinco opciones para el primer suceso (escogiendo una camisa), tres opciones para el segundo acontecimiento (escogiendo un pantalón) y dos opciones para el tercer acontecimiento (escogiendo un par de zapatos). Según el principio fundamental de enumeración, el número de conjuntos diferentes es el producto

$$5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$$

EJEMPLO 2

El prefijo telefónico de cierta universidad es 642. Si al prefijo le siguen cuatro dígitos, ¿cuántos números telefónicos diferentes son posibles antes de que se necesite un segundo prefijo?

Solución. Pueden ocurrir cuatro sucesos: seleccionando el primer dígito después del prefijo, seleccionando el segundo dígito después del prefijo, y así sucesivamente. Puesto que los dígitos repetidos se permiten en los números telefónicos, cualquiera de los 10 dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9 pueden seleccionarse para cada posición. Entonces hay $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10{,}000$ diferentes números telefónicos posibles con el prefijo 642.

EJEMPLO 3

¿Cuántas formas diferentes hay para ordenar las letras de la palabra CARTON?

Solución. Puesto que CARTON tiene 6 letras diferentes, hay 6 sucesos: escoger la primera letra, escoger la segunda letra y así sucesivamente. Se puede escoger cualquiera de las seis letras para la primera posición; entonces, cualquiera de las 5 letras restantes se puede escoger para la segunda posición; luego, cualquiera de las 4 letras restantes se puede escoger para la tercera posición y así sucesivamente. El número total de ordenaciones es $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

PERMUTACIONES

Permutación es un arreglo ordenado que se hace usando algunos o todos los elementos de un conjunto, *sin repetirlos*. Esto significa que ningún elemento del conjunto aparece más de una vez en el arreglo. Por ejemplo, 312 es una permutación de los dígitos del conjunto $\{1, 2, 3\}$, pero 112 no lo es. En el ejemplo 3, cada uno de los nuevos arreglos de las letras de la palabra CARTON (por ejemplo CONTRA) es una permutación. De forma más general, tenemos la siguiente definición.

DEFINICION 4

Un arreglo ordenado de r elementos seleccionados de un conjunto de n distintos elementos se llama **permutación de n elementos tomados r a la vez** ($n \geq r$).

Usaremos el símbolo $\boldsymbol{P(n, r)}$ para denotar el número de permutaciones de n objetos diferentes, tomando r a la vez. (Otras notaciones usadas comúnmente son ${}_nP_r$, P_r^n y $P_{n,r}$). Usando la notación $P(n, r)$, escribimos el número de permutaciones de 5 objetos, tomados 3 a la vez como $P(5, 3)$.

Ahora deducimos una fórmula para $P(n, r)$, es decir, el número de permutaciones de n objetos distintos tomando r a la vez para $0 \leq r \leq n$. Para $r \geq 1$, podremos pensar en el proceso de formar una permutación de n objetos tomando a r cada vez como r sucesos: escogemos el primer objeto, escogemos el segundo objeto, y así sucesivamente. Cuando hacemos la primera elección, hay n objetos disponibles; cuando hacemos la segunda elección hay $n - 1$ objetos; para la tercera elección, hay $n - 2$ objetos; y así sucesivamente. Cuando escogemos el objeto r-ésimo hay $n - (r - 1)$ objetos para escoger. Así,

$$P(n, r) = \overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1))}^{r \text{ factores}}$$

o

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \tag{31}$$

Una expresión alterna para $P(n, r)$, que supone notación factorial, se puede hallar multiplicando a la derecha de (31) por

$$\frac{(n-r)!}{(n-r)!} = 1$$

El resultado es

$$P(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 2 \cdot 1}{(n-r)!}$$

o $$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{32}$$

Si $r = n$, la fórmula (32) se convierte en

$$P(n, n) = \frac{n!}{0!} = n!$$

puesto que 0! se define como 1. Este resultado es el mismo que el obtenido usando el principio de enumeración

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$$

puesto que cualquiera de los n objetos puede escogerse primero, cualquiera del resto de los objetos puede escogerse segundo, y así sucesivamente. Si $r = 0$, definimos $P(n, 0) = 1$, lo cual es consistente con (32).

EJEMPLO 4

Calcule **(a)** $P(5, 3)$; **(b)** $P(5, 1)$; y **(c)** $P(5, 5)$.

Solución. Usando la fórmula (32) encontramos que

(a) $P(5, 3) = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (2!)}{2!} = 60$

(b) $P(5, 1) = \dfrac{5!}{(5-1)!} = \dfrac{5!}{4!} = \dfrac{5 \cdot (4!)}{4!} = 5$

(c) $P(5, 5) = \dfrac{5!}{(5-5)!} = \dfrac{5!}{0!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 120$

EJEMPLO 5

En una pista se encuentran 6 atletas y entran en el carril de los 100 metros. ¿De cuántas maneras se pueden organizar para ganar medallas de oro, de plata y de bronce?

Solución. Deseamos contar el número de maneras de organizar a 3 de los 6 atletas en la posición ganadora. La solución está dada por

$$P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 120$$

Este problema también se puede resolver usando el principio fundamental de enumeración. Puesto que se deben hacer 3 elecciones, con 6 atletas disponibles para la medalla de oro, 5 para la de plata y 4 para la de bronce, encontramos que $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

EJEMPLO 6

¿Cuántos arreglos son posibles para colocar 10 libros diferentes en un anaquel?

Solución. Deseamos encontrar el número de permutaciones de 10 objetos que se toman 10 a la vez, o

$$P(10, 10) = 10! = 3{,}628{,}800$$

COMBINACIONES

En el análisis anterior estábamos interesados en el número de maneras de arreglar o de escoger r elementos de un conjunto de n elementos, donde se consideraba el orden en el que se debían arreglar o escoger. Sin embargo, en ciertas aplicaciones el orden de los elementos no es importante. Por ejemplo, si se debe escoger un comité de dos entre 4 estudiantes Angie, Brandon, Cecilia y David, el comité formado al escoger a Angie y a Brandon es el mismo que el formado al escoger a Brandon y a Angie. Una selección de objetos en los cuales el orden no establece ninguna diferencia se llama **combinación.**

DEFINICION 5

Un subconjunto de r elementos de un conjunto de n elementos se llama **combinación de n elementos tomando r a la vez** ($n \geq r$).

Usamos el símbolo $C(n, r)$ para denotar el número de combinaciones de n objetos distintos tomando r a la vez. (Otras notaciones que se usan comúnmente son ${}_nC_r$, C^n_r, y $C_{n,r}$.) Deseamos obtener una fórmula para $C(n, r)$. Al comienzo de esta sección vimos que hay 6 ordenamientos (permutaciones) de las tres letras a, b y c tomando 2 a la vez.

$$\text{ab} \quad \text{ac} \quad \text{ba} \quad \text{bc} \quad \text{ca} \quad \text{cb} \tag{33}$$

Si descartamos el orden en el que las letras están enumeradas tenemos 3 combinaciones:

$$\text{ab} \quad \text{ac} \quad \text{bc}$$

Así, $C(3, 2) = 3$. Vemos que cada una de estas combinaciones se puede arreglar de $2!$ modos, para dar la lista de permutaciones (33). Por tanto,

$$P(3, 2) = 6 = 2!C(3, 2)$$

En general, para $0 < r \leq n$, cada una de las combinaciones $C(n, r)$ se puede arreglar nuevamente en $r!$ maneras diferentes, así que

$$P(n, r) = r!C(n, r),$$

o

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{r!}$$

Así,

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} \tag{34}$$

Para $r = 0$, definimos $C(n, 0) = 1$, lo cual es consistente con la fórmula (34).

Nótese que $C(n, r)$ es idéntica al coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ definido en la sección 11.4.

EJEMPLO 7

Calcule **(a)** $C(5, 3)$; **(b)** $C(5, 1)$; and **(c)** $C(5, 5)$.

Solución. Usando la fórmula (34), tenemos lo siguiente.

(a) $C(5, 3) = \dfrac{5!}{(5-3)!3!} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!3!} = 10$

(b) $C(5, 1) = \dfrac{5!}{(5-1)!1!} = \dfrac{5!}{4!1!} = 5$

(c) $C(5, 5) = \dfrac{5!}{(5-5)!5!} = \dfrac{5!}{0!5!} = 1$

EJEMPLO 8

¿Cuántas rondas diferentes de 5 cartas pueden distribuirse de una baraja de 52 cartas?

Solución. Puesto que una ronda es la misma, no importa el orden de las cartas, usamos combinaciones para resolver este problema. La solución es

$$C(52, 5) = \frac{52!}{47!5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{47!5!}$$

$$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2{,}598{,}960$$

Nótese que cancelamos el mayor de los dos factores 47! y 5! para simplificar el cálculo de $C\ (52, 5)$.

EJEMPLO 9

Un club de cartas tiene 8 miembros.

(a) ¿De cuántas maneras se pueden escoger 3 miembros para que sean presidente, secretario y tesorero?

(b) ¿De cuántas maneras se puede escoger un comité de 3 miembros?

Solución. Para escoger los funcionarios importa el orden, mientras que para escoger a un comité el orden de la selección no afecta al comité resultante. Así en (a) contamos permutaciones y en (b) contamos combinaciones. Encontramos que

(a) $P(8, 3) = \dfrac{8!}{5!} = 336$; **(b)** $C(8, 3) = \dfrac{8!}{5!3!} = 56$

Nota de advertencia: al decidir si usamos la fórmula para $P(n, r)$ o $C(n, r)$, consideramos lo siguiente. Se trabaja con permutaciones si se están considerando arreglos en los cuales los diferentes órdenes de los mismos objetos se deben contar. Se trabaja con combinaciones si se están considerando maneras de escoger objetos en los cuales el orden de los objetos escogidos no establece ninguna diferencia.

EJEMPLO 10

La junta directiva de un periódico universitario tiene 6 reporteros del penúltimo año y 8 del último año. ¿De cuántas maneras se pueden escoger 2 reporteros de penúltimo año y 3 del último año para una tarea especial?

Solución. Pueden ocurrir dos sucesos: la selección de 2 reporteros de penúltimo año y la selección de 3 de último año.

Puesto que el orden en el cual se escogen los 2 reporteros de penúltimo año no establece ninguna diferencia, contamos combinaciones. Por tanto, el número de maneras de escoger los 2 reporteros de penúltimo año es

$$C(6, 2) = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

Para seleccionar los 3 reporteros del último año, contamos de nuevo con combinaciones (puesto que el orden no importa). El número de formas para escoger los 3 reporteros de último año es

$$C(8, 3) = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

Así escogemos los reporteros de penúltimo año de 15 maneras, y por cada una de estas selecciones, hay 56 formas de seleccionar a los reporteros del último año. Aplicando el principio fundamental de enumeración, obtenemos

$$C(6, 2) \cdot C(8, 3) = 15 \cdot 56 = 840$$

maneras de hacer las elecciones para la tarea especial.

EJEMPLO 11

Un almacén de quesos tiene 10 variedades de queso nacional y 8 variedades de queso importado. ¿De cuántas maneras se puede colocar en una vitrina una selección de 6 quesos, que tenga 2 variedades de queso nacional y 4 de queso importado?

Solución. Las variedades nacionales se pueden escoger de $C(10, 2)$ maneras y las variedades importadas de $C(8, 4)$ maneras. Así, por el principio fundamental de enumeración, los 6 quesos se pueden seleccionar de $C(10, 2) \cdot C(8, 4)$ formas. Hasta este momento de la solución, el orden no ha sido importante para hacer la *selección* de los quesos. Ahora observamos que *cada* selección de 6 quesos se puede colocar o arreglar en la vitrina de $P(6, 6)$ maneras. Así, el número total de maneras es

$$C(10, 2) \cdot C(8, 4) \cdot P(6, 6) = \frac{10!}{8!2!} \cdot \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{6!}{(6-6)!}$$
$$= 2,268,000$$

EJERCICIO 11.5

Use el diagrama de árbol para resolver los problemas 1 al 4.

1. Enumere todos los posibles números de tres dígitos que se puedan formar con 1, 2 y 3 sin repetir ningún dígito.

2. Si una moneda se arroja 5 veces, enumere todas las posibles sucesiones de caras (C) y sellos (S).

3. Si se lanza un dado y luego una moneda, enumere los resultados posibles.

4. Si una persona lanza un dado, y luego otra persona lanza otro dado, enumere los resultados posibles.

Use el principio fundamental de enumeración para resolver los problemas del 5 al 8.

5. Una cafetería ofrece 6 ensaladas, 4 entradas, 8 platos fuertes y 5 postres. ¿Cuántas comidas diferentes se pueden formar seleccionando una muestra de cada categoría?

6. Cinco carreteras de doble sentido unen la ciudad A con la ciudad B. ¿De cuántas maneras diferentes se puede ir de A hacia B y regresar de B hacia A, si para el regreso se usa una carretera distinta a la que se usó en la ida?

7. ¿Cuántos prefijos diferentes de tres dígitos de teléfono son posibles si ni 0, ni 1, ni 9 pueden ocupar el primer lugar?

8. Si una placa tiene dos letras seguidas de cuatro números, ¿cuántas placas son posibles si la primera letra no puede ser O ni I?

En los problemas 9 al 16, calcule $P(n, r)$

9. $P(5, 2)$
10. $P(5, 4)$
11. $P(7, 1)$
12. $P(7, 0)$
13. $P(7, 7)$
14. $P(8, 2)$
15. $P(100, 3)$
16. $P(100, 98)$

Use permutaciones para resolver los problemas 17 al 20.

17. ¿De cuántas maneras pueden quedar los lugares de 5 competidores de una carrera de 100 metros? (No puede haber empates).

18. Un estudiante tiene que realizar 4 exámenes. ¿En cuántos órdenes diferentes puede el estudiante realizar sus exámenes?

19. En una rifa se sortean 5 regalos distintos entre 20 personas. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ganarse los regalos? ¿Y si fueran 20 regalos distintos?

20. Quince personas participan en una elección para ocupar 4 puestos distintos en una compañía. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ocuparse los puestos?

En los problemas 21 al 28, calcule $C(n, r)$.

21. $C(6, 2)$
22. $C(6, 1)$
23. $C(100, 2)$
24. $C(100, 100)$
25. $C(20, 18)$
26. $C(10, 2)$
27. $C(10, 0)$
28. $C(9, 5)$

Use combinaciones en los problemas 29 al 32.

29. En la facultad de matemática de una universidad se desarrolla una elección para escoger 5 profesores en la cátedra de análisis. Se presentan 12 candidatos. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ocupar las 5 plazas?

30. Se desea seleccionar 3 estudiantes para formar parte de un comité. Si hay 10 candidatos, ¿de cuántas maneras diferentes se puede hacer la selección?

31. Se desea que cada equipo de baloncesto de los 4 finalistas de una competencia se identifique por un color. Si hay 9 colores disponibles, ¿de cuántas maneras diferentes pueden escogerse los colores que representarán a los 4 equipos finalistas?

32. ¿De cuántas maneras se pueden escoger 5 marcas diferentes entre 10 disponibles para conformar una exposición?

En los problemas 33 al 44, use una o más de las técnicas tratadas en esta sección para resolver los problemas de enumeración dados.

33. Veintidós países participan en las olimpíadas de matemática. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden adjudicar el primer, segundo y tercer premios?

34. Un club de inversionistas tiene una membresía de 6 mujeres y 8 hombres. Se va a formar un comité directivo de 5 miembros. ¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer si:
   (a) debe haber tres mujeres y dos hombres en el comité;
   (b) debe haber al menos una mujer;
   (c) los cinco deben ser del mismo sexo?

35. Se va a formar un comité de 6 miembros del senado de un grupo que consta de 8 conservadores y 10 liberales. ¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer si:
   (a) debe haber 3 conservadores y 3 liberales en el comité;
   (b) debe haber por lo menos un conservador en el comité;
   (c) todos deben ser liberales?

36. Si va a preparar un tour para ir a 3 lugares diferentes de 8 posibles, ¿de cuántas maneras puede prepararse si:
   (a) el orden de los lugares a visitar no importa;
   (b) el orden de los lugares a visitar sí importa;
   (c) el orden del primer lugar a visitar sí importa, pero el orden de los otros dos no importa?

37. Una compañía de ballet tiene un repertorio que consta de 10 clásicos, 12 contemporáneos y 16 de danza moderna. Se desea formar un espectáculo a tres actos, ¿de cuántas maneras se puede formar si:
   (a) el primero debe ser clásico;
   (b) los dos últimos deben ser clásicos;
   (c) deben estar las tres manifestaciones representadas pero no importa el orden;
   (d) deben estar las tres manifestaciones representadas pero sí importa el orden?

38. Un examen consta de 10 preguntas de selección cada una con 4 alternativas.

(a) ¿Cuántos conjuntos de respuestas pueden haber?

(b) ¿Cuántos de éstos tienen 7 respuestas correctas?

39. En Master Mind, un juego de tablero popular originario de Inglaterra, un jugador "inventa" un código secreto llenando 4 casillas con cualquiera de 6 colores. ¿Cuántos códigos son posibles si:

(a) no se permiten repeticiones;

(b) se permiten repeticiones;

(c) se permiten repeticiones y casillas vacías?

40. Alguna propaganda para el juego Super Master Mind (una versión más difícil del juego Master Mind descrito en el problema 39) se jacta de que es posible hacer más de 59,000 códigos. Si Super Master Mind implica llenar 5 casillas con cualquiera de los 8 colores, y si se permiten casillas vacías y repeticiones, ¿es correcta la presunción?

41. De 6 consonantes diferentes y 3 vocales diferentes, ¿cuántas palabras de 6 letras se pueden hacer que consten de 4 consonantes diferentes y dos vocales diferentes?

42. En el problema 41, ¿cuántas palabras se pueden formar de 3 letras si:

(a) la del medio es vocal;

(b) la primera es consonante y no se permite repetir letras?

43. Dados 10 puntos fijos en una circunferencia, ¿cuántos polígonos convexos cuyos vértices estén escogidos de entre estos puntos se pueden formar?

44. Una persona tiene un billete de cada una de las siguientes cantidades: US$1, US$5, US$10, US$20 y US$50. ¿Cuántos artículos se pueden pagar sin recibir vuelto?

11.6 Introducción a la probabilidad

Como mencionamos en el capítulo introductorio, el desarrollo de la teoría matemática de la **probabilidad** fue motivado inicialmente por preguntas que se formularon en el siglo XVII acerca de los juegos de azar. Hoy las aplicaciones de la probabilidad se encuentran en medicina, deportes, leyes, negocios y en muchas otras áreas. En esta sección presentamos solamente una breve introducción a este tema fascinante.

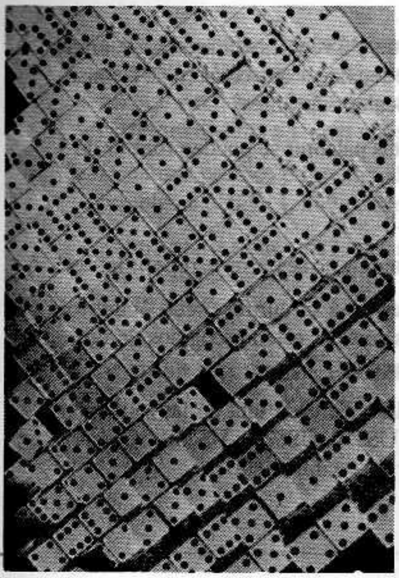
Consideremos un experimento que tiene un número finito de posibles **resultados** o consecuencias, cada uno de los cuales tiene la misma posibilidad de ocurrir. Por ejemplo, cuando una moneda se lanza al aire, hay igualmente dos posibles resultados: que caiga por cara o por sello. Otro ejemplo es hacer rodar un dado, donde hay una oportunidad igual de obtener un 1, 2, 3, 4, 5 ó 6. El conjunto S de todos los posibles resultados de un experimento en particular se llama **espacio muestral.** Así, si el experimento consiste en arrojar una moneda y denotamos el resultado de obtener cara o sello con H o T, respectivamente, entonces el espacio muestral se puede escribir en notación de conjuntos como

$$S = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$$

El espacio muestral para el experimento de hacer rodar un dado es

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Cualquier subconjunto de un espacio muestral se llama **suceso**. Al hacer rodar un dado, el suceso $E_1 = \{4\}$ consiste en el resultado de obtener un 4 en la rodada. El suceso E_2, consiste en obtener un número impar cuando se lanza el dado y puede representarse con $E_2 = \{1, 3, 5\}$. El número de resultados que pertenecen a un suceso E se representa con $n(E)$, y el



número de resultados del espacio muestral S con $n(S)$. Así, en el experimento de tirar un dado, si E_1 es el suceso que obtiene un 4, entonces $n(E_1) = 1$ y $n(S) = 6$.

Ahora definimos lo que significa probabilidad de un suceso.

DEFINICION 6

Sea S el espacio muestral de un experimento y E un suceso. Si cada resultado del experimento es igualmente probable, entonces la probabilidad del evento E, escrito $P(E)$, está dada por

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

donde $n(E)$ y $n(S)$ denotan el número de resultados de E y S, respectivamente.

EJEMPLO 1

(a) Encuentre la probabilidad de obtener cara si se lanza una moneda.
(b) Encuentre la probabilidad de obtener 4 si se lanza un dado.
(c) Encuentre la probabilidad de obtener un número par si se lanza un dado.

Solución. Para cada experimento determinamos los conjuntos E y S y luego usamos la definición para hallar la probabilidad $P(E)$.

(a) $E = \{H\}$, $S = \{H, T\}$, $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{2}$

(b) $E = \{4\}$, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{6}$

(c) $E = \{2, 4, 6\}$, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

EJEMPLO 2

Encuentre la probabilidad de obtener un total de 7 cuando se lanzan dos dados.

E = Total de 7 en dos dados

Primer dado	1	2	3	4	5	6
Segundo dado	6	5	4	3	2	1

Solución. Puesto que hay 6 números en cada dado, concluimos del principio fundamental de enumeración que hay $6 \cdot 6 = 36$ posibles resultados en el espacio muestral. En la tabla adjunta, hemos enumerado las posibles maneras de obtener un total de 7. Vemos que hay 6. Así, la probabilidad es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

EJEMPLO 3

Una bolsa contiene 5 canicas blancas y 3 negras. Si se sacan 3 canicas al azar, halle la probabilidad de que todas sean blancas.

Solución. El espacio muestral S del experimento es el conjunto de todas las combinaciones posibles de 3 canicas que se han sacado de las 8 que había en la bolsa. El número de maneras de escoger 3 canicas de una bolsa de 8 es $C(8, 3)$. De igual forma, el número de maneras de escoger 3 canicas blancas de 5 blancas es $C(5, 3)$. Puesto que el suceso E es "todas las canicas son blancas", tenemos

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{C(5,3)}{C(8,3)} = \frac{\dfrac{5!}{3!2!}}{\dfrac{8!}{3!5!}} = \frac{5}{28}$$

Puesto que cualquier suceso E es un subconjunto del espacio muestral S, se deduce que $0 \leq n(E) \leq n(S)$. Así,

$$0 \leq \frac{n(E)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)}$$

o

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

Si $E = S$, entonces $P(E) = 1$; en tanto que, si E no tiene elementos, entonces $P(E) = 0$. Si $P(E) = 1$, entonces E siempre sucede y E se llama **suceso cierto**. Por otra parte, si $P(E) = 0$, entonces E es un **suceso imposible**, es decir, E nunca sucede.

El conjunto de todos los elementos del espacio muestral que no pertenece a E se llama **complemento de E** y se denota con E'. Por ejemplo, en el experimento de un dado, si E es el evento de "obtener un 4", entonces, E' es el evento de "obtener cualquier número *excepto* 4".

Puesto que $n(E) + n(E') = n(S)$, se deduce que

$$\frac{n(E)}{n(S)} + \frac{n(E')}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)}$$

Por consiguiente, $\qquad P(E) + P(E') = 1$, ó

$$P(E) = 1 - P(E') \qquad \textbf{(35)}$$

Esta fórmula nos permite encontrar la probabilidad de un suceso E, si sabemos la probabilidad de su complemento E'. Algunas veces es más fácil calcular $P(E')$ que $P(E)$. También es interesante notar que la ecuación $P(E) + P(E') = 1$ puede interpretarse diciendo que algo debe suceder.

EJEMPLO 4

Si se sacan 5 cartas de una baraja de 52 y no se remplazan, encuentre la probabilidad de obtener por lo menos un as.

Solución. Sea E el suceso de obtener por lo menos un as. Puesto que E consiste en las 5 manos de cartas que contienen 1, 2, 3 ó 4 ases, es realmente más fácil considerar a E' y usar la fórmula (35). El espacio muestral S consta de todas las posibles manos de 5 cartas. De la sección 11.5 tenemos que $n(S) = C(52, 5)$. Puesto que 48 de las 52 cartas no son ases, hallamos $n(E') = C(48, 5)$. Así,

$$P(E') = \frac{C(48, 5)}{C(52, 5)} = \frac{1,712,304}{2,598,960} \approx 0.6588$$

y, por tanto, $\qquad P(E) = 1 - P(E') \approx 0.3412$

EJERCICIO 11.6

En los problemas 1 al 4, use la notación de conjunto para escribir el espacio muestral del experimento dado.

1. Se lanzan dos monedas.
2. Se lanzan tres monedas.
3. Se lanza una moneda y después un dado.
4. Se lanzan dos dados.

En los problemas 5 al 12, encuentre la probabilidad en el suceso dado.

5. Sacar un as en una baraja de 52 cartas.
6. Sacar un diamante en una baraja de 52 cartas.
7. Sacar 6 con un solo dado.
8. Sacar un total de 8 con dos dados.
9. Sacar un total de 7 u 11 con dos dados.
10. Sacar 5 con uno de dos dados; o con los dos dados.
11. Obtener sólo caras cuando se lancen cuatro monedas.
12. Obtener al menos tres caras cuando se lancen cuatro monedas.

En los problemas 13 al 16, encuentre la probabilidad de obtener la mano indicada, sacando 5 cartas sin remplazarlas, en una baraja de 52 cartas.

13. Cuatro de la misma clase (por ejemplo 4 reyes).
14. Tres de una misma clase y las otras dos también de una misma clase.
15. Escalera de cinco cartas, todas del mismo palo.
16. Todas de un mismo palo.

En los problemas 17 al 20, use la fórmula (35) para hallar la probabilidad del evento dado.

17. Obtener al menos un rey si se sacan 5 cartas sin remplazarlas de una baraja de 52 cartas.
18. Obtener al menos un diamante si se sacan 5 cartas sin remplazarlas de una baraja de 52 cartas.
19. Obtener al menos una cara al lanzar 5 veces una moneda.
20. Obtener al menos un cinco cuando se lanzan dos dados.
21. Suponga que la probabilidad de tener un niño es la misma que de tener una niña. Encuentre la probabilidad de que una familia con cinco hijos tenga al menos una niña.
22. Al poner los regalos de navidad de cada uno de sus tres hijos, a una pareja se le olvidó ponerles las tarjetas de felicitación que los identificaban. Si había un regalo para cada hijo y se les puso la tarjeta al azar, halle la probabilidad de que:
    (a) cada tarjeta esté con el regalo que corresponde;
    (b) al menos una tarjeta esté con el regalo que le corresponde.
23. En una oficina se rifan tres cheques de US$1,000 cada uno entre sus empleados. Si hay 8 empleados varones y 5 empleadas mujeres, halle la probabilidad de que:
    (a) los tres ganadores sean hombres;
    (b) al menos un ganador sea hombre.
24. Durante los últimos 20 años un profesor de matemática ha otorgado sólo 80 calificaciones de A y 240 de B a los 2,000 estudiantes que ha tenido. ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno que se inscriba al próximo curso:
    (a) obtenga una A;
    (b) obtenga una A o una B?
25. En un examen de 10 preguntas de selección con 4 alternativas para cada pregunta, si un estudiante contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de:
    (a) que el estudiante obtenga el 100% de respuestas correctas;
    (b) que el estudiante obtenga el 70% de respuestas correctas?
26. Si dos sucesos E_1 y E_2 no tienen elementos en común, los sucesos se llaman mutuamente excluyentes. Pruebe que para tales sucesos,
    $$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$
    [*Sugerencia*: si E_1 y E_2 no tienen elementos en común, entonces $n(E_1$ È $E_2) = n(E_1) + n(E_2)$].

En los problemas 27 al 30, use el resultado del problema 26 para encontrar la probabilidad indicada.

27. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 u 11 en un lanzamiento con dos dados?
28. Para su cena, una pareja debe escoger una botella de vino al azar; hay 8 botellas de clase C, 4 de clase B y 2 de clase A; ¿cuál es la probabilidad de que escoja una botella de clase A o de clase B?
29. Un dado ha sido cargado para que las probabilidades de obtener 1, 2, 3, 4, 5 y 6 sean respectivamente de
    $$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12} \text{ y } \frac{1}{12}.$$
    Encuentre la probabilidad de obtener en un lanzamiento
    (a) un número menor que 3;
    (b) un número par;
    (c) un número mayor que 4.
30. Una persona que se encuentra a oscuras escoge un calcetín entre sus 8 calcetines negros, 6 azules, 4 blancos, 4 cremas y 2 marrones; ¿cuál es la probabilidad de que escoja uno negro o uno azul?
31. Una caja contiene 25 tarjetas numeradas del 1 al 25. Se sacan 5 tarjetas al azar. Encuentre la probabilidad de cada evento:
    (a) las 5 tarjetas están numeradas con números impares;
    (b) al menos una tarjeta está numerada con un número impar;
    (c) el producto de los números de las cinco tarjetas es par.

32. Las letras de M A T E M A T I C A están escritas en 10 tarjetas y ordenadas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que diga matemática?

33. Como se muestra en la figura 2, un dado de 12 lados se puede construir en un dodecaedro regular. Si cada uno de los números de 1 a 6 aparece dos veces en el dado, pruebe que la posibilidad de cada resultado es la misma que para un dado ordinario de 6 lados.

FIGURA 2

CONCEPTOS IMPORTANTES

Sucesión
- término
- sucesión finita
- sucesión infinita
- término general
- fórmula de recursión

Progresión aritmética
- diferencia
- media aritmética

Progresión geométrica
- razón

Notación de suma
- índice de suma

Serie
- serie aritmética
- serie geométrica

Principio de inducción matemática

Triángulo de Pascal

Notación factorial

Teorema del binomio
- desarrollo del binomio
- coeficiente binomial

Diagrama de árbol

Principio fundamental de enumeración

Permutación

Combinación

Probabilidad
- sucesos igualmente probables

Espacio muestral
- resultado
- suceso
- suceso cierto
- suceso imposible

EJERCICIO DE REPASO

En los problemas 1 al 10, conteste verdadero o falso.

1. 3.10! ______

2. $\frac{20!}{19!} = 20$ ______

3. $(k+1)k! = (k+1)!$ ______

4. $10! + 10! = 20!$ ______

5. No hay término constante en el desarrollo de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{20}$. ___

6. $C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!}$. ______

7. $\binom{n}{r} = C(n,r)$. ______

8. Hay exactamente 10 términos en el desarrollo de $(x-y)^{10}$. ___

9. Una sucesión para la cual $a_{n+1} = a_n^2$ es una progresión geométrica. ______

10. Si E es un suceso de un espacio muestral $P(E \cup E') = 1$. ___

En los problemas 11 al 14, enumere los primeros cinco términos de la sucesión con el término general especificado.

11. $a_n = 3(2-n) + 8$

12. $a_n = -10 + 8n$

13. $a_n = (-1)^{n-1}n$

14. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}3^n}{n+2}$

15. Enumere los 5 primeros términos de la sucesión definida por $a_1 = -1, \quad a_2 = 1 \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$.

16. Halle el término vigésimo de una sucesión aritmética cuyo primer término es 2 y el cuarto término es 8.

17. Encuentre el primer término de una sucesión geométrica cuyo cuarto término es 1/3 y el quinto es –1.

18. Halle la suma de los primeros veinte términos de la sucesión definida en el problema 16.

19. Halle la suma de los primeros 8 términos de la sucesión definida en el problema 17.

20. Escriba $0.223\overline{23}$ como una serie geométrica infinita y exprese la suma como un cociente de números enteros.

21. Determine quién obtiene un mejor regalo al cabo de 10 años

(a) El que recibe lo ahorrado por un depósito de US$200 cada mes.

(b) El que recibe lo ahorrado si cada mes deposita US $10 más que el anterior empezando por US $10.

22. El astrónomo y físico italiano Galileo Galilei (1564-1642) descubrió que la distancia que una masa desciende en un plano inclinado en consecutivos intervalos de tiempo es proporcional al número entero impar. Por tanto, la distancia D que una masa descenderá por el plano inclinado en n segundos es proporcional a $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$. Demuestre que D es proporcional a n^2.

23. Si una tasa anual de interés es compuesta continuamente, entonces la cantidad S que acumula interés anual inmediatamente después del depósito n-ésimo de P dólares está dada por

$$S = P + Pe^r + Pe^{2r} + \ldots + Pe^{(n-1)r}$$

Demuestre que

$$S = P\frac{1-e^{rn}}{1-e^r}$$

24. En 1990 una firma de alta tecnología proyectó que sus ganancias se duplicarían cada año durante los siguientes 10 años. Si sus ganancias en 1990 fueron de US$100,000, y sus pronósticos se han cumplido, ¿cuál fue su ganancia en 1997?, ¿cuál será la ganancia pronosticada en el año 2000?

En los problemas 25 al 28, use la inducción matemática para probar que la afirmación dada es verdadera.

25. $5 + 9 + \ldots + (4n + 1) = 2n^2 + 3n$

26. Con billetes de US$5 y de US$3 se puede pagar exactamente cualquier cantidad entera mayor o igual que US$8.

27. $n! > 2^n$ para $n \geq 4$

28. $\sum_{k=1}^{n}(k)(k!) = (n+1)! - 1$

En los problemas 29 al 34, calcule las expresiones dadas.

29. $\dfrac{5!}{3!-0!}$

30. $\dfrac{5!\,8!}{10!}$

31. $C(8, 3)$

32. $P(7, 5)$

33. $\dbinom{10}{2}$

34. $\dbinom{n}{0}$

En los problemas 35 al 38, use el teorema del binomio para desarrollar la expresión dada.

35. $(2x+3y)^4$

36. $(2-(a+b))^3$

37. $(3a-1)^5$

38. $(a^2-b)^6$

En los problemas 39 al 42, halle el término indicado en el desarrollo de la expresión dada.

39. Tercer término de $(2x-y)^6$

40. Quinto término de $(3x^2-y^3)^4$

41. Décimo término de $(x^2y+z^3)^{10}$

42. Sexto término de $\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{y}\right)^7$

43. ¿Cuál es el término y el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $\left(x^{\frac{1}{2}}+2\right)^{10}$?

44. Resuelva para x $\sum_{k=1}^{n}\dbinom{n}{k}x^{3n-3k}(-8)^k = 0$.

45. Si se lanzan 2 monedas 3 veces, encuentre todas las posibles secuencias de pares de caras (C, C), pares de sellos (S, S) y pares de caras y sellos (C, S), (S, C).

46. Enumere todos los posibles números de tres dígitos usando sólo los dígitos 1, 2, 3 y 4.

47. Si se tienen disponibles 16 sabores de helados, ¿de cuántas maneras puede ordenarse un cono con dos bolas:

(a) si ambas bolas son de diferente sabor e importa el orden;

(b) si ambas bolas son de diferente sabor y no importa el orden;

(c) si ambas bolas pueden ser del mismo sabor y no importa el orden?

48. ¿De cuántas maneras una clase de 14 niñas y 12 niños pueden seleccionar a:

(a) un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero si todos deben ser niños o niñas;

(b) un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero si el secretario debe ser un niño y el tesorero una niña;

(c) un comité de 4 sin importar el sexo;

(d) un comité de 4 con 2 niños y 2 niñas?

49. Una pizzería ofrece para sus pizzas 8 ingredientes extra para que sus clientes escojan. ¿Cuántas variantes se pueden formar con tres de esos ingredientes extra?

50. ¿De cuántas formas diferentes se pueden arreglar 6 libros en un anaquel?

51. Al hacer un acertijo de palabras mezcladas, ¿cuántas nuevas combinaciones de letras de B O N I T A son posibles?

52. Una profesora de derecho penal debe seleccionar a 4 estudiantes de una clase de 15 para una visita a un juzgado; ¿de cuántas maneras puede hacerlo?

53. En una competencia de modelos quedan 10 modelos hombres y 12 modelos mujeres para el desfile, ¿en cuántos órdenes diferentes pueden presentarse:

(a) si los modelos se agrupan según su sexo;

(b) si no hay restricción en el orden?

54. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ganar el primero, segundo y tercer puesto en una competencia de pureza de razas de perros donde compiten 20 perros? Suponga que no puede haber empates.

En los problemas 55 y 56, use la notación de conjunto para escribir el espacio muestral del experimento dado.

55. La aguja de la figura 3 se girará tres veces.

56. La aguja se gira dos veces y luego se lanza una moneda.

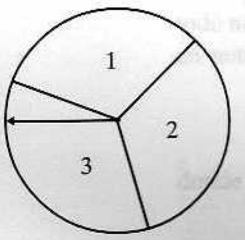


FIGURA 3

57. Si se sacan 5 cartas de una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que todas sean rojas?

58. Se seleccionan al azar 5 fósforos de una caja de 100. Se sabe que el 90% de los fósforos están secos; ¿cuál es la probabilidad de que:

(a) los cinco fósforos escogidos estén secos;

(b) los cinco fósforos estén húmedos;

(c) al menos uno de ellos esté seco?

59. Suponga que la posibilidad de dar a luz un niño es igual a la de dar a luz a una niña. En una familia de 6 hijos, ¿qué será más probable: todos del mismo sexo, tres de cada sexo ó 4 de un sexo y 2 del otro?

60. Suponga que la probabilidad de muerte para un hombre de 30 años este año es de 0.0005; ¿cuál es la probabilidad de que un hombre de 30 años se mantenga vivo este año?

61. Si 8 zapatos negros y 4 marrones se guardan en cajas formando pares al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al coger una caja:

(a) se saque un par de zapatos negros;

(b) se saque un par de zapatos negros o de zapatos marrones;

(c) se saque un par de zapatos cada uno de diferente color?

62. Un cartón de bingo tiene 5 filas y 5 columnas (véase figura 4). Cualquiera de los 5 números del 1 al 15 aparece en la primera columna (llamada B); 5 números cualesquiera entre el 16 y el 30 aparecen en la segunda columna (I); 4 números cualesquiera entre el 31 y el 45 aparecen en la tercera columna (N), donde está el cuadrado central marcado con la palabra "LIBRE"; 5 números cualesquiera entre el 46 y el 60 aparecen en la cuarta columna (G); y 5 números cualesquiera entre el 61 y el 75 aparecen en la última columna (O). ¿Cuántos cartones diferentes de BINGO son posibles? (Considere que 2 cartones son diferentes si 2 entradas correspondientes cualesquiera son diferentes).

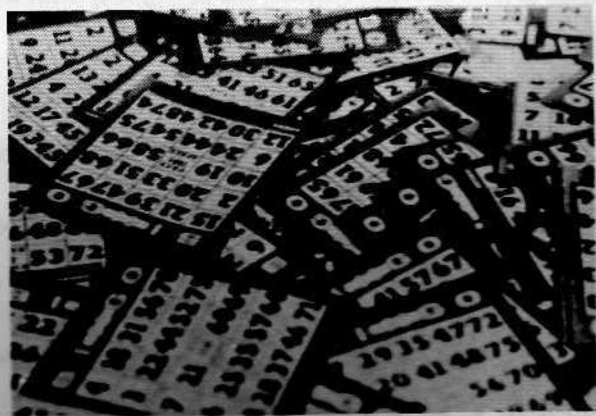


FIGURA 4

63. Una versión de bingo requiere que un jugador cubra todos los números en el cartón cuando se anuncian los números al azar (véase problema 62).

(a) ¿Cuál es el mínimo número de llamadas antes de que haya un ganador en esta versión?

(b) Suponga que haya un ganador para el mínimo número de llamadas obtenido en la parte (a). ¿Cuál es la probabilidad de que un cartón que usted esté jugando sea el ganador en ese momento?

Apéndice

Cómo usar tablas logarítmicas y trigonométricas

Antes de la invención de la calculadora manual, los cálculos numéricos se efectuaban usando tablas o una regla de cálculo. Como los dinosaurios, las reglas de cálculo se extinguieron rápidamente, pero las tablas de potencias, raíces, logaritmos y funciones trigonométricas están desapareciendo lentamente de las últimas páginas de los textos matemáticos. Así, más por interés histórico que por necesidad práctica, examinaremos en este apéndice cómo usar las tablas I y II (logaritmos) y la tabla III (funciones trigonométricas).

LOGARITMOS COMUNES

Los logaritmos con base 10 se llaman **logaritmos comunes.** En la sección 1.3, vimos que todo número real x se puede escribir como múltiplo de una potencia entera de diez; es decir, en notación científica

$$x = a \cdot 10^c$$

donde $1 \leq a < 10$ y c es un número entero. Así,

$$\begin{aligned}\log_{10} x &= \log_{10} (a \cdot 10^c)\\ &= \log_{10} a + \log_{10} 10^c\\ &= \log_{10} a + c\end{aligned}$$

En otras palabras, $\log_{10} x = m + c$

donde los números $m = \log_{10} a$ y c se llaman **mantisa** y **característica** de $\log_{10} x$, respectivamente. Nótese que la característica es igual al número entero exponente de 10 cuando x se escribe en notación científica. Recuerde de la sección 5.2 que $f(x) = \log_{10} x$ es una función creciente. Por tanto, puesto que $1 \leq a < 10$, tenemos,

$$\log_{10} 1 \leq \log_{10} a < \log_{10} 10, \text{ or } 0 \leq \log_{10} a < 1.$$

En otras palabras, la mantisa es un número real no negativo, menor que 1.

TABLA I

En este momento es apropiado examinar la tabla I (logaritmos comunes). Esta tabla contiene solamente las mantisas de los logaritmos de los números $1 \leq a < 10$ que tienen a lo sumo dos lugares decimales. Para localizar la mantisa del logaritmo de un número entero en particular, nótese que la parte entera y el primer decimal indican la *fila* en la que aparece la mantisa; el segundo lugar decimal determina la *columna*. Por ejemplo,

$$\text{si } a = 1.18, \text{ entonces } \log_{10} a \approx 0.0719$$

se obtiene localizando la entrada de la segunda fila y de la novena columna.

EJEMPLO 1

Aproxime $\log_{10} 6.840$.

Solución. Primero escribimos el número en notación científica $6,840 = (6.84)10^3$. Entonces, encontramos su logaritmo en la tabla I:

$$\begin{aligned}\log_{10} 6.840 &= \log_{10} 6.84 + \log_{10} 10^3\\ &= \log_{10} 6.84 + 3\log_{10} 10\\ &\approx 0.8351 + 3\\ &= 3.8351\end{aligned}$$

EJEMPLO 2

Aproxime $\log_{10} (0.177)$.

Solución. Puesto que $0.177 = (1.77)10^{-1}$, tenemos de la tabla I

$$\begin{aligned}\log_{10} (0.177) &= \log_{10} 1.77 + \log_{10} 10^{-1}\\ &= \log_{10} 1.77 - \log_{10} 10\\ &\approx 0.2480 - 1\\ &= -0.7520\end{aligned}$$

INTERPOLACION

El logaritmo de un número real dado puede no aparecer en la tabla I. Por ejemplo, el valor del $\log_{10} 2.346$ no está dado en el cuadro. Sin embargo, una aproximación al valor de un logaritmo se puede obtener por **interpolación lineal.** Esta técnica se explica en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3

Aproxime $\log_{10} 2.346$.

Solución. Puesto que $f(x) = \log_{10}x$ es una función creciente, sabemos que $\log_{10} 2.340 < \log_{10} 2.346 < \log_{10} 2.350$. Usando la figura 1, razonamos que, puesto que 2.340 y 2.350 están muy cercanos al eje x, el segmento de recta PQ que une a $P(2.340, \log_{10} 2.340)$ y $Q(2.350, \log_{10} 2.350)$ debe estar junto a la gráfica de $y = \log_{10}x$. Comparando la figura 1(a) con la figura 1(b), vemos que el $\log_{10} 2.346$ es aproximado al número $0.3692 + d$, el cual es

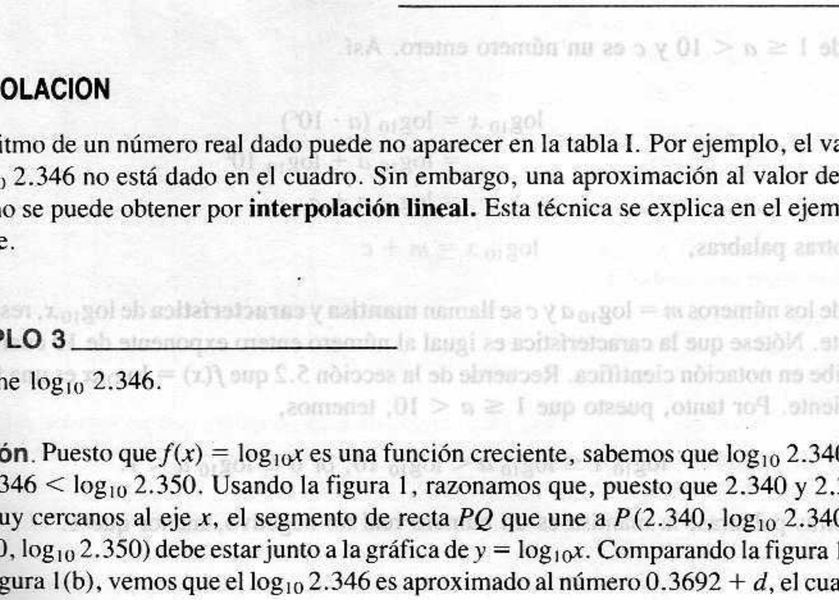


FIGURA 1

la coordenada y del punto en PQ correspondiente a la coordenada x 2.346. Con referencia de nuevo a la figura, se deduce de triángulos semejantes que

$$\frac{0.006}{0.010} = \frac{d}{0.0019}$$

y así

$$\begin{aligned} d &= 0.6(0.0019) \\ &= 0.00114 \approx 0.0011 \end{aligned}$$

Como es la práctica estándar, se redondea el mismo número de lugares decimales que aparecen en la tabla I. Así, concluimos que,

$$\begin{aligned} \log_{10} 2.346 &\approx 0.3692 + 0.0011 \\ &= 0.3703 \end{aligned}$$

Puesto que no es práctico dibujar una gráfica cada vez que usamos interpolación lineal, es útil arreglar el trabajo de una manera especial. Usando el ejemplo 3, escribimos

$$0.010\left\{\begin{array}{l} 0.006\left\{\begin{array}{l}\log_{10} 2.340 \approx 0.3692 \\ \log_{10} 2.346 \approx 0.3692 + d\end{array}\right\}d \\ \log_{10} 2.350 \approx 0.3711\end{array}\right\}0.0019$$

Los números próximos a los corchetes de la izquierda son las diferencias que se muestran cerca de los corchetes horizontales en la figura 1(b); los números cercanos a los corchetes de la derecha son las diferencias cercanas a los corchetes verticales en la figura 1(b). Encontramos d de la proporción 0.006 es a 0.010 como d es a 0.0019, es decir, $0.006/0.010 = d/0.0019$.

Al usar la tabla I y la interpolación lineal, el número a en la forma científica $x = a \cdot 10^c$, $1 \le a < 10$, se deben redondear tres lugares decimales. Por ejemplo, si $x = 467{,}842 = 4.67842 \times 10^5$, entonces redondeamos $a = 4.67842$ a 4.678. Si $x = 0.0053468 = 5.3468 \times 10^{-3}$, entonces, a pesar de que $a = 5.3468$, usamos 5.347.

ANTILOGARITMO

Si se nos da el logaritmo de un número real x de la forma

$$\log_{10} x = \log_{10} a + c, \quad 1 \le a < 10$$

entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \log_{10} x &= \log_{10} a + \log_{10} 10^c \\ &= \log_{10} (a \cdot 10^c) \end{aligned}$$

Puesto que la función logarítmica es uno a uno, tenemos

$$x = a \cdot 10^c$$

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de la tabla I para hallar un número cuando se da su logaritmo. El número x algunas veces se llama **antilogaritmo** de $\log_{10}x$.

EJEMPLO 4

Encuentre x si $\log_{10}x$ 3.7118.

Solución. Primero escribimos el logaritmo en forma de mantisa, más una característica (es decir, un número no negativo menor que 1 más un entero):

$$\log_{10} x = 0.7118 + 3$$

Ahora podemos localizar la mantisa en la tabla I:

$$\log_{10} 5.15 \approx 0.7118$$

Así

$$\begin{aligned} \log_{10} x &\approx \log_{10} 5.15 + 3 \\ x &\approx (5.15)10^3 \\ &= 5{,}150 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5

Encuentre x si $\log_{10} x = -2.3468$.

Solución. Para convertir un logaritmo negativo en la forma correcta de una mantisa, más una característica, debemos sumar y restar el entero positivo más pequeño que dará un número de la forma $m + c$, donde $0 \le m < 1$. Así, en el problema dado sumamos 3 y restamos 3:

$$\begin{aligned} \log_{10} x &= -2.3468 \\ &= -2.3468 + \underbrace{3 - 3}_{\text{cero}} \\ &= (-2.3468 + 3) - 3 \\ &= \underbrace{0.6532}_{m} \underbrace{-3}_{c} \end{aligned}$$

De la tabla I encontramos que $\log_{10} 4.50 \approx 0.6532$, así

$$\begin{aligned} x &\approx (4.50)10^{-3} \\ &= 0.0045 \end{aligned}$$

Nota de advertencia: un error común cuando se trabaja con logaritmos negativos es volver a escribir -2.3468 como $0.3468 - 2$. Esto es incorrecto, puesto que $0.3468 - 2 = -1.6532 \neq -2.3468$.

EJEMPLO 6

Encuentre x si $\log_{10} x = -0.1281$.

Solución. Sumamos y restamos 1 al logaritmo dado para encontrar la mantisa y la característica:

$$\begin{aligned} \log_{10} x &= -0.1281 + 1 - 1 \\ &= 0.8719 - 1 \end{aligned}$$

Entonces localizamos la mantisa 0.8719 entre las entradas 0.8716 y 0.8722 de la tabla I.

Interpolando,

$$0.01 \left\{ \begin{array}{l} k \left\{ \begin{array}{ll} \log_{10} 7.44 & \approx 0.8716 \\ \log_{10} (7.44 + k) & \approx 0.8719 \end{array} \right\} 0.0003 \\ \quad \log_{10} 7.45 \qquad\quad \approx 0.8722 \end{array} \right\} 0.0006$$

obtenemos
$$\frac{k}{0.01} = \frac{0.0003}{0.0006}, \quad \text{o} \quad k = 0.005$$

Así, $7.44 + k = 7.445$, de manera que
$$\log_{10} x \approx \log_{10} 7.445 - 1$$

y
$$\begin{aligned} x &\approx (7.445)10^{-1} \\ &= 0.7445 \end{aligned}$$

TABLA II

A diferencia de la tabla I, no es necesario escribir un número x en notación científica para usar la tabla II (logaritmos naturales). Sin embargo, el procedimiento de la interpolación lineal es el mismo.

EJEMPLO 7

Aproxime ln 3.64.

Solución. La inspección de la tabla II revela que el logaritmo natural de 3.64 no se da en la tabla. Interpolación lineal,

$$0.1\left\{\begin{array}{l} 0.04\left\{\begin{array}{l}\ln 3.6 \approx 1.2809 \\ \ln 3.64 \approx 1.2809 + d\end{array}\right\}d \\ \ln 3.7 \approx 1.3083\end{array}\right\}0.0274$$

produce
$$\frac{0.04}{0.1} = \frac{d}{0.0274}, \quad \text{o} \quad d = 0.01096 \approx 0.0110$$

Por consiguiente,
$$\begin{aligned} \ln 3.64 &\approx 1.2809 + 0.0110 \\ &= 1.2919 \end{aligned}$$

TABLA III

La tabla III contiene aproximaciones de cuatro lugares decimales al sen θ, cos θ, tan θ y cot θ para valores del ángulo θ en el cuadrante I. Para valores de θ entre 0° y 45° usamos la columna izquierda junto con los encabezamientos de la parte superior de la tabla. Para un ángulo θ entre 45° y 90°, usamos la columna de la derecha con los encabezamientos de la base de la tabla. La tabla se puede arreglar de esta forma, puesto que

$$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta \quad \text{y} \quad \cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$$

y, por consiguiente,

$$\tan(90° - \theta) = \frac{\operatorname{sen}(90° - \theta)}{\cos(90° - \theta)} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$$

EJEMPLO 8

Aproxime **(a)** sen 37° 50′ y **(b)** cot 51° 20′.

Solución

(a) Puesto que 37°50′ está entre 0° y 45°, localizamos el ángulo en la columna izquierda y luego leemos hacia abajo la columna marcada con sen en la tabla de muestra presentada aquí, hasta que lleguemos a la fila en la cual aparece el ángulo.

lea hacia abajo

θ	sen	cos	tan	cot	
36°00′	0.5878	0.8090	0.7265	1.376	54°00′
10′	0.5901	0.8073	0.7310	1.368	53°50′
20′	0.5925	0.8056	0.7355	1.360	40′
30′	0.5948	0.8039	0.7400	1.351	30′
40′	0.5972	0.8021	0.7445	1.343	20′
36°50′	0.5995	0.8004	0.7490	1.335	10′
37°00′	0.6018	0.7986	0.7536	1.327	53°00′
10′	0.6041	0.7969	0.7581	1.319	52°50′
20′	0.6065	0.7951	0.7627	1.311	40′
30′	0.6088	0.7934	0.7673	1.303	30′
40′	0.6111	0.7916	0.7720	1.295	20′
37°50′	0.6134	0.7898	0.7766	1.288	10′
38°00′	0.6157	0.7880	0.7813	1.280	52°00′
10′	0.6180	0.7862	0.7860	1.272	51°50′
20′	0.6202	0.7844	0.7907	1.265	40′
30′	0.6225	0.7826	0.7954	1.257	30′
40′	0.6248	0.7808	0.8002	1.250	20′
38°50′	0.6271	0.7790	0.8050	1.242	10′
	cos	sen	cot	tan	θ

localice el ángulo

localice el ángulo

lea hacia arriba

Vemos que

$$\text{sen } 37°50' \approx 0.6134$$

(b) Puesto que 51°20′ está entre 45° y 90°, localizamos el ángulo en la columna de la derecha y leemos hacia arriba la columna marcada con cot. Del cuadro de muestra encontramos que

$$\cot 51°20' \approx 0.8002$$

La tabla III presenta los ángulos de 0° a 90° en incrementos de 10′. Para aproximar el valor de una función trigonométrica de un ángulo que no esté en la lista de la tabla, procedemos como en los ejemplos 3 y 7 y usamos interpolación lineal.

EJEMPLO 9

Aproxime sen 43°17′

Solución Puesto que el sen θ aumenta entre 0° y 90° se deduce de la tabla III e interpolación

$$10'\left\{\begin{array}{l} 7'\left\{\begin{array}{l}\text{sen } 43°10' \approx 0.6841\\ \text{sen } 43°17' \approx 0.6841 + d\end{array}\right\}d \\ \text{sen } 43°20' \approx 0.6862\end{array}\right\}0.0021$$

que

$$\frac{7}{10} = \frac{d}{0.0021}$$

y así

$$d = 0.00147 \approx 0.0015$$

Por tanto, obtenemos

$$\begin{aligned}\text{sen } 43°17' &\approx 0.6841 + 0.0015\\ &= 0.6856\end{aligned}$$

EJEMPLO 10

Aproxime la medida en grados de un ángulo θ entre 0° y 90° tal que $\tan \theta = 0.5942$.

Solución. Primero colocamos números sucesivos en las columnas tan de la tabla III tal que 0.5942 esté entre estas entradas. Luego interpolamos.

$$10'\left\{\begin{array}{l} k\left\{\begin{array}{l}\tan 30°40' \approx 0.5930\\ \tan \theta \qquad = 0.5942\end{array}\right\}0.0012 \\ \tan 30°50' \approx 0.5969\end{array}\right\}0.0039$$

$$\frac{k}{10} = \frac{0.0012}{0.0039}, \quad \text{o} \quad k \approx 3'$$

Así,

$$\begin{aligned}\theta &\approx 30°40' + 3'\\ &= 30°43'\end{aligned}$$

Con los ejemplos de este apéndice, usted debe ser capaz de usar la tabla IV efectivamente e interpolar, si es necesario.

EJERCICIO A

En los problemas 1 al 6, use la tabla I para encontrar la mantisa y la característica del número dado.

1. 175 **2.** 39.4
3. 0.000301 **4.** 295×10^{-4}
5. 683,000 **6.** 45×10^{7}

En los problemas 7 al 18, use la tabla I para aproximar el logaritmo común del número dado.

7. 4,730 **8.** 54,000,000
9. 0.0000567 **10.** 0.123
11. $(51.9)^2$ **12.** $(25)^{-3}$
13. $\sqrt{114}$ **14.** $\frac{2.8}{39.6}$
15. (1,200)(637) **16.** $(0.29)^{10}$
17. $\sqrt{21}(9.2)^{1/3}$ **18.** $\frac{(6.8)^3}{\sqrt{47.9}}$

En los problemas 19 al 26, use la interpolación en la tabla I para aproximar el logaritmo común del número dado.

19. 472.3 **20.** 101,500
21. 0.001204 **22.** 0.03076
23. $(2,735)^2$ **24.** $(0.5107)^{-10}$
25. 0.044583 **26.** 35,967

Para cada logaritmo dado en los problemas 27 al 38, establezca la mantisa y la característica.

27. 2.3678 **28.** 5.1234
29. 0.4234 − 5 **30.** 0.4862 − 1
31. 8.7320 − 10 **32.** 4.2360 − 2
33. 0.6521 **34.** 1.3458 + 3
35. 0.7111 + 6 **36.** −2.3684
37 −4.7035 **38.** −0.2489

En los problemas 39 al 44, use la tabla I para encontrar x si el $\log_{10}x$ es dado.

39. 2.6937 **40.** 3.4440
41. 0.4579 − 2 **42.** 0.7396 − 8
43. −5.0009 **44.** −3.1580

En los problemas 45 al 50, use la interpolación en la tabla I para aproximar x si el $\log_{10}x$ es dado.

45. 2.4122 **46.** 0.2940 + 6
47. 0.6111 − 5 **48.** −4.0560
49. 0.4052 **50.** 0.8983

En los problemas 51 al 54, use la tabla II para aproximar el logaritmo natural del número dado.

51. 5.8 **52.** 10
53. 180 **54.** 75

En los problemas 55 y 56, use la interpolación de la tabla II para aproximar el logaritmo natural del número dado.

55. 0.57 **56.** 9.23

En los problemas 57 al 62, use la tabla III para aproximar el número dado.

57. cos 23°30′ **58.** sen 49°10′
59. tan 19°40′ **60.** cot 62°50′
61. cos 78°20′ **62.** sen 38°30′

En los problemas 63 al 68, use la interpolación de la tabla III para aproximar el número dado.

63. sen 42°18′ **64.** tan 73°14′
65. cos 31° 15′ [*Sugerencia*: el cos θ decrece entre 0° y 90°].
66. cos 83°54′
67. cot 67°36′ **68.** sen 55°43′

En los problemas 69 al 74, use la interpolación de la tabla III para aproximar la medida en grados de un ángulo θ entre 0° y 90° que satisfaga la ecuación dada.

69. tan θ = 0.6100
70. sen θ = 0.8011
71. cos θ = 0.3680
72. tan θ = 2.235
73. sen θ = 0.3212
74. cot θ = 12.40

En los problemas 75 y 76, use la tabla III para encontrar todos los ángulos θ entre 0° y 360° que satisfagan la ecuación dada.

75. sen θ = −0.4540

76. tan θ = −1.428

Tablas

I. Logaritmos comunes
II. Logaritmos naturales
III. Funciones trigonométricas (grados)
IV. Funciones trigonométricas (radianes)

TABLA I

LOGARITMOS COMUNES

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374
1.1	0.0414	0.0453	0.0492	0.0531	0.0569	0.0607	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755
1.2	0.0792	0.0828	0.0864	0.0899	0.0934	0.0969	0.1004	0.1038	0.1072	0.1106
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239	0.1271	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399	0.1430
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1732
1.5	0.1761	0.1790	0.1818	0.1847	0.1875	0.1903	0.1931	0.1959	0.1987	0.2014
1.6	0.2041	0.2068	0.2095	0.2122	0.2148	0.2175	0.2201	0.2227	0.2253	0.2279
1.7	0.2304	0.2330	0.2355	0.2380	0.2405	0.2430	0.2455	0.2480	0.2504	0.2529
1.8	0.2553	0.2577	0.2601	0.2625	0.2648	0.2672	0.2695	0.2718	0.2742	0.2765
1.9	0.2788	0.2810	0.2833	0.2856	0.2878	0.2900	0.2923	0.2945	0.2967	0.2989
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075	0.3096	0.3118	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284	0.3304	0.3324	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404
2.2	0.3424	0.3444	0.3464	0.3483	0.3502	0.3522	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674	0.3692	0.3711	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784
2.4	0.3802	0.3820	0.3838	0.3856	0.3874	0.3892	0.3909	0.3927	0.3945	0.3962
2.5	0.3979	0.3997	0.4014	0.4031	0.4048	0.4065	0.4082	0.4099	0.4116	0.4133
2.6	0.4150	0.4166	0.4183	0.4200	0.4216	0.4232	0.4249	0.4265	0.4281	0.4298
2.7	0.4314	0.4330	0.4346	0.4362	0.4378	0.4393	0.4409	0.4425	0.4440	0.4456
2.8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4579	0.4594	0.4609
2.9	0.4624	0.4639	0.4654	0.4669	0.4683	0.4698	0.4713	0.4728	0.4742	0.4757
3.0	0.4771	0.4786	0.4800	0.4814	0.4829	0.4843	0.4857	0.4871	0.4886	0.4900
3.1	0.4914	0.4928	0.4942	0.4955	0.4969	0.4983	0.4997	0.5011	0.5024	0.5038
3.2	0.5051	0.5065	0.5079	0.5092	0.5105	0.5119	0.5132	0.5145	0.5159	0.5172
3.3	0.5185	0.5198	0.5211	0.5224	0.5237	0.5250	0.5263	0.5276	0.5289	0.5302
3.4	0.5315	0.5328	0.5340	0.5353	0.5366	0.5378	0.5391	0.5403	0.5416	0.5428
3.5	0.5441	0.5453	0.5465	0.5478	0.5490	0.5502	0.5514	0.5527	0.5539	0.5551
3.6	0.5563	0.5575	0.5587	0.5599	0.5611	0.5623	0.5635	0.5647	0.5658	0.5670
3.7	0.5682	0.5694	0.5705	0.5717	0.5729	0.5740	0.5752	0.5763	0.5775	0.5786
3.8	0.5798	0.5809	0.5821	0.5832	0.5843	0.5855	0.5866	0.5877	0.5888	0.5899
3.9	0.5911	0.5922	0.5933	0.5944	0.5955	0.5966	0.5977	0.5988	0.5999	0.6010
4.0	0.6021	0.6031	0.6042	0.6053	0.6064	0.6075	0.6085	0.6096	0.6107	0.6117
4.1	0.6128	0.6138	0.6149	0.6160	0.6170	0.6180	0.6191	0.6201	0.6212	0.6222
4.2	0.6232	0.6243	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325
4.3	0.6335	0.6345	0.6355	0.6365	0.6375	0.6385	0.6395	0.6405	0.6415	0.6425
4.4	0.6435	0.6444	0.6454	0.6464	0.6474	0.6484	0.6493	0.6503	0.6513	0.6522
4.5	0.6532	0.6542	0.6551	0.6561	0.6571	0.6580	0.6590	0.6599	0.6609	0.6618
4.6	0.6628	0.6637	0.6646	0.6656	0.6665	0.6675	0.6684	0.6693	0.6702	0.6712
4.7	0.6721	0.6730	0.6739	0.6749	0.6758	0.6767	0.6776	0.6785	0.6794	0.6803
4.8	0.6812	0.6821	0.6830	0.6839	0.6848	0.6857	0.6866	0.6875	0.6884	0.6893
4.9	0.6902	0.6911	0.6920	0.6928	0.6937	0.6946	0.6955	0.6964	0.6972	0.6981
5.0	0.6990	0.6998	0.7007	0.7016	0.7024	0.7033	0.7042	0.7050	0.7059	0.7067
5.1	0.7076	0.7084	0.7093	0.7101	0.7110	0.7118	0.7126	0.7135	0.7143	0.7152
5.2	0.7160	0.7168	0.7177	0.7185	0.7193	0.7202	0.7210	0.7218	0.7226	0.7235
5.3	0.7243	0.7251	0.7259	0.7267	0.7275	0.7284	0.7292	0.7300	0.7308	0.7316
5.4	0.7324	0.7332	0.7340	0.7348	0.7356	0.7364	0.7372	0.7380	0.7388	0.7396
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLA I (*continuación*)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	0.7404	0.7412	0.7419	0.7427	0.7435	0.7443	0.7451	0.7459	0.7466	0.7474
5.6	0.7482	0.7490	0.7497	0.7505	0.7513	0.7520	0.7528	0.7536	0.7543	0.7551
5.7	0.7559	0.7566	0.7574	0.7582	0.7589	0.7597	0.7604	0.7612	0.7619	0.7627
5.8	0.7634	0.7642	0.7649	0.7657	0.7664	0.7672	0.7679	0.7686	0.7694	0.7701
5.9	0.7709	0.7716	0.7723	0.7731	0.7738	0.7745	0.7752	0.7760	0.7767	0.7774
6.0	0.7782	0.7789	0.7796	0.7803	0.7810	0.7818	0.7825	0.7832	0.7839	0.7846
6.1	0.7853	0.7860	0.7868	0.7875	0.7882	0.7889	0.7896	0.7903	0.7910	0.7917
6.2	0.7924	0.7931	0.7938	0.7945	0.7952	0.7959	0.7966	0.7973	0.7980	0.7987
6.3	0.7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8021	0.8028	0.8035	0.8041	0.8048	0.8055
6.4	0.8062	0.8069	0.8075	0.8082	0.8089	0.8096	0.8102	0.8109	0.8116	0.8122
6.5	0.8129	0.8136	0.8142	0.8149	0.8156	0.8162	0.8169	0.8176	0.8182	0.8189
6.6	0.8195	0.8202	0.8209	0.8215	0.8222	0.8228	0.8235	0.8241	0.8248	0.8254
6.7	0.8261	0.8267	0.8274	0.8280	0.8287	0.8293	0.8299	0.8306	0.8312	0.8319
6.8	0.8325	0.8331	0.8338	0.8344	0.8351	0.8357	0.8363	0.8370	0.8376	0.8382
6.9	0.8388	0.8395	0.8401	0.8407	0.8414	0.8420	0.8426	0.8432	0.8439	0.8445
7.0	0.8451	0.8457	0.8463	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488	0.8494	0.8500	0.8506
7.1	0.8513	0.8519	0.8525	0.8531	0.8537	0.8543	0.8549	0.8555	0.8561	0.8567
7.2	0.8573	0.8579	0.8585	0.8591	0.8597	0.8603	0.8609	0.8615	0.8621	0.8627
7.3	0.8633	0.8639	0.8645	0.8651	0.8657	0.8663	0.8669	0.8675	0.8681	0.8686
7.4	0.8692	0.8698	0.8704	0.8710	0.8716	0.8722	0.8727	0.8733	0.8739	0.8745
7.5	0.8751	0.8756	0.8762	0.8768	0.8774	0.8779	0.8785	0.8791	0.8797	0.8802
7.6	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
7.7	0.8865	0.8871	0.8876	0.8882	0.8887	0.8893	0.8899	0.8904	0.8910	0.8915
7.8	0.8921	0.8927	0.8932	0.8938	0.8943	0.8949	0.8954	0.8960	0.8965	0.8971
7.9	0.8976	0.8982	0.8987	0.8993	0.8998	0.9004	0.9009	0.9015	0.9020	0.9025
8.0	0.9031	0.9036	0.9042	0.9047	0.9053	0.9058	0.9063	0.9069	0.9074	0.9079
8.1	0.9085	0.9090	0.9096	0.9101	0.9106	0.9112	0.9117	0.9122	0.9128	0.9133
8.2	0.9138	0.9143	0.9149	0.9154	0.9159	0.9165	0.9170	0.9175	0.9180	0.9186
8.3	0.9191	0.9196	0.9201	0.9206	0.9212	0.9217	0.9222	0.9227	0.9232	0.9238
8.4	0.9243	0.9248	0.9253	0.9258	0.9263	0.9269	0.9274	0.9279	0.9284	0.9289
8.5	0.9294	0.9299	0.9304	0.9309	0.9315	0.9320	0.9325	0.9330	0.9335	0.9340
8.6	0.9345	0.9350	0.9355	0.9360	0.9365	0.9370	0.9375	0.9380	0.9385	0.9390
8.7	0.9395	0.9400	0.9405	0.9410	0.9415	0.9420	0.9425	0.9430	0.9435	0.9440
8.8	0.9445	0.9450	0.9455	0.9460	0.9465	0.9469	0.9474	0.9479	0.9484	0.9489
8.9	0.9494	0.9499	0.9504	0.9509	0.9513	0.9518	0.9523	0.9528	0.9533	0.9538
9.0	0.9542	0.9547	0.9552	0.9557	0.9562	0.9566	0.9571	0.9576	0.9581	0.9586
9.1	0.9590	0.9595	0.9600	0.9605	0.9609	0.9614	0.9619	0.9624	0.9628	0.9633
9.2	0.9638	0.9643	0.9647	0.9652	0.9657	0.9661	0.9666	0.9671	0.9675	0.9680
9.3	0.9685	0.9689	0.9694	0.9699	0.9703	0.9708	0.9713	0.9717	0.9722	0.9727
9.4	0.9731	0.9736	0.9741	0.9745	0.9750	0.9754	0.9759	0.9763	0.9768	0.9773
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863
9.7	0.9868	0.9872	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	0.9908
9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952
9.9	0.9956	0.9961	0.9965	0.9969	0.9974	0.9978	0.9983	0.9987	0.9991	0.9996
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLA II

LOGARITMOS NATURALES

x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$
		4.5	1.5041	9.0	2.1972
0.1	−2.3026	4.6	1.5261	9.1	2.2083
0.2	−1.6094	4.7	1.5476	9.2	2.2192
0.3	−1.2040	4.8	1.5686	9.3	2.2300
0.4	−0.9163	4.9	1.5892	9.4	2.2407
0.5	−0.6931	5.0	1.6094	9.5	2.2513
0.6	−0.5108	5.1	1.6292	9.6	2.2618
0.7	−0.3567	5.2	1.6487	9.7	2.2721
0.8	−0.2231	5.3	1.6677	9.8	2.2824
0.9	−0.1054	5.4	1.6864	9.9	2.2925
1.0	0.0000	5.5	1.7047	10	2.3026
1.1	0.0953	5.6	1.7228	11	2.3979
1.2	0.1823	5.7	1.7405	12	2.4849
1.3	0.2624	5.8	1.7579	13	2.5649
1.4	0.3365	5.9	1.7750	14	2.6391
1.5	0.4055	6.0	1.7918	15	2.7081
1.6	0.4700	6.1	1.8083	16	2.7726
1.7	0.5306	6.2	1.8245	17	2.8332
1.8	0.5878	6.3	1.8405	18	2.8904
1.9	0.6419	6.4	1.8563	19	2.9444
2.0	0.6931	6.5	1.8718	20	2.9957
2.1	0.7419	6.6	1.8871	25	3.2189
2.2	0.7885	6.7	1.9021	30	3.4012
2.3	0.8329	6.8	1.9169	35	3.5553
2.4	0.8755	6.9	1.9315	40	3.6889
2.5	0.9163	7.0	1.9459	45	3.8067
2.6	0.9555	7.1	1.9601	50	3.9120
2.7	0.9933	7.2	1.9741	55	4.0073
2.8	1.0296	7.3	1.9879	60	4.0943
2.9	1.0647	7.4	2.0015	65	4.1744
3.0	1.0986	7.5	2.0149	70	4.2485
3.1	1.1314	7.6	2.0281	75	4.3175
3.2	1.1632	7.7	2.0412	80	4.3820
3.3	1.1939	7.8	2.0541	85	4.4427
3.4	1.2238	7.9	2.0669	90	4.4998
3.5	1.2528	8.0	2.0794	100	4.6052
3.6	1.2809	8.1	2.0919	110	4.7005
3.7	1.3083	8.2	2.1041	120	4.7875
3.8	1.3350	8.3	2.1163	130	4.8676
3.9	1.3610	8.4	2.1282	140	4.9416
4.0	1.3863	8.5	2.1401	150	5.0106
4.1	1.4110	8.6	2.1518	160	5.0752
4.2	1.4351	8.7	2.1633	170	5.1358
4.3	1.4586	8.8	2.1748	180	5.1930
4.4	1.4816	8.9	2.1861	190	5.2470

TABLA III

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS (GRADOS)

θ	sen	cos	tan	cot		θ	sen	cos	tan	cot	
0°00′	0.0000	1.000	0.0000	—	90°00′	8°00′	0.1392	0.9903	0.1405	7.115	82°00
10′	0.0029	1.000	0.0029	343.8	89°50′	10′	0.1421	0.9899	0.1435	6.968	81°50′
20′	0.0058	1.000	0.0058	171.9	40′	20′	0.1449	0.9894	0.1465	6.827	40′
30′	0.0087	1.000	0.0087	114.6	30′	30′	0.1478	0.9890	0.1495	6.691	30′
40′	0.0116	0.9999	0.0116	85.94	20′	40′	0.1507	0.9886	0.1524	6.561	20′
0°50′	0.0145	0.9999	0.0145	68.75	10′	8°50′	0.1536	0.9881	0.1554	6.435	10′
1°00′	0.0175	0.9998	0.0175	57.29	89°00′	9°00′	0.1564	0.9877	0.1584	6.314	81°00′
10′	0.0204	0.9998	0.0204	49.10	88°50′	10′	0.1593	0.9872	0.1614	6.197	80°50′
20′	0.0233	0.9997	0.0233	42.96	40′	20′	0.1622	0.9868	0.1644	6.084	40′
30′	0.0262	0.9997	0.0262	38.19	30′	30′	0.1650	0.9863	0.1673	5.976	30′
40′	0.0291	0.9996	0.0291	34.37	20′	40′	0.1679	0.9858	0.1703	5.871	20′
1°50′	0.0320	0.9995	0.0320	31.24	10′	9°50′	0.1708	0.9853	0.1733	5.769	10′
2°00′	0.0349	0.9994	0.0349	28.64	88°00′	10°00′	0.1736	0.9848	0.1763	5.671	80°00′
10′	0.0378	0.9993	0.0378	26.43	87°50′	10′	0.1765	0.9843	0.1793	5.576	79°50′
20′	0.0407	0.9992	0.0407	24.54	40′	20′	0.1794	0.9838	0.1823	5.485	40′
30′	0.0436	0.9990	0.0437	22.90	30′	30′	0.1822	0.9833	0.1853	5.396	30′
40′	0.0465	0.9989	0.0466	21.47	20′	40′	0.1851	0.9827	0.1883	5.309	20′
2°50′	0.0494	0.9988	0.0495	20.21	10′	10°50′	0.1880	0.9822	0.1914	5.226	10′
3°00′	0.0523	0.9986	0.0524	19.08	87°00′	11°00′	0.1908	0.9816	0.1944	5.145	79°00′
10′	0.0552	0.9985	0.0553	18.07	86°50′	10′	0.1937	0.9811	0.1974	5.066	78°50′
20′	0.0581	0.9983	0.0582	17.17	40′	20′	0.1965	0.9805	0.2004	4.989	40′
30′	0.0610	0.9981	0.0612	16.35	30′	30′	0.1994	0.9799	0.2035	4.915	30′
40′	0.0640	0.9980	0.0641	15.60	20′	40′	0.2022	0.9793	0.2065	4.843	20′
3°50′	0.0669	0.9978	0.0670	14.92	10′	11°50′	0.2051	0.9787	0.2095	4.773	10′
4°00′	0.0698	0.9976	0.0699	14.30	86°00′	12°00′	0.2079	0.9781	0.2126	4.705	78°00′
10′	0.0727	0.9974	0.0729	13.73	85°50′	10′	0.2108	0.9775	0.2156	4.638	77°50′
20′	0.0756	0.9971	0.0758	13.20	40′	20′	0.2136	0.9769	0.2186	4.574	40′
30′	0.0785	0.9969	0.0787	12.71	30′	30′	0.2164	0.9763	0.2217	4.511	30′
40′	0.0814	0.9967	0.0816	12.25	20′	40′	0.2193	0.9757	0.2247	4.449	20′
4°50′	0.0843	0.9964	0.0846	11.83	10′	12°50′	0.2221	0.9750	0.2278	4.390	10′
5°00′	0.0872	0.9962	0.0875	11.43	85°00′	13°00′	0.2250	0.9744	0.2309	4.331	77°00′
10′	0.0901	0.9959	0.0904	11.06	84°50′	10′	0.2278	0.9737	0.2339	4.275	76°50′
20′	0.0929	0.9957	0.0934	10.71	40′	20′	0.2306	0.9730	0.2370	4.219	40′
30′	0.0958	0.9954	0.0963	10.39	30′	30′	0.2334	0.9724	0.2401	4.165	30′
40′	0.0987	0.9951	0.0992	10.08	20′	40′	0.2363	0.9717	0.2432	4.113	20′
5°50′	0.1016	0.9948	0.1022	9.788	10′	13°50′	0.2391	0.9710	0.2462	4.061	10′
6°00′	0.1045	0.9945	0.1051	9.514	84°00′	14°00′	0.2419	0.9703	0.2493	4.011	76°00′
10′	0.1074	0.9942	0.1080	9.255	83°50′	10′	0.2447	0.9696	0.2524	3.962	75°50′
20′	0.1103	0.9939	0.1110	9.010	40′	20′	0.2476	0.9689	0.2555	3.914	40′
30′	0.1132	0.9936	0.1139	8.777	30′	30′	0.2504	0.9681	0.2586	3.867	30′
40′	0.1161	0.9932	0.1169	8.556	20′	40′	0.2532	0.9674	0.2617	3.821	20′
6°50′	0.1190	0.9929	0.1198	8.345	10′	14°50′	0.2560	0.9667	0.2648	3.776	10′
7°00′	0.1219	0.9925	0.1228	8.144	83°00′	15°00′	0.2588	0.9659	0.2679	3.732	75°00′
10′	0.1248	0.9922	0.1257	7.953	82′50′	10′	0.2616	0.9652	0.2711	3.689	74°50′
20′	0.1276	0.9918	0.1287	7.770	40′	20′	0.2644	0.9644	0.2742	3.647	40′
30′	0.1305	0.9914	0.1317	7.596	30′	30′	0.2672	0.9636	0.2773	3.606	30′
40′	0.1334	0.9911	0.1346	7.429	20′	40′	0.2700	0.9628	0.2805	3.566	20′
7°50′	0.1363	0.9907	0.1376	7.269	10′	15°50′	0.2728	0.9621	0.2836	3.526	10′
	cos	sen	cot	tan	θ		cos	sen	cot	tan	θ

TABLA III (*continuación*)

θ	sen	cos	tan	cot	θ	θ	sen	cos	tan	cot	θ
16°00′	0.2756	0.9613	0.2867	3.487	74°00′	24′00′	0.4067	0.9135	0.4452	2.246	66°00′
10′	0.2784	0.9605	0.2899	3.450	73°50′	10′	0.4094	0.9124	0.4487	2.229	65°50′
20′	0.2812	0.9596	0.2931	3.412	40′	20′	0.4120	0.9112	0.4522	2.211	40′
30′	0.2840	0.9588	0.2962	3.376	30′	30′	0.4147	0.9100	0.4557	2.194	30′
40′	0.2868	0.9580	0.2994	3.340	20′	40′	0.4173	0.9088	0.4592	2.177	20′
16°50′	0.2896	0.9572	0.3026	3.305	10′	24°50′	0.4200	0.9075	0.4628	2.161	10′
17°00′	0.2924	0.9563	0.3057	3.271	73°00′	25°00′	0.4226	0.9063	0.4663	2.145	65°00′
10′	0.2952	0.9555	0.3089	3.237	72°50′	10′	0.4253	0.9051	0.4699	2.128	64°50′
20′	0.2979	0.9546	0.3121	3.204	40′	20′	0.4279	0.9038	0.4734	2.112	40′
30′	0.3007	0.9537	0.3153	3.172	30′	30′	0.4305	0.9026	0.4770	2.097	30′
40′	0.3035	0.9528	0.3185	3.140	20′	40′	0.4331	0.9013	0.4806	2.081	20′
17°50′	0.3062	0.9520	0.3217	3.108	10′	25°50′	0.4358	0.9001	0.4841	2.066	10′
18°00′	0.3090	0.9511	0.3249	3.078	72°00′	26°00′	0.4384	0.8988	0.4877	2.050	64°00′
10′	0.3118	0.9502	0.3281	3.047	71°50′	10′	0.4410	0.8975	0.4913	2.035	63°50′
20′	0.3145	0.9492	0.3314	3.018	40′	20′	0.4436	0.8962	0.4950	2.020	40′
30′	0.3173	0.9483	0.3346	2.989	30′	30′	0.4462	0.8949	0.4986	2.006	30′
40′	0.3201	0.9474	0.3378	2.960	20′	40′	0.4488	0.8936	0.5022	1.991	20′
18°50′	0.3228	0.9465	0.3411	2.932	10′	26°50′	0.4514	0.8923	0.5059	1.977	10′
19°00′	0.3256	0.9455	0.3443	2.904	71°00′	27°00′	0.4540	0.8910	0.5095	1.963	63°00′
10′	0.3283	0.9446	0.3476	2.877	70°50′	10′	0.4566	0.8897	0.5132	1.949	62′50′
20′	0.3311	0.9436	0.3508	2.850	40′	20′	0.4592	0.8884	0.5169	1.935	40′
30′	0.3338	0.9426	0.3541	2.824	30′	30′	0.4617	0.8870	0.5206	1.921	30′
40′	0.3365	0.9417	0.3574	2.798	20′	40′	0.4643	0.8857	0.5243	1.907	20′
19°50′	0.3393	0.9407	0.3607	2.773	10′	27°50′	0.4669	0.8843	0.5280	1.894	10′
20°00′	0.3420	0.9397	0.3640	2.747	70°00′	28°00′	0.4695	0.8829	0.5317	1.881	62°00′
10′	0.3448	0.9387	0.3673	2.723	69°50′	10′	0.4720	0.8816	0.5354	1.868	61°50′
20′	0.3475	0.9377	0.3706	2.699	40′	20′	0.4746	0.8802	0.5392	1.855	40′
30′	0.3502	0.9367	0.3739	2.675	30′	30′	0.4772	0.8788	0.5430	1.842	30′
40′	0.3529	0.9356	0.3772	2.651	20′	40′	0.4797	0.8774	0.5467	1.829	20′
20°50′	0.3557	0.9346	0.3805	2.628	10′	28°50′	0.4823	0.8760	0.5505	1.816	10′
21°00′	0.3584	0.9336	0.3839	2.605	69°00′	29°00′	0.4848	0.8746	0.5543	1.804	61°00′
10′	0.3611	0.9325	0.3872	2.583	68°50′	10′	0.4874	0.8732	0.5581	1.792	60°50′
20′	0.3638	0.9315	0.3906	2.560	40′	20′	0.4899	0.8718	0.5619	1.780	40′
30′	0.3665	0.9304	0.3939	2.539	30′	30′	0.4924	0.8704	0.5658	1.767	30′
40′	0.3692	0.9293	0.3973	2.517	20′	40′	0.4950	0.8689	0.5696	1.756	20′
21°50′	0.3719	0.9283	0.4006	2.496	10′	29°50′	0.4975	0.8675	0.5735	1.744	10′
22°00′	0.3746	0.9272	0.4040	2.475	68°00′	30°00′	0.5000	0.8660	0.5774	1.732	60°00′
10′	0.3773	0.9261	0.4074	2.455	67°50′	10′	0.5025	0.8646	0.5812	1.720	59°50′
20′	0.3800	0.9250	0.4108	2.434	40′	20′	0.5050	0.8631	0.5851	1.709	40′
30′	0.3827	0.9239	0.4142	2.414	30′	30′	0.5075	0.8616	0.5890	1.698	30′
40′	0.3854	0.9228	0.4176	2.394	20′	40′	0.5100	0.8601	0.5930	1.686	20′
22°50′	0.3881	0.9216	0.4210	2.375	10′	30°50′	0.5125	0.8587	0.5969	1.675	10′
23°00′	0.3907	0.9205	0.4245	2.356	67°00′	31°00′	0.5150	0.8572	0.6009	1.664	59°00′
10′	0.3934	0.9194	0.4279	2.337	66°50′	10′	0.5175	0.8557	0.6048	1.653	58°50′
20′	0.3961	0.9182	0.4314	2.318	40′	20′	0.5200	0.8542	0.6088	1.643	40′
30′	0.3987	0.9171	0.4348	2.300	30′	30′	0.5225	0.8526	0.6128	1.632	30′
40′	0.4014	0.9159	0.4383	2.282	20′	40′	0.5250	0.8511	0.6168	1.621	20′
23°50′	0.4041	0.9147	0.4417	2.264	10′	31°50′	0.5275	0.8496	0.6208	1.611	10′
	cos	sen	cot	tan	θ		cos	sen	cot	tan	θ

TABLA III (*continuación*)

θ	sen	cos	tan	cot		θ	sen	cos	tan	cot	
32°00′	0.5299	0.8480	0.6249	1.600	58°00′	39°00′	0.6293	0.7771	0.8098	1.235	51°00′
10′	0.5324	0.8465	0.6289	1.590	57°50′	10′	0.6316	0.7753	0.8146	1.228	50°50′
20′	0.5348	0.8450	0.6330	1.580	40′	20′	0.6338	0.7735	0.8195	1.220	40′
30′	0.5373	0.8434	0.6371	1.570	30′	30′	0.6361	0.7716	0.8243	1.213	30′
40′	0.5398	0.8418	0.6412	1.560	20′	40′	0.6383	0.7698	0.8292	1.206	20′
32°50′	0.5422	0.8403	0.6453	1.550	10′	39°50′	0.6406	0.7679	0.8342	1.199	10′
33°00′	0.5446	0.8387	0.6494	1.540	57°00′	40°00′	0.6428	0.7660	0.8391	1.192	50°00′
10′	0.5471	0.8371	0.6536	1.530	56°50′	10′	0.6450	0.7642	0.8441	1.185	49°50′
20′	0.5495	0.8355	0.6577	1.520	40′	20′	0.6472	0.7623	0.8491	1.178	40′
30′	0.5519	0.8339	0.6619	1.511	30′	30′	0.6494	0.7604	0.8541	1.171	30′
40′	0.5544	0.8323	0.6661	1.501	20′	40′	0.6517	0.7585	0.8591	1.164	20′
33°50′	0.5568	0.8307	0.6703	1.492	10′	40°50′	0.6539	0.7566	0.8642	1.157	10′
34°00′	0.5592	0.8290	0.6745	1.483	56°00′	41°00′	0.6561	0.7547	0.8693	1.150	49°00′
10′	0.5616	0.8274	0.6787	1.473	55°50′	10′	0.6583	0.7528	0.8744	1.144	48°50′
20′	0.5640	0.8258	0.6830	1.464	40′	20′	0.6604	0.7509	0.8796	1.137	40′
30′	0.5664	0.8241	0.6873	1.455	30′	30′	0.6626	0.7490	0.8847	1.130	30′
40′	0.5688	0.8225	0.6916	1.446	20′	40′	0.6648	0.7470	0.8899	1.124	20′
34°50′	0.5712	0.8208	0.6959	1.437	10′	41°50′	0.6670	0.7451	0.8952	1.117	10′
35°00′	0.5736	0.8192	0.7002	1.428	55°00′	42°00′	0.6691	0.7431	0.9004	1.111	48°00′
10′	0.5760	0.8175	0.7046	1.419	54°50′	10′	0.6713	0.7412	0.9057	1.104	47°50′
20′	0.5783	0.8158	0.7089	1.411	40′	20′	0.6734	0.7392	0.9110	1.098	40′
30′	0.5807	0.8141	0.7133	1.402	30′	30′	0.6756	0.7373	0.9163	1.091	30′
40′	0.5831	0.8124	0.7177	1.393	20′	40′	0.6777	0.7353	0.9217	1.085	20′
35°50′	0.5854	0.8107	0.7221	1.385	10′	42°50′	0.6799	0.7333	0.9271	1.079	10′
36°00′	0.5878	0.8090	0.7265	1.376	54°00′	43°00′	0.6820	0.7314	0.9325	1.072	47°00′
10′	0.5901	0.8073	0.7310	1.368	53°50′	10′	0.6841	0.7294	0.9380	1.066	46°50′
20′	0.5925	0.8056	0.7355	1.360	40′	20′	0.6862	0.7274	0.9435	1.060	40′
30′	0.5948	0.8039	0.7400	1.351	30′	30′	0.6884	0.7254	0.9490	1.054	30′
40′	0.5972	0.8021	0.7445	1.343	20′	40′	0.6905	0.7234	0.9545	1.048	20′
36°50′	0.5995	0.8004	0.7490	1.335	10′	43°50′	0.6926	0.7214	0.9601	1.042	10′
37°00′	0.6018	0.7986	0.7536	1.327	53°00′	44°00′	0.6947	0.7193	0.9657	1.036	46°00′
10′	0.6041	0.7969	0.7581	1.319	52°50′	10′	0.6967	0.7173	0.9713	1.030	45°50′
20′	0.6065	0.7951	0.7627	1.311	40′	20′	0.6988	0.7153	0.9770	1.024	40′
30′	0.6088	0.7934	0.7673	1.303	30′	30′	0.7009	0.7133	0.9827	1.018	30′
40′	0.6111	0.7916	0.7720	1.295	20′	40′	0.7030	0.7112	0.9884	1.012	20′
37°50′	0.6134	0.7898	0.7766	1.288	10′	44°50′	0.7050	0.7092	0.9942	1.006	10′
38°00′	0.6157	0.7880	0.7813	1.280	52°00′	45°00′	0.7071	0.7071	1.000	1.000	45°00′
10′	0.6180	0.7862	0.7860	1.272	51°50′						
20′	0.6202	0.7844	0.7907	1.265	40′						
30′	0.6225	0.7826	0.7954	1.257	30′						
40′	0.6248	0.7808	0.8002	1.250	20′						
38°50′	0.6271	0.7790	0.8050	1.242	10′						
	cos	sen	cot	tan	θ		cos	sen	cot	tan	θ

TABLA IV

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS (RADIANES)

t	sen	cos	tan	cot	t	sen	cos	tan	cot
0.00	0.0000	1.0000	0.0000	—	0.45	0.4350	0.9004	0.4831	2.070
0.01	0.0100	1.0000	0.0100	99.997	0.46	0.4439	0.8961	0.4954	2.018
0.02	0.0200	0.9998	0.0200	49.993	0.47	0.4529	0.8916	0.5080	1.969
0.03	0.0300	0.9996	0.0300	33.323	0.48	0.4618	0.8870	0.5206	1.921
0.04	0.0400	0.9992	0.0400	24.987	0.49	0.4706	0.8823	0.5334	1.875
0.05	0.0500	0.9988	0.0500	19.983	0.50	0.4794	0.8776	0.5463	1.830
0.06	0.0600	0.9982	0.0601	16.647	0.51	0.4882	0.8727	0.5594	1.788
0.07	0.0699	0.9976	0.0701	14.262	0.52	0.4969	0.8678	0.5726	1.747
0.08	0.0799	0.9968	0.0802	12.473	0.53	0.5055	0.8628	0.5859	1.707
0.09	0.0899	0.9960	0.0902	11.081	0.54	0.5141	0.8577	0.5994	1.668
0.10	0.0998	0.9950	0.1003	9.967	0.55	0.5227	0.8525	0.6131	1.631
0.11	0.1098	0.9940	0.1104	9.054	0.56	0.5312	0.8473	0.6269	1.595
0.12	0.1197	0.9928	0.1206	8.293	0.57	0.5396	0.8419	0.6410	1.560
0.13	0.1296	0.9916	0.1307	7.649	0.58	0.5480	0.8365	0.6552	1.526
0.14	0.1395	0.9902	0.1409	7.096	0.59	0.5564	0.8309	0.6696	1.494
0.15	0.1494	0.9888	0.1511	6.617	0.60	0.5646	0.8253	0.6841	1.462
0.16	0.1593	0.9872	0.1614	6.197	0.61	0.5729	0.8196	0.6989	1.431
0.17	0.1692	0.9856	0.1717	5.826	0.62	0.5810	0.8139	0.7139	1.401
0.18	0.1790	0.9838	0.1820	5.495	0.63	0.5891	0.8080	0.7291	1.372
0.19	0.1889	0.9820	0.1923	5.200	0.64	0.5972	0.8021	0.7445	1.343
0.20	0.1987	0.9801	0.2027	4.933	0.65	0.6052	0.7961	0.7602	1.315
0.21	0.2085	0.9780	0.2131	4.692	0.66	0.6131	0.7900	0.7761	1.288
0.22	0.2182	0.9759	0.2236	4.472	0.67	0.6210	0.7838	0.7923	1.262
0.23	0.2280	0.9737	0.2341	4.271	0.68	0.6288	0.7776	0.8087	1.237
0.24	0.2377	0.9713	0.2447	4.086	0.69	0.6365	0.7712	0.8253	1.212
0.25	0.2474	0.9689	0.2553	3.916	0.70	0.6442	0.7648	0.8423	1.187
0.26	0.2571	0.9664	0.2660	3.759	0.71	0.6518	0.7584	0.8595	1.163
0.27	0.2667	0.9638	0.2768	3.613	0.72	0.6594	0.7518	0.8771	1.140
0.28	0.2764	0.9611	0.2876	3.478	0.73	0.6669	0.7452	0.8949	1.117
0.29	0.2860	0.9582	0.2984	3.351	0.74	0.6743	0.7385	0.9131	1.095
0.30	0.2955	0.9553	0.3093	3.233	0.75	0.6816	0.7317	0.9316	1.073
0.31	0.3051	0.9523	0.3203	3.122	0.76	0.6889	0.7248	0.9505	1.052
0.32	0.3146	0.9492	0.3314	3.018	0.77	0.6961	0.7179	0.9697	1.031
0.33	0.3240	0.9460	0.3425	2.920	0.78	0.7033	0.7109	0.9893	1.011
0.34	0.3335	0.9428	0.3537	2.827	0.79	0.7104	0.7038	1.009	0.9908
0.35	0.3429	0.9394	0.3650	2.740	0.80	0.7174	0.6967	1.030	0.9712
0.36	0.3523	0.9359	0.3764	2.657	0.81	0.7243	0.6895	1.050	0.9520
0.37	0.3616	0.9323	0.3879	2.578	0.82	0.7311	0.6822	1.072	0.9331
0.38	0.3709	0.9287	0.3994	2.504	0.83	0.7379	0.6749	1.093	0.9146
0.39	0.3802	0.9249	0.4111	2.433	0.84	0.7446	0.6675	1.116	0.8964
0.40	0.3894	0.9211	0.4228	2.365	0.85	0.7513	0.6600	1.138	0.8785
0.41	0.3986	0.9171	0.4346	2.301	0.86	0.7578	0.6524	1.162	0.8609
0.42	0.4078	0.9131	0.4466	2.239	0.87	0.7643	0.6448	1.185	0.8437
0.43	0.4169	0.9090	0.4586	2.180	0.88	0.7707	0.6372	1.210	0.8267
0.44	0.4259	0.9048	0.4708	2.124	0.89	0.7771	0.6294	1.235	0.8100
t	sen	cos	tan	cot	t	sen	cos	tan	cot

TABLA IV (*continuación*)

t	sen	cos	tan	cot	t	sen	cos	tan	cot
0.90	0.7833	0.6216	1.260	0.7936	1.25	0.9490	0.3153	3.010	0.3323
0.91	0.7895	0.6137	1.286	0.7774	1.26	0.9521	0.3058	3.113	0.3212
0.92	0.7956	0.6058	1.313	0.7615	1.27	0.9551	0.2963	3.224	0.3102
0.93	0.8016	0.5978	1.341	0.7458	1.28	0.9580	0.2867	3.341	0.2993
0.94	0.8076	0.5898	1.369	0.7303	1.29	0.9608	0.2771	3.467	0.2884
0.95	0.8134	0.5817	1.398	0.7151	1.30	0.9636	0.2675	3.602	0.2776
0.96	0.8192	0.5735	1.428	0.7001	1.31	0.9662	0.2579	3.747	0.2669
0.97	0.8249	0.5653	1.459	0.6853	1.32	0.9687	0.2482	3.903	0.2562
0.98	0.8305	0.5570	1.491	0.6707	1.33	0.9711	0.2385	4.072	0.2456
0.99	0.8360	0.5487	1.524	0.6563	1.34	0.9735	0.2288	4.256	0.2350
1.00	0.8415	0.5403	1.557	0.6421	1.35	0.9757	0.2190	4.455	0.2245
1.01	0.8468	0.5319	1.592	0.6281	1.36	0.9779	0.2092	4.673	0.2140
1.02	0.8521	0.5234	1.628	0.6142	1.37	0.9799	0.1994	4.913	0.2035
1.03	0.8573	0.5148	1.665	0.6005	1.38	0.9819	0.1896	5.177	0.1931
1.04	0.8624	0.5062	1.704	0.5870	1.39	0.9837	0.1798	5.471	0.1828
1.05	0.8674	0.4976	1.743	0.5736	1.40	0.9854	0.1700	5.798	0.1725
1.06	0.8724	0.4889	1.784	0.5604	1.41	0.9871	0.1601	6.165	0.1622
1.07	0.8772	0.4801	1.827	0.5473	1.42	0.9887	0.1502	6.581	0.1519
1.08	0.8820	0.4713	1.871	0.5344	1.43	0.9901	0.1403	7.055	0.1417
1.09	0.8866	0.4625	1.917	0.5216	1.44	0.9915	0.1304	7.602	0.1315
1.10	0.8912	0.4536	1.965	0.5090	1.45	0.9927	0.1205	8.238	0.1214
1.11	0.8957	0.4447	2.014	0.4964	1.46	0.9939	0.1106	8.989	0.1113
1.12	0.9001	0.4357	2.066	0.4840	1.47	0.9949	0.1006	9.887	0.1011
1.13	0.9044	0.4267	2.120	0.4718	1.48	0.9959	0.0907	10.983	0.0910
1.14	0.9086	0.4176	2.176	0.4596	1.49	0.9967	0.0807	12.350	0.0810
1.15	0.9128	0.4085	2.234	0.4475	1.50	0.9975	0.0707	14.101	0.0709
1.16	0.9168	0.3993	2.296	0.4356	1.51	0.9982	0.0608	16.428	0.0609
1.17	0.9208	0.3902	2.360	0.4237	1.52	0.9987	0.0508	19.670	0.0508
1.18	0.9246	0.3809	2.427	0.4120	1.53	0.9992	0.0408	24.498	0.0408
1.19	0.9284	0.3717	2.498	0.4003	1.54	0.9995	0.0308	32.461	0.0308
1.20	0.9320	0.3624	2.572	0.3888	1.55	0.9998	0.0208	48.078	0.0208
1.21	0.9356	0.3530	2.650	0.3773	1.56	0.9999	0.0108	92.620	0.0108
1.22	0.9391	0.3436	2.733	0.3659	1.57	1.0000	0.0008	1,255.8	0.0008
1.23	0.9425	0.3342	2.820	0.3546	1.58	1.0000	−0.0092	−108.65	−0.0092
1.24	0.9458	0.3248	2.912	0.3434	1.59	0.9998	−0.0192	−52.067	−0.0192
					1.60	0.9996	−0.0292	−34.233	−0.0292
t	sen	cos	tan	cot	t	sen	cos	tan	cot

Respuestas a los problemas de números impares

CAPITULO 0

EJERCICIO 0.1 (página iv)

1. Sí, F **3.** Sí, V **5.** No **7.** Sí, V
9. No **11.** Sí, F **13.** Sí, V **15.** No

EJERCICIO 0.2 (páginas xi-xii)

1. $P \wedge Q$ **3.** $P \to Q$ **5.** $P \leftrightarrow Q$ **7.** $P \to Q$
9. $P \to Q$ **11.** 7< 9 o el Sol es un astro frío
13. Si 7 no es menor que 9 entonces el Sol es un astro frío.
15. Si la temperatura está por debajo de cero y 7 < 9 entonces el Sol es un astro frío.
17. 7 < 9 y el Sol es un astro frío si y sólo si la temperatura está por debajo de cero.
19. 7 < 9 y el Sol es un astro frío, y, el Sol es un astro frío y la temperatura está por debajo de cero.

21.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

23.

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$(p \vee \sim q) \to p \wedge q$	$(p \to q) \to (p \vee \sim q) \to p \wedge q$
V	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F	F

25. P: Un número p es real Q: p es no racional $Q \to (P \wedge Q)$
27. F **29.** F
31. Un byte tiene 7 bits y una palabra consiste en 2 bytes. F
33. No ocurre a la vez que un byte tiene 7 bits y una palabra 2 bytes. V
35. Un byte tiene 7 bits y una palabra tiene 2 bytes, o un bit es un 0 o un 1, y , un byte tiene 7 bits o un byte es un 0 o un 1. V
37. $\sim q$ **39.** $\sim r \wedge \sim p$. F

EJERCICIO 0.3 (página xv)

1. Tautología **3.** Contingencia **5.** Tautología
7. Tautología **9.** Contingencia **11.** No **13.** Sí

EJERCICIO 0.4 (página xix)

1. Sí **3.** No **5.** No **7.** Sí **9.** No

11.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Tautología

13.

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Tautología

15. $v(p) = F$ $v(q) = F$
17. Por silogismo hipotético se tiene $p \to (s \vee q)$. Por simplificación p y por modus ponens $s \vee q$ y por simplificación $\sim q$ y por silogismo disyuntivo S.

EJERCICIO 0.5 (página xxi)

1. x es más rápido que José.
3. Si x es más rápido que y entonces y es más alto que x.
5. Miguel es más rápido que José, o, Miguel es más alto que José y José pesa más de 200 libras.
7. Cualquiera sea x, x es más rápido que José si y sólo si José pesa más de 200 libras.
9. Existe y tal que para todo x, si x es más rápido que y entonces x pesa más de 200 libras.
11. $\sim(\forall x, P(x))$ $P(x)$: x es bonita.
13. $\sim(\exists x, P(x))$ $P(x)$: x ama a todo el mundo.
15. $(\exists x, P(x)) \vee (\sim R)$ $P(x)$: x es más grande que cualquier solución conocida. R: hay solución.
17. F **19.** V **21.** V

EJERCICIO 0.6 (página xxiii)

1. {0} **3.** {0} **5.** { }
7. {5, 10, 15, 20, 25…} no es posible.
11. $\{x|x$ es una vocal del alfabeto$\}$ **13.** $\{x|x$ es un impar$\}$
15. $\{x|x$ es un cuadrado perfecto diferente de 1$\}$
17. $\{x|x$ es entero y $0 \le x \le 9\}$
19. $\{x|x$ es la capital de la República Dominicana$\}$

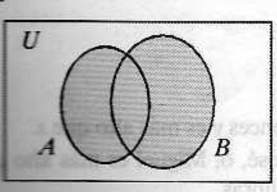
EJERCICIO 0.7 (página xxix)

1. **1)** 1 **2)** 9 **3)** 3 **4)** 7 **5)** 0 **6)** ∞ **7)** ∞ **8)** 2 **9)** 1 **11)** 5 **12)** ∞ **13)** ∞ **14)** 28 **15)** ∞**16)** 9 **17)** 10 **18)** 2 **19)** 1 **20)** 0
3. $E = \{x|x$ es un entero par tal que $4 + 3 = 3\}$ j = { } $E = J$
5. {1} **7.** {0, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 7, 8, 9}
9. A, B, C, D son subconjuntos de A y B son subconjuntos uno del otro, $D \subset C$.
11. A y D, B y D.
13. $C = A \cap B \subset A$ siempre
Si $A \subset B$ entonces $A \subset A \cap B \therefore A = A \cap B = C$
15. $\in$ **17.** $\in$ **19.** $\in$ o $\subset$ **21.** $\in$ o $\subset$ **23.** $\subset$
25. V **27.** F **29.** V **31.** V **33.** V
35. V **37.** V **39.** F **41.** F **43.** F
45. F **47.** {∅, { }}
49. {∅,{a},{b},{c},{d},{e},{a, b},{a, c},{a, d},{a, e},{b, c},{b, d},{b, e},{c, d}, {c, e},{d, e},{a, b, c},{a, b, d},{a, b, e},{a, c, d},{a, c, e},{a, d, e},{c, d, e},{b, c, d}, {b, c, e},{b, d, e},{a,b,c,d},{a,b,c,e},{a,b,d,e},{a,c,d,e},{b,c,d,e},{a,b,c,d,e}.
51. {a} **53.** No **55.** No **57.** Sí
59. No **61.** No **63.** No **65.** Sí.

EJERCICIO 0.8 (página xxxvii)

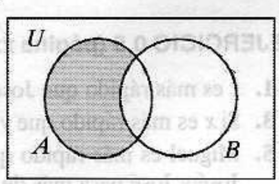
1. {a, b, c, d, e, f, g} **3.** {e, g, i} **5.** {e}
7. {e, f, g, h, i, a, c} **9.** {f, g, h, i} **11.** {f, g}
13. {a, b, c} **15.** {d, e} **17.** {a, c}
19. {a, c, g, i} **21.** {1, 3, 5, 7, 9, 10} **23.** {2}
25. {1, 2, 6, 7, 8, 9, 10} **27.** ∅ **29.** U
31. A **33.** A **35.** A **37.** U **39.** B

41.



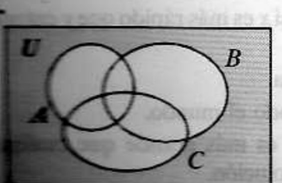
$A \cup B$

43.



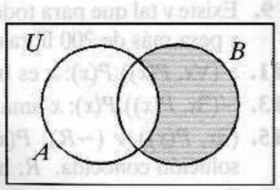
$A - B$

45.



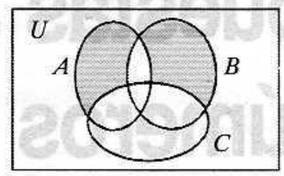
$(A' \cap B') \cap C' = (A \cup B \cup C)$

47.



$A' \cap B = B - A$

49.



$(A' \,\Delta\, B') \cap C'$
$= [(A' \cup B') - (A' \cap B')] \cap C'$
$= [(A \cap B)' - (A \cup B)'] \cap C'$
$= [(A \cap B)' \cap (A \cup B)] \cap C'$

51. V **53.** F **55.** F
57. {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8} **59.** ∅ **61.** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
63. $x \in (A \cup B)' \leftrightarrow x \notin A \cup B \leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$
$\leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B'$
$\leftrightarrow x \in A' \cap B'$
65. $A \cap B' = A \leftrightarrow B' \supset A$
$\leftrightarrow A \cap B = \varnothing$
67. $x \in (A \cap B) \cap C \leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C$
$\leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$
$\leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$
$\leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cap C$
$\leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$

EJERCICIO 0.9 (página xlii)

1. 3 **3.** 16 **5.** 9 **7.** 5 **9.** 10
11. **a)** 3, **b)** 30 **13.** 175, 115 **15.** 19 **17.** 20 **19.** 100

EJERCICIO DE REPASO (páginas xliii-xliv)

1. Recíproca: Si no soy el rey de Inglaterra, entonces 2 + 2 = 4.
Inversa: Si 2 + 2 = 4, entonces yo soy el rey de Inglaterra.
Contrapositiva: Si yo soy el rey de Inglaterra, entonces 2 + 2 = 4.
3. $r \to q$ **5.** Contradicción **7.** Contingencia
9. Sí **11.** F, $\exists x$, x dividido por 2 no es entero, V
13.

p	q	r	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$	$\sim p$	$\sim r$	$\sim p \vee \sim r$	$[(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \wedge (\sim p \vee \sim r)$
V	V	V	V	V	V	F	F	F	F
V	V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F	V	V	V	F

15. Sí **17.** Falacia
19. $\exists x, \exists y, x < y \wedge (\forall z, z \le x \vee z \ge y)$ **21.** F

23.

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$(p \vee \sim q) \to p \wedge q$	$(p \to q) \to (p \vee \sim q) \to p \wedge q$
V	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F	F

25. Si no seré feliz, no me ascenderán por contrapositiva, por modus ponens no me ascendieron y por contrapositiva se obtiene la conclusión, es válido.

27. Si $v(p)$ es v entonces por modus ponens $v(q \vee r) = v$ y por silogismo disyuntivo $v(s \vee t) = v$, luego $p \to s \vee t$.

29. Si existe un miembro x del club tal que cualquiera sea la línea aérea y, x ha sido pasajero de y, entonces, cualquiera la línea aérea y, existe un miembro x del club tal que x ha sido pasajero de y.

31. Cualquiera sea el miembro x del club y cualquiera sea la línea aérea y, x ha sido pasajero de y si y sólo si cualquiera sea la línea aérea y, y cualquiera sea el miembro x del club, x ha sido pasajero de y.

33. Si $t - 8$ es racional, entonces $t - 8 + 8 = t$ también es racional lo cual contradice la hipótesis; por tanto, $t - 8$ es irracional.

35. $A - B = A$ $\quad A \cap B = \varnothing$ $\quad B - A = B$

37. ∞ **39.** ∞ **41.** V **43.** F

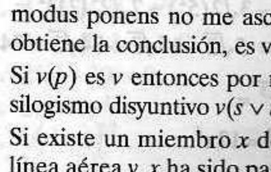
45. F **47.** $\varnothing$ **49.** $\{0, 7, 8, 9\}$

51. $\{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{5\}, 1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}$

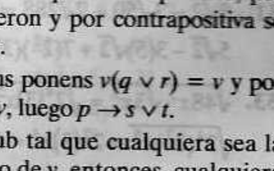
53. $A \,\Delta A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \varnothing$

55. $\{0, 1, 2, 3\}$ **57.** $P(\{0, 1, 2, 3\}) - \{\varnothing\}$

59.



61.



63. V **65.** V

67. **a)** 180 **b)** 60 **c)** 70 **d)** 120 **e)** 190

69. **a)** 225 **b)** 25 **c)** 100 **d)** 125 **e)** 105

CAPITULO 1

EJERCICIO 1.1 (páginas 10-11)

1. $\{5, 11, 17, 23, \ldots\}$ **3.** $\{1, 9/7\}$ **5.** $m = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$

7. $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ **9.** F **11.** V

13. F **15.** V **17.** V

19. V **21.** V **23.** V

25. V **27.** 7/9 **29.** 53/165

31. 13/40 **33.** 235/999 **35.** 0.45

37. 1.28 **39.** 3205% **41.** 64.12%

43. −10

45. 1.007L dólares, la lista de precios se incrementa 0.7% lo que equivale a un aumento menor que 1%.

47. 15%

49. Precio original US$300, precio de venta US$90 y descuento final US$210.

51. Conmutativa (adición)

53. Conmutativa (producto)

55. Conmutativa (adición)

57. Inverso aditivo

59. Propiedad del inverso multiplicativo

61. Propiedad de identidad de la multiplicación.

63. Propiedad conmutativa de la multiplicación.

65. Propiedad distributiva (i).

67. Ley cancelativa (ii).

69. 8 (ii)

71. 8(i)

73. 17 (i)

77. **(a)** V; **(b)** F

81. Un ejemplo posible es (3÷1) = 3 pero 1÷3 = 1/3.

83. $-1/m$, $k \neq 0$

85. $\dfrac{5+b}{2b}$

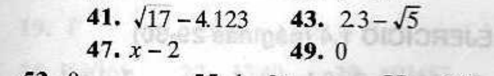
87. $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = xx^{-1} = 1$, así que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, como $x^{-1} \cdot x = 1$, se sigue que x es el inverso multiplicativo de x^{-1}, esto es $x = (x^{-1})^{-1}$ análogamente, como $(x/y)(y/x) = 1$ entonces $(y/x) = (x/y)^{-1}$

89. No, puede ser racional, ejemplo: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

91. 3.

EJERCICIO 1.2 (páginas 16-17)

1. Ver figura



3. $x + y \geq 0$ **5.** $a < -4$ **7.** $k \geq 100$

9. $c - 1 \leq 5$ **11.** $-9 < 0$ **13.** $1.732 < \sqrt{3}$

15. $1.33 < 4/3$ **17.** $1/3 \geq 0.333$ **19.** $-1/7 \geq -0.143$

21. $\sqrt{2} \geq 1.414$ **23.** 8 **25.** 15/7

27. $\sqrt{5}$ **29.** 0.13 **31.** 15

33. 4 **35.** 49 **37.** $6 - \sqrt{5}$

39. $8 - \sqrt{7}$ **41.** $\sqrt{17} - 4.123$ **43.** $2.3 - \sqrt{5}$

45. u **47.** $x - 2$ **49.** 0

51. 1 **53.** 0 **55.** $b - 3a$ **57.** $x \geq 0$

59. Para todos los valores reales de x

61. V **63.** V **65.** V **67.** V

69. **(a)** 3; **(b)** −6.5 **71.** **(a)** 12.2; **(b)** 0.9

73. **(a)** 0.5; **(b)** 0.65 **75.** **(a)** 330; **(b)** 65

77. $a = 1, b = 9$ **79.** $a = -3 - \sqrt{2}$, $m = -3 - \sqrt{2}/2$

81. $a = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}$, $b = \dfrac{1}{2} + \sqrt{2}$

83. $m = 18, \quad b = 24$ **85.** 11 **87.** $\sqrt{3} > 1.7$

89. $|-12| = 12$ **91.** $\sqrt{2} - 2 < 0$ **93.** $7/11 = 0.63\ldots$

95. 1.25 millas ó 0.25 millas.

97. Si las plantas procesadoras se construyen originalmente en un lugar dado x, $-y$, luego la distancia total entre ellas viene dada por $|x+y|$. Si está construida en el punto d, la distancia es $|x-d|+|d+y|+|d|$.

Si $d \neq 0$, entonces $|x+y| = |(x-d)+(d+y)| \leq |x-d|+|d+y| < |x-d|+|d+y|+|d|$.

EJERCICIO 1.3 (páginas 23-24)

1. $1/6^3$ **3.** $(5y)^4$ **5.** z^{-2} **7.** $2y^{-3}/x^{-2}$

9. **(a)** 16; **(b)** 1/16 ; **(c)** –16 **11.** **(a)** –1; **(b)** 1; **(c)** 1

13. **(a)** 27/125; **(b)** –125/27; **(c)** 125/27 **15.** 27/4

17. 0 **19.** 1522 **21.** 1/6 **23.** –7/6

25. $ab^2 - c^3 = 19,\ a = 2,\ b = -3,\ c = -1$

$2(-3)^2 - (-1)^3 = 19$

$18 - (-1) = 19$

$18 + 1 = 19$

$19 = 19$

27. a^3 **29.** 3^{20} **31.** s^6/t^2 **33.** 4^5 **35.** $1/x^{20}$

37. $-8x^3$ **39.** $49ab$ **41.** $9y^9/x$ **43.** b^2/a^5 **45.** $m^{12}n^{20}$

47. $a = b$, para todo $a, b \in R$ (a y b toman el mismo valor)

49. $a \in R^+$ **51.** Positivo **53.** Positivo

55. Positivo **57.** $A = \pi r^2$ **59.** $A = s^2$

61. $A = \dfrac{s^2\sqrt{3}}{4}$ **63.** $x + (x+2) + (x+4) = 180$

65. $7/2t = 258$ **67.** $\pi z^2 = 64\pi$

69. **(a)** 3.41×10^8; **(b)** 3.41×10^{-3}

71. **(a)** 1.05×10^6 ; **(b)** 1.05×10^{-5} **73.** **(a)** 32500000; **(b)** 0.0000325

75. 4.9064×10^{-4} **77.** 1.1×10^{11}

79. **(a)** 7,200,000,000,000; **(b)** 7.2×10^{12}

81. **(a)** 32,000,000,000,000,000,000; **(b)** 3.2×10^{19}

83. 1,828.8 mm **85.** F **87.** F

89. Tomando en cuenta (*V*) de las leyes de los exponentes $x^n/x^n = x^{n-n} = x^0$, sin embargo, si $x \neq 0$, $x^n/x^n = 1$. Así que, x^0 se debe definir como 1 para cualquier número x diferente de cero.

91. **(a)** 30 cm; **(b)** 12 pulgadas **93.** **(a)** 512,000; **(b)** 5.12×10^5

EJERCICIO 1.4 (páginas 29-30)

1. –4 **3.** 0.1 **5.** 4 **7.** $1/xy^2$ **9.** $a/c^2\sqrt{(10/b)}$

11. 3 **13.** 6 **15.** $4a^4\sqrt{b}$ **17.** $2x^2y\sqrt[4]{2}$

19. $1/8b$ **21.** $27/y^3$ **23.** $-p^{-1}q^2$ **25.** $\sqrt{2}x^2$

27. $3as^4$ **29.** $5y^3/a^2\ \sqrt{2y/3a}$ **31.** abc

33. $\sqrt{6/2}$ **35.** $\sqrt{7/7}$ **37.** $\sqrt[3]{2}$

39. $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$ **41.** $\dfrac{2}{\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}}$ **43.** $\dfrac{1}{-t\sqrt{t+u}+(t+u)\sqrt{t}}$

45. $\dfrac{2\sqrt{24x^3}}{\sqrt{3x}} = 2\sqrt{(24x^3)/3x} = 2\sqrt{8x^2} =$

$2\sqrt{2\cdot 4x^2} = 2(2)\,x\sqrt{2} = 4\,x\sqrt{2}$

47. $3\sqrt[3]{16t^3} + 8\sqrt[3]{t^3/4} = 3t\sqrt[3]{16} + 8\sqrt[3]{t^3}/\sqrt[3]{4} =$

$3t\sqrt[3]{2^3(2)} + 8t/\sqrt[3]{4} = 3t(2)\sqrt[3]{2} + 8t/\sqrt[3]{2^2} =$

$6t\sqrt[3]{2} + \left(8t/\sqrt[3]{2^2}\right)\left(\sqrt[3]{2}/\sqrt[3]{2}\right) =$

$6t\sqrt[3]{2} + 8t\sqrt[3]{2}/\sqrt[3]{2^3} = 6t\sqrt[3]{2} + 8t\sqrt[3]{2}/2 = 6t\sqrt[3]{2} + 4t\sqrt[3]{2} =$

$10t\sqrt[3]{2}$

49. $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{18}\right) = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2(3^2)}\right) =$

$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\left(4\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{4} = 4(2) = 8$

51. $5\sqrt{2} - 3\sqrt{50} + 7\sqrt{288} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2(5^2)} + 7\sqrt{2^4(2)3^2} =$

$5\sqrt{2} - 3(5)\sqrt{2} + 7(2^2)(3)\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 15\sqrt{2} + 84\sqrt{2} = 74\sqrt{2}$

53. $\sqrt{48x^5}\sqrt{3x^3} = \sqrt{2^4(3)x^5}\sqrt{3x^3} =$

$\sqrt{2^4(3^2)x^8} = 2^2(3)x^4 = 4(3)x^4 = 12x^4$

55. $5\sqrt{x}$ **57.** $\sqrt[3]{xyz}\,(x-y+z)$ **59.** $-\left(\sqrt{2}+4\right)$

61. $c = \sqrt{a^2+b^2}$ **63.** 7.74×10^3 m/seg. **65.** F

67. F **69.** V

EJERCICIO 1.5 (páginas 35-36)

1. $3(xy)^{1/3}$ **3.** $(8t)^{1/5}$ **5.** $6(u^2+t^2)^{1/3}$

7. $3p^{-3/4}$ **9.** $3+\left(\sqrt[3]{a}\right)^2$ **11.** $3/\left(\sqrt[3]{a}\right)^2$

13. $2\sqrt[3]{a}$ **15.** **(a)** 1/16; **(b)** 16

17. **(a)** Indefinido; **(b)** Indefinido **19.** $a^{17/24}$

21. $\dfrac{x^{1/6}y^{1/4}}{4z^2}$ **23.** $1/t^{a^2}$ **25.** $y^{\left(a^2+ab+b^2\right)}$

27. $z^{b/(b-c)}$ **29.** $9a^2/b^4$ **31.** $1/1000x^6$

33. $1/x^{3/5}y^{1/5}$ **35.** xy **37.** $2a^2\sqrt{(6a)}$

39. $5x^{2/3}/y^{2/3}$ **41.** 9 **43.** 40

45. $x \geq 0$ **47.** $\forall\, y \in R$

49. Es incorrecto. El alumno comete el error de escribir $\sqrt{(x-2y)^2} = x-2y$, lo cual es cierto únicamente cuando $x \geq 2y$. Si $x \leq 2y$, $\sqrt{(x-2y)^2} = 2y-x$. En todos los casos, $\sqrt{(x-2y)^2} = |x-2y|$. La operación efectuada correctamente sería $x+2y+2y-x = 4y$, que es igual a 16 para $y = 4$.

51. 34 **53.** $\sqrt[6]{64} = 2$ **55.** $\sqrt[12]{y^7}$

57. $\sqrt[6]{128}$ **59.** 5.6123×10^{11} **61.** 1,126 pies/seg.

63. 0.31 m/seg. **65.** F **67.** F

69. V **71.** F **73.** V

EJERCICIO 1.6 (páginas 43-44)

1. **(a)** –192; **(b)** 1/2; **(c)** 0 **3.** **(a)** 2.6; **(b)** –1/40; **(c)** 0.2

5. **(a)** $5\sqrt{2}-9$; **(b)** $\dfrac{-15\sqrt{2}+6}{4}$; **(c)** $-4\sqrt{2}$

7. **(a)** 12; **(b)** –1/4 ; **(c)** 0 **9.** 1 **11.** 0 **13.** $2\sqrt{5}$ **15.** 243.5

17. Polinomio, grado 1, coeficiente principal 8.

19. No es un polinomio. **21.** No es un polinomio.

23. $\sqrt{2}z^5 + z^4 + 10z^3 + 12z + \left(\sqrt[3]{6}+\sqrt{6}\right)$

25. $-x^4+7x^2-1$

27. $3x^7-7x^6+x^5-x^4+2x^2-8x-14$

29. $2z^6+z^4-5z^3-28z^2+25z-3$

31. $x^2/9-y^2/25$ **33.** $18u^3-2u$

35. $16x^4+32x^3y+24x^2y^2+8xy^3+y^4$

37. $8x-12y^2$ **39.** $3xyz-2y+\sqrt{5}$

41. $6a^3-5a^2b+10ab^2-3b^3$ **43.** $-3x^2+3x-6$

45. $7x^2-6xy+4x-5y+1$ **47.** u^4-2u^2-15

49. $27x^3-54x^2+36x-8$ **51.** -3

53. $x^{3/2}+y^{3/2}$ **55.** $1/y^6-1/x^6$

57. $4-4x+x^2-y^2$ **59.** $-x^2+3x^{3/2}-7x+21x^{1/2}$

61. $3x^2+7.63x+1.47$ **63.** $21z^2-z-10$

65. $25a^2+30a+9$ **67.** $4y^2+5y-21$

69. $1/t^2-9x^2$ **71.** $4x^2+4y^2$

73. $1/(t^2+1)^{1/2}$ **75.** $x^6-x^5-x^3+x^2$

77. $(u^2-t^2)^3$ **79.** z^3-x^3

81. $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+3x^2+6xy+3y^2+3x+3y+1$

83. V **85.** V **87.** F

95. El grado de su suma será menor o igual a n. El grado de su producto será igual a $2n$. El grado de su diferencia será menor o igual a n.

97. **(a)** $-4x^3-8x^2+100x+200$
(b) $-8x^2+40x+280$

EJERCICIO 1.7 (páginas 49-50)

1. $xy^3(6x^4y^2+\sqrt{2x}+14)$ **3.** $(p^2+1)(2p-1)$

5. $(x+y)(2/3-u)$ **7.** $(x+1)(4x+3)$

9. $2(3y+p)(5x+z)$ **11.** $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

13. $(u+\sqrt{3})(u-\sqrt{3})$ **15.** $(2xy+3)(4x^2y^2-6xy+9)$

17. $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$ **19.** $(6x-5)(6x+5)$

21. $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

23. $(r+1)^2$ **25.** $(c/4-1/c)^2$

27. $(x/5-y/2)^2$ **29.** $(2p+5)(p+1)$

31. $(6a^2-5)(a^2+3)$ **33.** $(3/5a+2/3c)^2$

35. $(2x+3)^2$ **37.** $(a-2b)(a+b)$

39. $(m+n)^2$ **41.** $(2b^2-3)(5b^2-4)$

43. $(rs-2t)(r^2s^2+2rst+4t^2)$ **45.** $(a^4-a^2+1)(a^8+a^6-2a^2+1)$

47. $(s-3)(s+3)(s^2+9)(s^4+81)$ **49.** $(x+y+2)(x+y+1)$

51. $(x+3y)(x+3y+2)$ **53.** $(x^n+2)(x^n+1)$

55. $(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)(z^5-6)$

57. $(x-y)(x+y)$ **59.** $2(p+2q)(2p-3q)$

61. $(\sqrt{2}\,r-1)(\sqrt{2}\,r+1)$ **63.** $(k+1/3)(k-1/3)$

65. $(a-\sqrt{2b})(a+\sqrt{2b})$ **67.** $(x+1/4)^2$

69. $(x-\sqrt{2}y)^2$ **71.** **(a)** 94,000; **(b)** 15/29

73. F **75.** V

77. El área de un cuadrado completo en el lado izquierdo es a^2, el cuadrado pequeño que no está sombreado tiene un área de b^2, por lo que la porción sombreada tiene un área de a^2-b^2. En el lado derecho, la porción sombreada ha sido reducida a un rectángulo con tamaño de $(a-b)(a+b)$, por lo que $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

EJERCICIO 1.8 (páginas 56-57)

1. F **3.** V **5.** $\dfrac{z-3}{z^2-3z+9}$

7. $\dfrac{w+3}{w-3}$ **9.** $\dfrac{x-y}{2x-y}$ **11.** $\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$

13. $\dfrac{x+y}{x-y}$ **15.** x^2-16 **17.** $x^2(x-1)(x+1)^2$

19. $(x+1)^2(x-4)$ **21.** $b^2(b-2)(b+3)(b-6)$ **23.** $\dfrac{y(y-1)}{y+1}$

25. $\dfrac{-2x(4x+3)}{(x-3)(3x+1)}$ **27.** $\dfrac{x+2}{x(x-1)}$ **29.** $\dfrac{x^2-1}{x^2+x-1}$

31. $\dfrac{a}{a-b}$ **33.** $\dfrac{2-8x}{2x^2+3x-2}$ **35.** xy

37. 2 **39.** $2x^2$ **41.** $\dfrac{u+7}{u+2}$

43. $\dfrac{3-s}{s+5}$ **45.** $\dfrac{(p+4)^2}{p(p-1)}$ **47.** $\dfrac{4}{3(x+2)}$

49. Si $x>y$, entonces $\dfrac{x+z}{y+z}<x/y$

Si $x=y$, entonces $\dfrac{x+z}{y+z}=x/y$

Si $x<y$, entonces $\dfrac{x+z}{y+z}>x/y$

51. $z/2$ **53.** $\dfrac{\sqrt{w}+\sqrt{u}}{uv}$ **55.** $\dfrac{-2x-h}{x^2(x+h)^2}$

57. $\dfrac{a\sqrt{a}-z\sqrt{z}}{az}$ **59.** $\dfrac{2a-3}{2a+1}$ **61.** $\dfrac{-m(n+m)}{n}$

63. $\dfrac{xy}{x-y}$ **65.** $\dfrac{z^2-u^2}{u^4z^4}$

67. $1/3(7x-1)(x+1)^{1/3}$ **69.** $\dfrac{pq}{p+q}$

EJERCICIO DE REPASO (páginas 58-59)

1. F **3.** $-x$ **5.** F **7.** F

9. 1 **11.** -24 **13.** Origen **15.** F

17. V **19.** F **21.** Dom = $\{x/x\in R \text{ y } x\neq -1,1\}$

23. 7/9 **25.** 53/165 **27.** 13/40 **29.** 603457

31. 15% **33.** $w+1\geq 0$ **35.** $-1.4>-\sqrt{2}$

37. $2/3<0.67$ **39.** $>$ **41.** $-(\sqrt{17}-5)$ **43.** 1

45. $r-s$ **47.** **(a)** $2\sqrt{2}$; **(b)** 0 **49.** $108u^5v^8$

51. $\dfrac{x^8}{4y^5}$ **53.** $\dfrac{1}{t+s}$ **55.** $8\sqrt{2}$ **57.** $\dfrac{x^2z^7}{3}$

59. $\dfrac{z^{18}}{3w^{1/2}}$ **61.** $\dfrac{4c^8}{d^6}$ **63.** x **65.** 3.72×10^8

67. $1.21\times10^{3/2}$ **69.** $4x^3-4x^2+9x-6$ **71.** $3x^4+5x$

73. u^3-v^3 **75.** $9x^4-25y^2$ **77.** $(3x+2)(4x-9)$

79. $(2t^2-s)^2$

81. $(3x+5y^2)(9x^2-15xy^2+25y^4)$ **83.** $(x+3y)(x+3y+2)$

85. $\dfrac{3x-3}{x^2-4}$ **87.** $\dfrac{-4(3x^2+3x+h^2)}{x^3(x+h)^3}$

89. $\dfrac{\sqrt{c}}{d}$ **91.** $\dfrac{(y+x)}{x^2y^2(y-x)^2}$

93. $\dfrac{r^2+2rs}{s^2+2rs}$ **95.** $2y^3\sqrt{4x^2y}$

97. $\dfrac{3+5x}{x\left(\sqrt{5(1+x)}+\sqrt{2}\right)}$ **99.** $\dfrac{ab}{7\sqrt[3]{a^2b^2}}$

CAPITULO 2

EJERCICIO 2.1 (páginas 65-66)

1. Equivalente **3.** Equivalente **5.** No equivalente
9. –2 **11.** 3 **13.** 9/4 **15.** 1/3 **17.** 2
19. 3 **21.** 35/9 **23.** 3/16 **25.** –1/2 **27.** 2
29. 0 **31.** 4/5 **33.** –1 **35.** –4 **37.** 1
39. 3/2 **41.** 5 **43.** $\{w/w \neq 2\}$ **45.** $\varnothing$ **47.** 1
49. –5/3 **51.** 3 **53.** –1

55. La cuarta ecuación se obtiene al dividir cada lado de la tercera ecuación por $x+1$. Sin embargo, $x+1=0$ para $x=-1$. Por tanto las ecuaciones $x=x+1$ y $0=-1$ que se obtienen al continuar esta división no son equivalentes a la proposición original $x=-1$.

57. **(a)** $\dfrac{1}{16}$ **(b)** $\dfrac{1}{8}$ **59.** 84 años **61.** –68.2875°C

EJERCICIO 2.2 (páginas 74-77)

1. $r=C/2\pi$ **3.** $r=I/ct$ **5.** $r=5/2\pi h$
7. $m=y-b/x$ **9.** $x=a\,(1-y/b)$ **11.** $R_1=RR_2/R_2-R$
13. $n=\dfrac{a_n-a+d}{d}$ **15.** $v_0=s/t-gt/2$ **17.** $l=\dfrac{a+Sr-S}{r}$
19. 12 y 38 **21.** 15, 16, 17 **23.** 13
25. 14% **27.** US$6,400 **29.** 183 1/3 millas
31. 4/3 h **33.** 21.60 mph **35.** 3.75 cuartos

37. 9,000 galones de gasolina corriente y 6,000 galones de primera calidad.

39. 120 kg **41.** 16 minutos y 40 segundos
43. 11 h **45.** 10 cm por 15 cm
47. 8,12 y 10 cm **49.** 2 cm **51.** 47 **53.** 165

55. 13 monedas de US$5 centavos y 17 monedas de US$10 centavos.

57. 74 **59.** 30

61. **(a)** El 5% de US$200 es 10, pero el impuesto es menor; **(b)** US$9.52.

63. **(a)** No hay ninguna diferencia; **(b)** Siendo x el costo original de un artículo, tomar un descuento de $d\%$ primero y luego sumando $t\%$ del impuesto de ventas se representa mediante

$$\left(x-\frac{d}{100}x\right)\left(1+\frac{t}{100}\right).$$

Sumar $t\%$ de impuesto a las ventas primero y luego tomar $d\%$ de descuento. Se da por

$$\left(x+\frac{t}{100}x\right)\left(1-\frac{d}{100}\right).$$

Al factorizar, cada una de estas expresiones es igual a

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)(x)\left(1-\frac{d}{100}\right)$$

65. **(a)**

$$\left(10\sqrt{v}+10.45-v\right)(33-T)=\left(10\sqrt{2.2}+10.45-2.2\right)(33-T')$$

(b) $T'=\dfrac{33-\left(10\sqrt{v}+10.45-v\right)(33-T)}{10\sqrt{2.2}+8.25}$

(c) –18.8°C

EJERCICIO 2.3 (páginas 86-88)

1. –4, 4 **3.** –1, 1/2 **5.** $-\dfrac{1}{3}$ **7.** $-\dfrac{1}{2}$ **9.** $-\dfrac{1}{5},\dfrac{-2}{5}$

11. $-\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5}$ **13.** –9, 0, 9 **15.** $-\dfrac{5}{2},0,\dfrac{5}{2}$

17. $-\sqrt{17},\sqrt{17}$ **19.** $-5-\sqrt{5},-5+\sqrt{5}$

21. $-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}$ **23.** $-b, b$

25. $0, 4bc$ **27.** $-1\pm\sqrt{3}$

29. $-\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{2}$ **31.** $\sqrt{2}\pm 1$

33. $2-\dfrac{\sqrt{35}}{3},2+\dfrac{\sqrt{35}}{3}$ **35.** $-1,\dfrac{1}{3}$

37. $\dfrac{3}{2}$ **39.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}$

41. Sin soluciones reales. **43.** $\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

45. $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2};\pm\sqrt{2/3}$ **47.** $\dfrac{1}{3},4$

49. $3-3\sqrt{3},3+\sqrt{3}$ **51.** –7, 5

53. $-2\sqrt{2},0,2\sqrt{2}$ **55.** $\pm\sqrt{15}$

57. $r=\sqrt{A/\pi}$ **59.** $r=\dfrac{1}{2}\left(-h\pm\sqrt{h^2+{}^{2A}\!/_{\pi}}\right)$

61. $r=\sqrt{g(m_1m_2)/F}$ **63.** 2 y 18

65. –1/2 **67.** 12 y 14

69. 10 horas y 11 horas con 40 minutos.

71. 18 m por 20 m **73.** 1,716 pulg^2

75. 45 cm, 60 cm y 75 cm **77.** 1.47 horas

79. 6 millas por hora **81.** 14.15 horas

83. 5 metros **85.** 14 pulg. por 42 pulg.

87. 22.95 m

89. Siendo T el área de uno de los cuatro (4) triángulos rectángulos, entonces $c^2=4T+(b-a)^2$ o $c^2=4T+b^2-2ba+a^2$.

Ya que $T = 1/2ba$,
entonces, $c^2 = 4(1/2ba) + b^2 - 2ba + a^2 = b^2 + a^2$.

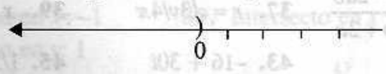
EJERCICIO 2.4 (páginas 92-93)

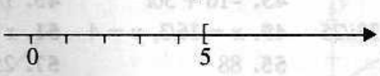
1. $0 + 10i$ **3.** $6\sqrt{3} - 6\sqrt{3i}$ **5.** $1 + 5i$
7. $2 - 13i$ **9.** $-5 + 13i$ **11.** $-7 + 11i$
13. $1 - 5i$ **15.** $7 - 56i$ **17.** $1 + 4i$
19. $20 - 21i$ **21.** -10 **23.** $-10 + 10i$
25. 1 **27.** -1 **29.** $3/25 + 4i/25$
31. $\frac{20}{41} - \frac{16}{41}i$ **33.** $1/2 + i/2$ **35.** $-4 - 6i$
37. 1 **39.** $-6/53 + \frac{32}{53}i$ **41.** $-\frac{11}{101} + \frac{9}{101}i$
43. $\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$ **45.** $\frac{22}{5} - \frac{41}{5}i$ **47.** $x = 2$ y $y = \frac{3}{2}$
49. $x = -4,\ y = -5$ **51.** $x = -4, y = -5$ **53.** $\pm 3i$
55. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}i$ **57.** $\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$ **59.** $-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$
61. $\frac{1}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{31}i$ **63.** $\pm i,\ \pm 2i$
65. $z = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}\right)i$

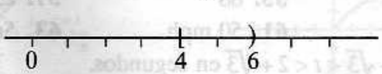
EJERCICIO 2.5 (páginas 98-100)

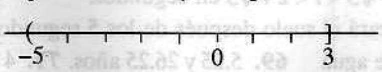
1. 1 **3.** $-3 \pm 2\sqrt{3}$ **5.** $-7/3, -3/2$
7. $z = -3/4$ **9.** -1 y 32,768 **11.** $\pm 2, \pm 1/2$
13. $-11, -73/27$ **15.** $\pm\sqrt{23/3}$ **17.** 15
19. 2y−4 **21.** 0 **23.** 3, 7
25. 0 **27.** 10 **29.** -2
31. 9 y 36 **33.** $-1/4, 3/4$ **35.** $-1/2, 5/6$
37. 15/4 **39.** $\varnothing$ **41.** $\pm\sqrt{5/2}$
43. $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ **45.** $f' = \frac{1}{K^{1/3}}\sqrt{(f'')^{2/3} - K^{2/3}}$
47. $r = (g_R)^{1/3}\left(\frac{TR}{2\pi}\right)^{2/3}$ **49.** 0.39, −1.72 **51.** 308.95
53. 19/2 **57.** $a = 98.20\,\text{cm}, h = 196.40\,\text{cm}, l = 49.10\,\text{cm}$
59. 49.9 millas **61.** 44.3 s **63.** 2.6 m/s

EJERCICIO 2.6 (páginas 104-105)

1. $(-\infty, 0)$ 

3. $[5, \infty)$ 

5. $[4, 6)$ 

7. $(-5, 3]$ 

9. V **11.** V **13.** V

15. $x + 3 > -2$
$x + 3 - 3 > 2 - 3$ [por (i)]
$x > -5$

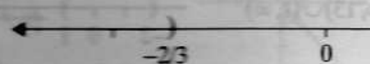
17. $2/3x + 10 \le 4$
$2/3x + 10 - 10 \le 4 - 10$ [por (i)]
$2/3x \le -6$
$3/2\,(2/3x) \le 3/2\,(-6)$ [por (ii)]
$x \le -9$

19. $x/2 - 1/3 \le 2/3x$
$x/2 - x/2 - 1/3 \le 2/3x - x/2$ [por (i)]
$-1/3 \le 1/6x$
$6(-1/3) \le 6(1/6x)$ [por (ii)]
$-2 \le x$

21. $-7 < x - 2 < 1$
$-7 + 2 < x - 2 + 2 < 1 + 2$ [por (i)]
$-5 < x < 3$

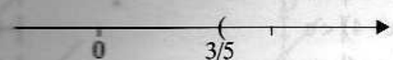
23. $4 \le 1/2x - 1/2 < 5$
$4 + 1/3 \le 1/2x - 1/3 + 1/3 < 5 + 1/3$ [por (i)]
$13/3 \le 1/2x < 16/3$
$2(13/3) \le 2(1/2x) < (2)(16/3)$ [por (ii)]
$26/3 \le x < 32/3$

25. $0 < 1/2(8 - 4x) < 6$
$0 < 4 - 2x < 6$ [por (i)]
$-4 < 4 - 4 - 2x < 6 - 4$
$-4 < -2x < 2$
$(-1/2)(-4) > (-1/2)(-2x) > (-1/2)(2)$ [por (iii)]
$-1 < x < 2$

27. $(-\infty, -2/3)$ 

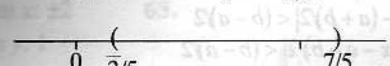
29. $(-\infty, 9]$ 

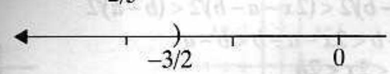
31. $\left(-\infty, \frac{\pi + 8}{3}\right)$ 

33. $(3/5, \infty)$ 

35. $(-2, 3]$ 

37. $(-1/4, 1/8)$ 

39. $\left(\frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{7}{5}\right)$ 

41. $(\infty, -3/2]$ 

43. $x \ge 72\%$

45. Con el descuento, la jarra más grande es más económica si cuesta menos de US$5.30.

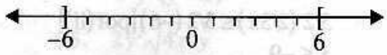
47. 98.6ºF

49. Para los números reales a, b y c, si $a \geq b$ entonces $a + b \geq b + c$.

50. Si $a < b$, entonces $b - a$ es positivo. Si c es positivo, entonces $(b - a)\,c$ es positivo pero $(b - a)\,c = ba - ac$ y por tanto, $ac < bc$.

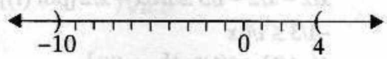
EJERCICIO 2.7 (página 108)

1. $(-\infty, -6] \cup [6, \infty)$

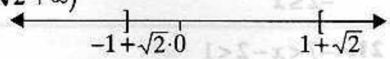


3. $[-5, 13]$

5. $(-\infty, 10) \cup (4, \infty)$

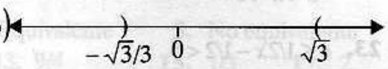


7. $\left(-\infty, -1, +\sqrt{2}\right] \cup \left[1 + \sqrt{2} + \infty\right)$

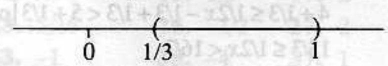


9. No tiene solución.

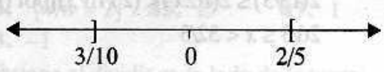
11. $\left(-\infty, -\sqrt{3}/3\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$



13. $(1/3, 1)$

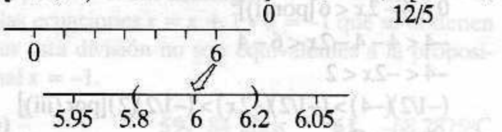


15. $(-\infty, 3/10] \cup [2/5, \infty)$

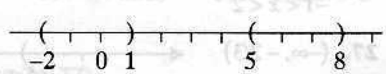


17. $(-\infty, 0] \cup [12/5, \infty)$

19. $(5.8, 6.2)$



21. $(-\infty, 13) \cup (1, \infty)$



23. $|x - (-2)| \geq;\ (-\infty, -5] \cup [1, \infty]$

25. $|x - 3.5| < 1/2;\ (3, 4)$

27. $|x - \sqrt{3}| \leq 2/3;\ \left(\sqrt{3} - 2/3, \sqrt{3} + 2/3\right)$

29. $|x - 7| \leq 4;\ [3, 11]$

31.
$$|5x + 3 - 20 - 3| < \in$$
$$|5x - 20| < \in$$
$$|5(x - 4)| < \in$$
$$|5|\,|x - 4| < \in$$
$$5|x - 4| < \in$$
$$|x - 4| < \in/5$$

33.
$$|-4x + 1 + 7| < \in$$
$$|-4x + 8| < \in$$
$$|-4(x - 2)| < \in$$
$$|-4|\,|x - 2| < \in$$
$$4|x - 2| < \in$$
$$|x - 2| < \in/4$$

35.
$$|x - m| < (b - a)/2$$
$$|x - (a + b)/2| < (b - a)/2$$
$$|(2x - a - b)/2| < (b - a)/2$$
$$(a - b)/2 < (2x - a - b)/2 < (b - a)/2$$
$$a - b < 2x - a - b < b - a$$
$$2a < 2x < 2b$$
$$a < x < b$$

37. $|x + 1| < 4$

39. $(15.95, 16.05)$

41. 16.7 y 16.45 onzas respectivamente.

EJERCICIO 2.8 (páginas 112-114)

1. $(-\infty, -3) \cup (5, \infty)$ **3.** $[-2/3, 1]$

5. $(-\infty, 0] \cup [5, \infty)$ **7.** $(-3, 3)$

9. $\varnothing$ **11.** $(-5, 5)$

13. $\left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]$ **15.** $\{3\}$

17. $(-\infty, -3) \cup [2/3, \infty)$ **19.** $(-\infty, -4) \cup [1/3, \infty)$

21. $(-\infty, 1/3) \cup (1, \infty)$ **23.** $(-\infty, -5/2) \cup [-8/7, \infty]$

25. $(-\infty, -8)$ **27.** $\varnothing$

29. $(-4, 4)$ **31.** $\left(-\infty, -2\sqrt{2}\right] \cup \left(1/2, 2\sqrt{2}\right]$

33. $(-3, -2) \cup (-1, \infty)$ **35.** $[-3, 2/3] \cup [3, \infty)$

37. $(-\infty, -5)$

39. $(-\infty, -5) \cup (-5, 3) \cup (-3, 4) \cup (4, \infty)$

41. $\left(\dfrac{9 - \sqrt{21}}{2}, \dfrac{9 + \sqrt{21}}{2}\right)$

43. $\left(-\infty, \dfrac{5 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{5 + \sqrt{13}}{2}, \infty\right)$

45. $0 < x < 1$; $x < 0$ ó $x > 1$ **47.** No, $x \leq 2$ también es posible.

49. El ancho debe ser mayor que 7 m.

51. $R > \dfrac{21}{4}$ ohmios **53.** 9 lados

EJERCICIO DE REPASO (páginas 114-117)

1. $+5$ **3.** -3 **5.** $+1$

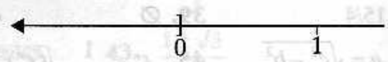
7. $-1, 3/2$ **9.** $-4, 3/2$ **11.** $4/3$

13. $-2/5$ **15.** $\dfrac{4 \pm 2\sqrt{6}i}{5}$ **17.** $3, \dfrac{-3 \pm \sqrt{27}i}{2}$

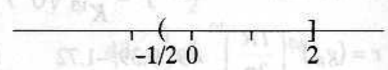
19. $\pm\sqrt{-1 + \dfrac{\sqrt{5}}{2}};\ \pm\sqrt{1 + \dfrac{\sqrt{5}i}{2}}$ **21.** 1

23. $-4, 2$ **25.** 1

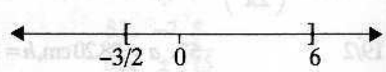
27. $(-\infty, 1]$



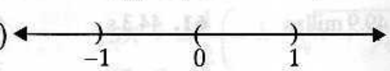
29. $(-1/2, 2)$



31. $[-3/2, 6]$



33. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



35. $C = \dfrac{A - 2ab}{2b + 2a}$ **37.** $r = \sqrt{3v/4\pi}$ **39.** $x = \dfrac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$

41. $10 - 2i$ **43.** $-16 + 30i$ **45.** $1/5 + i/10$

47. $14/25 - 23i/25$ **49.** $x = 16/3,\ y = 4$ **51.** $x = -3$ y $y = -1$

53. 15 y 20 **55.** 88 **57.** 25 y 30 mph

59. 84 **61.** 50 mph **63.** 5m

65. **(a)** $2 - \sqrt{3} < t < 2 + \sqrt{3}$ en segundos.

(b) Tocará el suelo después de los 5 segundos.

67. 3.5 lt de agua **69.** 5.25 y 26.25 años. **71.** 4 años

73. **(a)** $96\pi \approx 302$ pulg^3; **(b)** 784 pulg^3; **(c)** 6; **(d)** 46 pulg^3

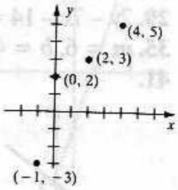
75. **(a)** 35.5 min; **(b)** $t = \dfrac{c(L+5)}{88Tv}$; **(c)** $N = \dfrac{c(L+s)}{88Nv}$

77. **(a)** $\rho_i\left[\dfrac{d_b^3\rho_b}{6} + \dfrac{d_i^2h_i\rho_i}{4}\right]$ **(b)** $\rho_i\left[\dfrac{d_b^3}{6} + \dfrac{d_i^2h_i}{4}\right]\rho_w$ **(c)** 4.46 m

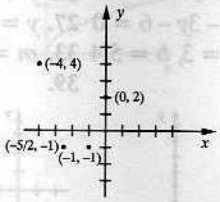
CAPITULO 3

EJERCICIO 3.1 (páginas 126-127)

1.

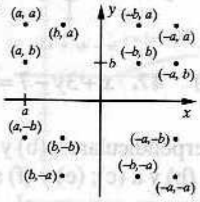


3.

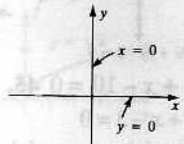


5. IV **7.** I **9.** III **11.** I **13.** III **15.** II

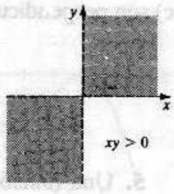
17.



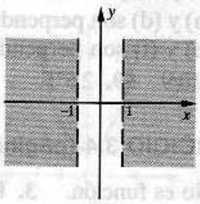
19.



21.

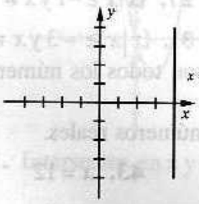


23.

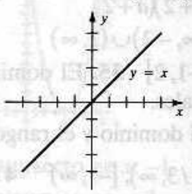


25. Simetría con respecto al origen.
27. Simetría con respecto al origen.
29. Simetría con respecto al eje x.
31. Simetría con respecto al origen.

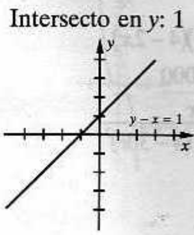
33. Intersecto en x: 4



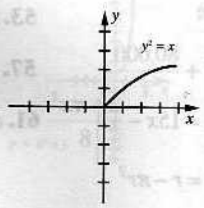
35. Intersecto en x y en y: 0



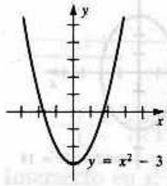
37. Intersecto en x: −1
Intersecto en y: 1



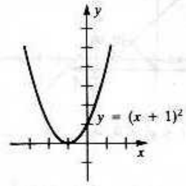
39. Intersecto en x y en y: 0



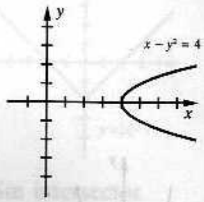
41. Intersectos en x: $\pm\sqrt{3}$
Intersecto en y: −3



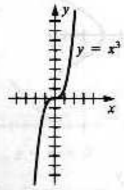
43. Intersectos en x: −1
Intersecto en y: 1



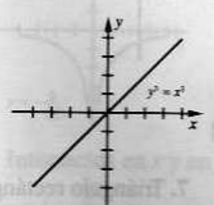
45. Intersecto en x: 4



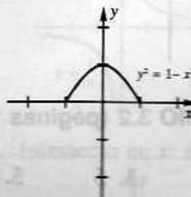
47. Intersectos en x y en y:



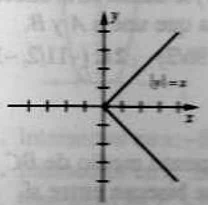
49. Intersectos en x y en y: 0



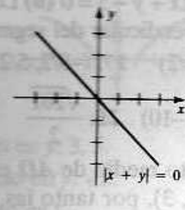
51. Intersectos en x: ±1
Intersecto en y: 1



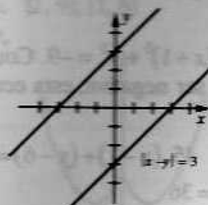
53. Intersectos en x y en y: 0



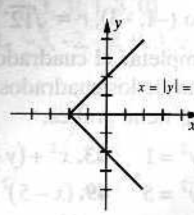
55. Intersectos en x y en y



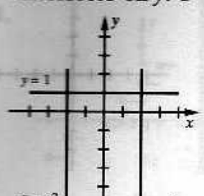
57. Intersectos en x: ±3
Intersectos en y: ±3



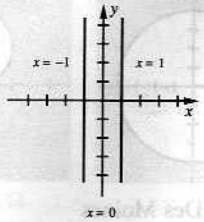
59. Intersectos en x: −2
Intersectos en y: ±2



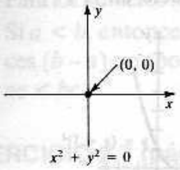
61. Intersectos en x: ±2
Intersecto en y: 1



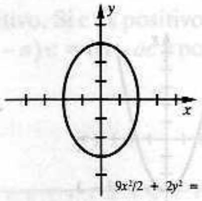
63.



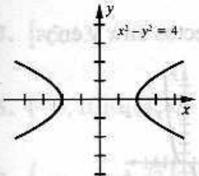
65. Intersectos en x y en y: 0



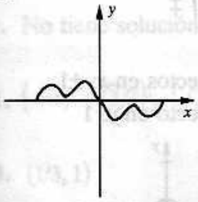
67. Intersectos en x: ± 2
Intersectos en y: ± 3



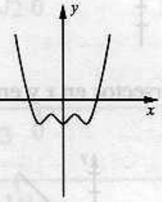
69. Intersectos en x: ± 2



71.



73.



EJERCICIO 3.2 (páginas 133-134)

1. 5 **3.** 5 **5.** $\frac{\sqrt{53}}{2}$ **7.** Triángulo rectángulo

9. Triángulo rectángulo **11.** Triángulo isósceles

13. **(a)** $2x + y - 5 = 0$ **(b)** Los puntos (x, y) se hallan en la bisectriz perpendicular del segmento de recta que une a A y B.

15. $(1, 5/2)$ **17.** $(-9/2, 5/2)$ **19.** $(3a, 9b/2)$ **21.** $(-11/2, -1)$

23. $(-7, -10)$ **25.** $\frac{\sqrt{101}}{2}$

27. Punto medio de AD es: $(9/2, 3)$ y punto medio de BC es: $(9/2, 3)$, por tanto las diagonales se bisecan entre sí.

29. Centro $(-3, 5)$, $r = 5$ **31.** Centro $(3/2, 1/2)$, $r = \sqrt{5}$

33. Centro $(0, -4)$, $r = 4$ **35.** Centro $(8, -3/2)$, $r = \frac{\sqrt{13}}{2}$

37. Centro $(-1, -3)$, $r = \sqrt{12}$

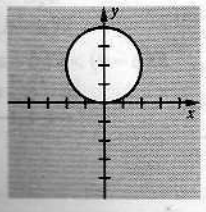
39. Al completar el cuadrado, resulta $(x+1)^2 + y^2 = -9$. Como la suma de los cuadrados no puede ser negativa, esta ecuación no tiene gráfica.

41. $x^2 + y^2 = 1$ **43.** $x^2 + (y-3)^2 = 3$ **45.** $(x-1)+(y-6)=8$

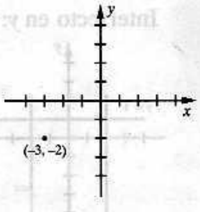
47. $x^2 + y^2 = 5$ **49.** $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 36$

51.

53.



55.

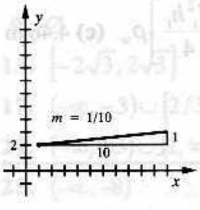


57. Par Des Moines

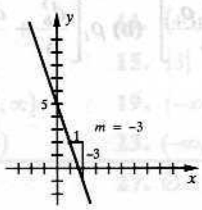
EJERCICIO 3.3 (páginas 140-142)

1. $-7/2$ **3.** 1 **5.** 1

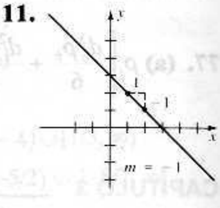
7.



9.



11.



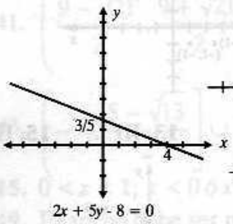
13. $y - 3x + 4 = 0$ **15.** $y - 4x + 16 = 0$ **17.** $4y - x - 7 = 0$

19. $y = 1$ **21.** $y + x + 3 = 0$ **23.** $2x + 3y + 3 = 0$

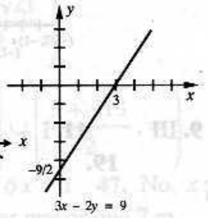
25. $2x - 3y - 6 = 0$ **27.** $y = mx$ **29.** $2y - 7x - 14 = 0$

31. $m = 3$, $b = 5/4$ **33.** $m = 3$, $b = 0$ **35.** $m = 6$, $b = 4$

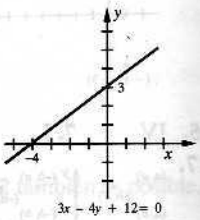
37.



39.



41.



43. $3y + x - 10 = 0$ **45.** $2y - 3x - 16 = 0$ **47.** $x + 3y - 7 = 0$

49. $y + x - 3 = 0$

51. (a) y (e) son paralelas; (a) y (f) son perpendiculares; (b) y (c) son paralelas; (d) es perpendicular a (b) y a (c); (e) y (f) son perpendiculares.

53. (a) y (d) son perpendiculares; (b) y (c) son perpendiculares; (e) y (f) son perpendiculares.

55. $-10/9$ **59.** 2.5°F.

EJERCICIO 3.4 (páginas 149-151)

1. No es función. **3.** Una función. **5.** Una función.

7. $-2; -1; 0; 2$ **9.** $1; 7; \sqrt{3/2}, \sqrt{1/2}$ **11.** $0; 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}; -2$

13. $a^4 - 3a^6, -3a^3 + 10a^2 - 11a + 4, -3a^3 - 8a^2 - 7a - 2, \frac{b^3 - 3b^2}{b^2 b^3}$

15. 6; 0

17. $0; 3; 2+2\sqrt{2}; 8$ **19.** $2x + h$

21. $3x^2 + 3xh + h^2$

23. $\frac{3}{(x+2)(a+2)}$ **25.** $[-2/3, \infty)$ **27.** $\{x \mid x \geq -1 \text{ y } x \neq 0\}$

29. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ **31.** $\{x \mid x \geq -3 \text{ y } x \neq 0\}$

33. $(-1, 2]$ **35.** El dominio y el rango son todos los números reales.

37. El dominio y el rango son todos los números reales.

39. $[1/3, \infty)$; $[-1, \infty)$ **41.** $(-\infty, 16/3]$ **43.** $x = 12$

45. 1; 2 **47.** $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ **49.** $A = \pi(d/2)^2$

51. $A^{3/2}$ **53.** $V = x(3-2x)(4-2x)$

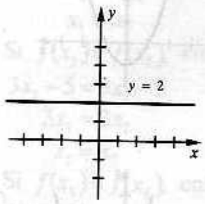
55. $x^2 + \frac{80{,}000}{x}$ **57.** $F = 2x + \frac{12{,}000}{x}$

59. $A = 15x - \frac{2 + \pi x^2}{8}$ **61.** $d = \sqrt{2500t^2 + (4 - 30t)^2}$

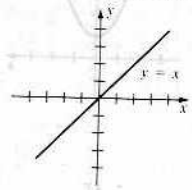
63. $A = r - \pi r^2$

EJERCICIO 3.5 (páginas 158-159)

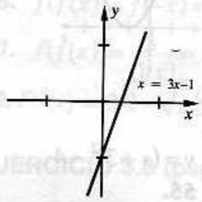
1. Intersecto en y: 2



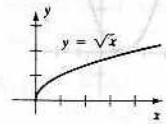
3. Intersectos en x y en y: 0



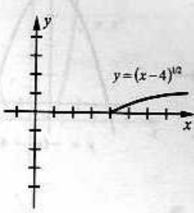
5. Intersecto en x: 1/3
Intersecto en y: –1



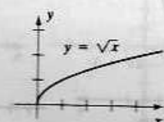
7. Intersectos en x y en y: 0



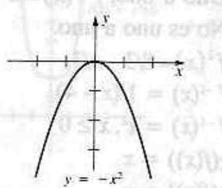
9. Intersecto en x: 4



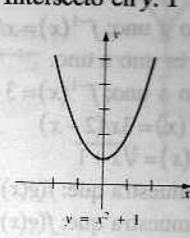
11. Intersectos en x y en y: 0



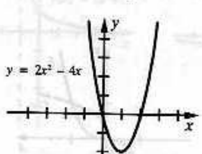
13. Intersectos en x y en y: 0



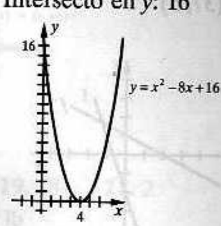
15. Intersecto en y: 1



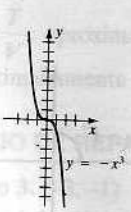
17. Intersecto en x: 0, 4
Intersecto en y: 0



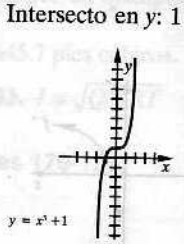
19. Intersecto en x: 4
Intersecto en y: 16



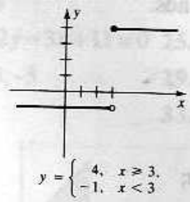
21. Intersectos en x y en y: 0



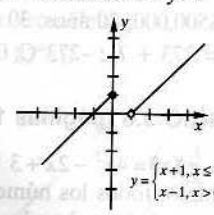
23. Intersecto en x: –1
Intersecto en y: 1



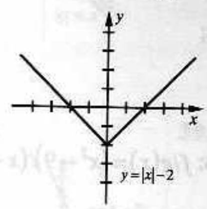
25. Intersecto en y: –1



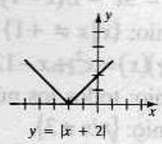
27. Intersecto en y: 1



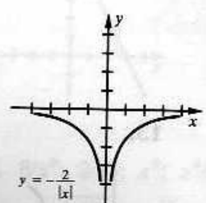
29. Intersecto en x: ±2
Intersectos en y: –2



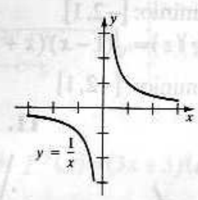
31. Intersecto en x: –2
Intersecto en y: 2



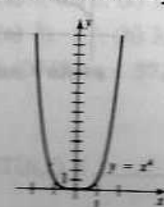
33. Sin intersectos



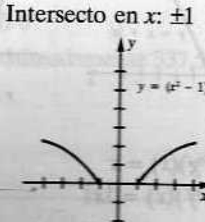
35. Sin intersectos



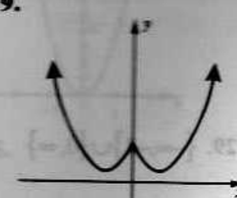
37. Intersectos en x y en y: 0



39. Intersecto en x: ±1

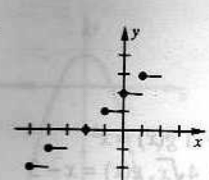


41. Intersectos en x: –5, 7; intersecto en y: 3, 5.
43. Intersectos en x: $\pm\sqrt{2}$; intersecto en y: $\sqrt{2}$.
45. Intersecto en x: 3/2; sin intersecto en y.
47. No es función.
49. No es función.
51. No es función.
53. No es función.
55. [1, 9]; [1, 6]
57. [–3, 3]; [–3, 0]
59.



61. –3, –2, –2, 0, 3, 2, 1

63.



65. $V = 25{,}000(1 - x/20),\ 0 \le x \le 20$; US\$12,500

67. US\$500,000; 20 años; 30 años; 40 años.

69. $T_K = 273 + T_C$; $-273°C$; 0459.4°F.

EJERCICIO 3.6 (páginas 166-167)

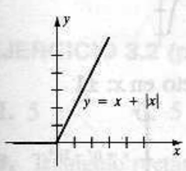
1. $(f+g)(x) = 4x^2 - 2x + 3$
dominio: todos los números reales;
$(fg)(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 4$
dominio: todos los números reales.

3. $(f+g)(x) = 6x$
dominio: todos los números reales;
$(f)(x) = 9x^2 - 1/(x-1)$
dominio: $\{x \mid x \neq +1\}$

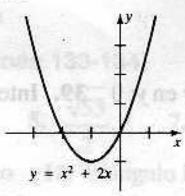
5. $(f+g)(x) = x^2 + x - 12$
dominio: todos los números reales; $f/g(x) = (x^2-9)/(x-3)$
dominio: $\{x/x \neq 3\}$

7. $(f+g)(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+2}$
dominio: $[-2, 1]$
$(fg)(x) = \sqrt{(1-x)(x+2)}$
dominio: $[-2, 1]$

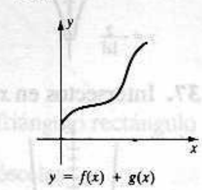
9.



11.



13.



15. $(f \circ g)(x) = x$
$(g \circ f)(x) = |x|$

17. $(f \circ g)(x) = \dfrac{2}{x^2 - 2}$
$(g \circ f)(x) = \dfrac{3 - x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1}$

19. $(f \circ g)(x) = x$
$(g \circ f)(x) = x$

21. $(f \circ g)(x) = x^2 - 1/x$
$(g \circ f)(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$

23. $(f \circ x)(x) = x - \sqrt{x+1} - 1$
$(g \circ t)(x) = x - 1 - \sqrt{x}$

25. $[-1, \infty)$ **27.** $\{x \mid x \neq 6\}$ **29.** $\{-\infty, -2\} \cup \{0, \infty\}$

31. $(f \cdot f)(x) = 36x - 14$
$(f \cdot (1/f))(x) = \dfrac{-12x + 10}{6x - 2}$

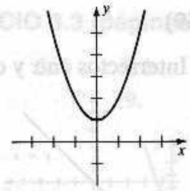
33. $(f \circ f)(x) = x^4$
$(f \circ (1/f))(x) = 1/x^4$

35. $F(x) = (f \circ g)(x)$, donde $f(x) = 4x + 1$ $g(x) = x^2$

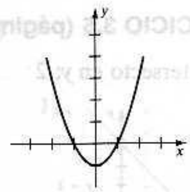
37. $F(x) = (f \circ g)(x)$, donde $f(x) = x^2 + 4\sqrt{x}$, $g(x) = x - 3$

39. $(f \circ g)(x) = x^2 + x$ **41.** $(f \circ g \circ h) = |x - 1|$

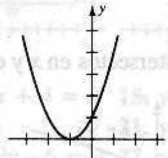
43. **(a)**



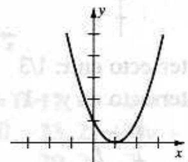
(b)



(c)

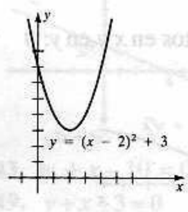


(d)

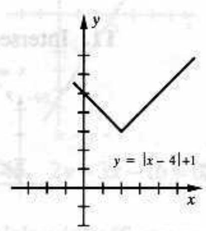


45. $y = -|x+2|$ **47.** $y = -x^2 + 5$ **49.** $y = (x+3)^2 - 4$

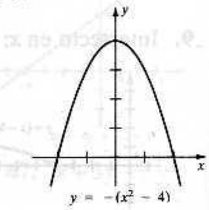
51.



53.



55.



EJERCICIO 3.7 (páginas 172-173)

1. Uno a uno; $f^{-1}(x) = x/3$ **3.** Uno a uno; $f^{-1}(x) = x^{1/3}$

5. No es uno a uno. **7.** No es uno a uno.

9. Uno a uno; $f^{-1}(x) = 3 + 1/x$ **11.** $f^{1}(x) = 8/3 - x/3$

13. $f^{-1}(x) = 3x/(2-x)$ **15.** $f^{-1}(x) = 1/(x-4)$

17. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$ **19.** $f^{-1}(x) = x^2, x \ge 0$

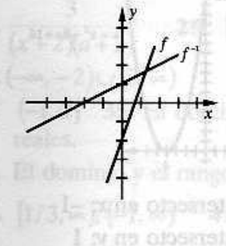
21. Demuestra que: $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$

23. Demuestra que: $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$

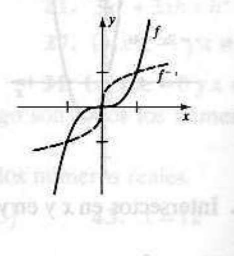
25. Dominio $[0, \infty]$; rango $[3, \infty]$

27. $(37, 5)$ **29.** $(6, 3)$

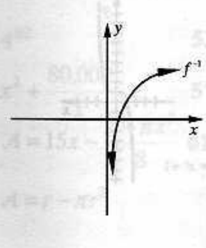
31.



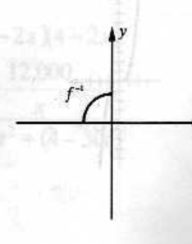
33.



35.



37.



39. Si $f(x_1)=f(x_2)$, entonces
$-2x_1+3=-2x_2+3$
$2x_1=2x_2$
$x_1=x_2$

41. Si $f(x_1)=f(x_2)$, entonces
$3x_1-5=3x_2-5$
$3x_1=3x_2$
$x_1=x_2$

43. Si $f(x_1)=f(x_2)$, entonces
$1/x_1=1/x_2$
$x_1=x_2$

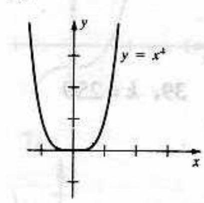
45. $f(f(x))=f(-x)=-(-x)=x$

47. $f(f(x))=\dfrac{1}{(1/x)}=x$

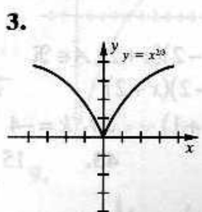
49. $F^{-1}(x)=3/2-\sqrt{x}/2, [0,\infty]$

EJERCICIO 3.8 (páginas 177-178)

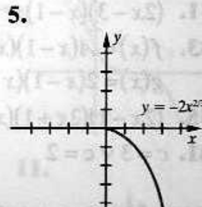
1.



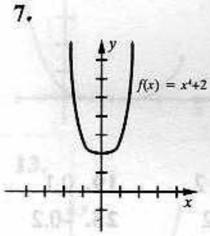
3.



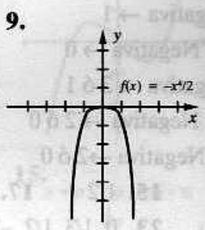
5.



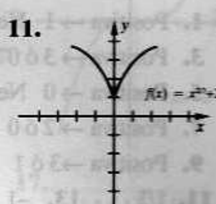
7.



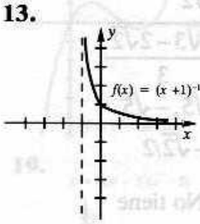
9.



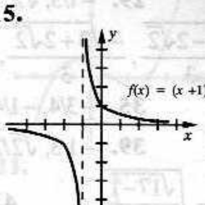
11.



13.



15.



17. **(a)** 62.30 años **(b)** 29.3 años **19.** 18 **21.** 2

23. $s = 6t^2$; 216 pies 54 pies **25.** 207 lb

27. $f=K\dfrac{mM}{r^2}$, la fuerza se aumenta por un múltiplo de 4.

29. $P=k\dfrac{T}{V}$, aproximadamente 3,645.7 pies cúbicos.

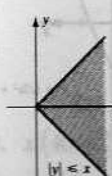
31. Aproximadamente 2.30 m². **33.** $I=\sqrt{Q/KRT}$

EJERCICIO DE REPASO (páginas 179-181)

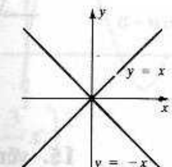
1. Cuarto **3.** (-3, -1)
5. Centro (-3, -1) $r = 2$
7. Recta vertical **9.** F **11.** (1, 1)

13. $(-\infty, 3/2)$ **15.** Uno a uno **17.** V
19. 6 **21.** Triángulo isósceles
23. $2y-3x+11=0$ **25.** $15x+4y-32=0$
27. 3, -5 **29.** $3h + 11$

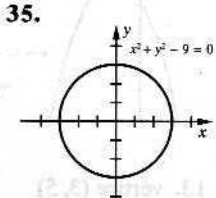
31.



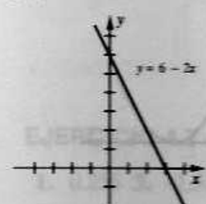
33.



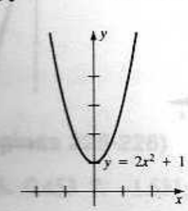
35.



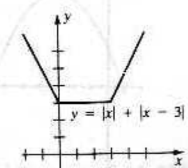
37.



39.



41.

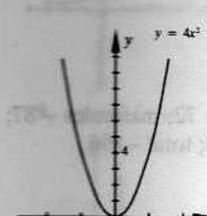


43. $8/x^6$; $2/x^6$; x^9; $x^4/2$; $x^6/8$ **45.** $f^{-1}(x)=(3x+3)/(x-1)$
47. $r=\sqrt{A/\pi}$ **49.** $A=4x\sqrt{9-x^2}$
51. **(a)** 0; **(b)** 0; **(c)** 1; **(d)** 1; **(e)** 1; **(f)** 0
53. **(a)** $[0, L]$; **(b)** 3,146 m; **(c)** aproximadamente 337,500 m
55. 6,400 libras **57.** 5.08×10^{-7} m.

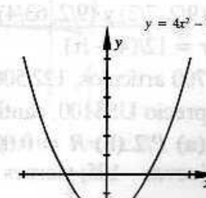
CAPITULO 4

EJERCICIO 4.1 (páginas 191-193)

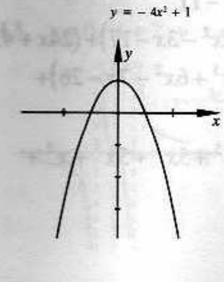
1.



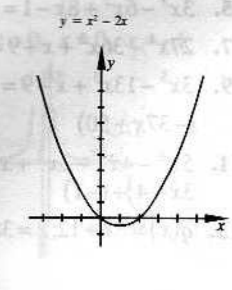
3.



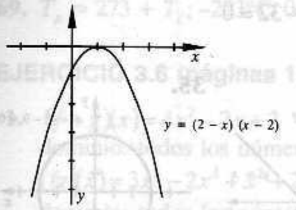
5.



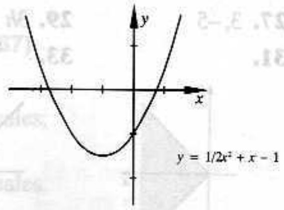
7. vértice (1, -1)
intersectos (0, 0),(2, 0)



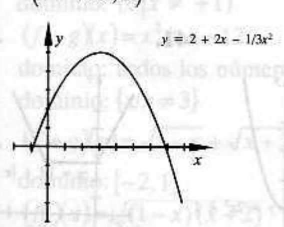
9. vértice (2, 0)
intersectos (0, –4), (2, 0)



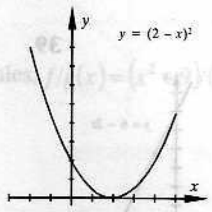
11. vértice (–1, –3/2)
intersectos $\left(-1-\sqrt{3},0\right)$; $\left(-1+\sqrt{3},0\right)$; (0, –1)



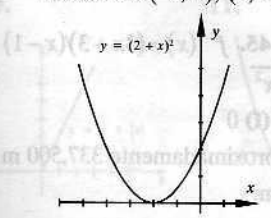
13. vértice (3, 5)
intersectos $\left(3-\sqrt{15},0\right)$; $\left(3+\sqrt{15},0\right)$



15. vértice (2, 0)
intersectos $(0,4);(2,0)$



17. vértice (–2, 0)
intersectos (–2, 0); (0, 4)



19. [4/5, +∞] creciente; (–∞, 4/5] decreciente
21. [–∞, –1] creciente; [–1, +∞] decreciente
23. **(a)** F **(b)** V **(c)** V **(d)** F **(e)** V **(f)** V
25. 11/2 **27.** 4 y 4 **29.** 10, 10
31. 2 por 3
33. (9/2, 7/2) y (9/2, 63/4); d = 49/9
37. $r = 12/(4+\pi)$
39. 700 artículos, 122,500 ingreso máximo.
41. precio US$100, cantidad de cajas 60
43. **(a)** $P/2$ **(b)** R = 0.000011 **(c)** martes – 72; miércoles – 87; jueves – 105; viernes – 127; sábado –153; total – 896

EJERCICIO 4.2 (página 198)

1. $x^2-7x+4=(x+4)(x-11)+48$
3. $7x^3-8x^2+6x+1=\left(x^2-x+2\right)(7x-1)+(-9x+3)$
5. $3x^3-6x^2+8x-1=(x+1)^2 3x+(5x-1)$
7. $27x^4-36x^2+x+9=\left(3x^2+x+2\right)\left(9x^2-3x-17\right)+(24x+43)$
9. $3x^5-13x^3+x-9=\left(x^2-2x+2\right)\left(3x^3+6x^2-7x-26\right)+(-37x+50)$
11. $5x^6-4x^3+2x^2+x-5=(x-1)\left(5x^5+5x^4+5x^3+x^2+3x+4\right)+(-1)$
13. $q(x)=5x+12; r=38$

15. $q(x)=2x^2+2x+9; r=0$
17. $q(x)=x^2+1/2x-1/4; r=31/8$
19. $q(x)=7x^2+13/4x-205/16; r=333/64$
21. $q(x)=x^3+16x^2+64x+256; r=1088$
23. $q(x)=8x^4+2x^3+1/2x^2+23/8x+105/23; r=565/92$
25. $q(x)=3x^2+1; r=1$
27. $q(x)=2x^2+\left(3+2\sqrt{5}\right)x+3\sqrt{5}; r=30$
29. $k=-4$ **31.** $k=1/6$

EJERCICIO 4.3 (página 201)

1. 37 **3.** 0 **5.** 0 **7.** –8 **9.** –90
11. 4 **13.** 0 **15.** 14,335 **17.** Sí **19.** No
21. Sí **23.** No **25.** Sí **27.** $(-x+2)(x-3)$
29. $4\left(x+\dfrac{3+\sqrt{41}}{8}\right)\left(x+\dfrac{3-\sqrt{41}}{8}\right)$
31. $(2x-3)(x-1)$
33. $f(x)=A(x-1)(x-2)(x+2), A\in\Re$
$g(x)=2(x-1)(x-2)(x+2)$
35. $(2x-1)(2x+1)(x+1)$ **37.** $k=-4$ **39.** $k=25/9$
41. $c=3 \vee c=2$ **43.** 15

EJERCICIO 4.4 (páginas 210-211)

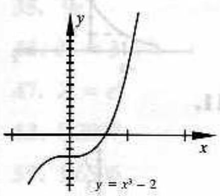
1. Positiva → 1 Negativa → 1
3. Positiva → 3 ó 0 Negativa → 0
5. Positiva → 0 Negativa → 3 ó 1
7. Positiva → 2 ó 0 Negativa → 2 ó 0
9. Positiva → 3 ó 1 Negativa → 2 ó 0
11. 1/3 **13.** –1 **15.** 1/2 **17.** 2 **19.** 0,1
21. 0, 1, –1, –2, – 3 **23.** 0, 1/3, 1/2, –2 **25.** –0.2
27. $-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ **29.** $-1/3, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$
31. $\dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{3}, \dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{3}, \dfrac{-\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{3}, \dfrac{-\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{3}$
33. $-1/8, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ **35.** $-3/4, -1/4, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$
37. $6, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ **39.** $-1/3, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2$
41. $1, -1, \sqrt{\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}}, -\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}}$ **43.** No tiene
45. 1, 1/2, –1/2 **47.** 3 **49.** 6 y –4 **51.** 2, –2
53. 5, –3 **55.** 2, –6 **57.** 0, –1
59. No. Por no ser número entero **61.** –16 **63.** 0, 2
65. $f(x)=1/6(2x-1)(x-3)(x+2)$ **69.** N veces
71. Sí; no

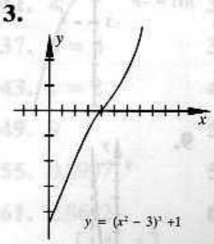
EJERCICIO 4.5 (páginas 214-215)

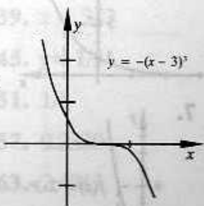
1. $-1/3+\dfrac{\sqrt{2}i}{3}, -1/3-\dfrac{\sqrt{2}i}{3}$; $f(x)=\left(3x+1+\sqrt{2}i\right)\left(x+1/3-\dfrac{\sqrt{2}i}{3}\right)$
3. $1, 3/2i, -3/2i$; $f(x)=(2x+3i)(2x-3i)(x-1)$
5. $1/2, 1/2i, -1/2i$; $f(x)=(2x+i)(2x-i)(x-1/2)$

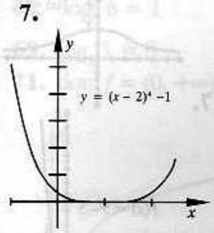
7. $-1/2, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$;
$$f(x)=\left[(2x+1)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\right]$$
9. $2, -2, 2i, -2i$ $f(x) = (x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)$
11. $f(x) = x^2 + 25$ **13.** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 18x - 40$ **15.** $f(x) = x^4 - 8x^3 + 42x^2 - 104x + 169$ **17.** Sí es una raíz. No, porque sólo cuando los coeficientes son reales se tiene un número complejo que es raíz y también lo es su conjugado, -1. **19.** $f(x) = 1/5x^2 + 4/5x + 1$; No **21.** $-3i$, $1/2$ **23.** $-2-3i$, 2
25. $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}, 2, -2$ **27.** $2i, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$ **29.** $2-i, 1, 2, -1$

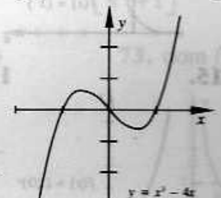
EJERCICIO 4.6 (páginas 221-222)

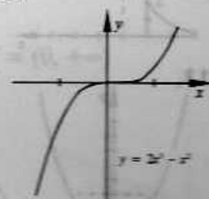
1.


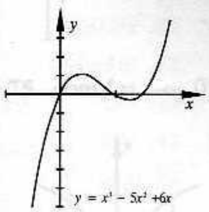
3.


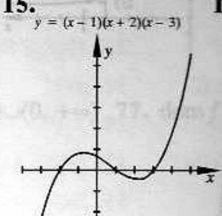
5.


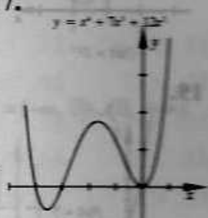
7.


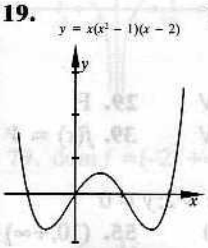
9.


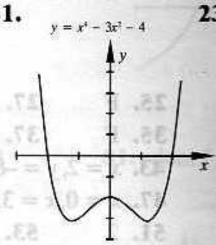
11.


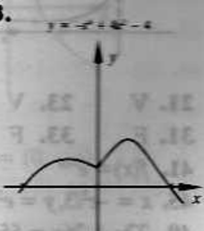
13.


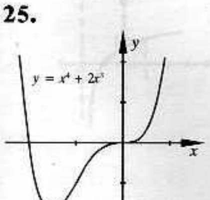
15.


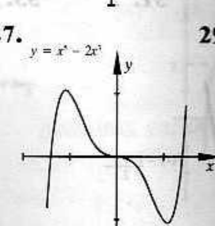
17.


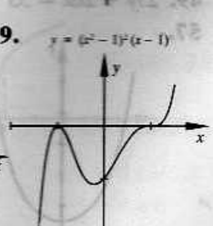
19.


21.


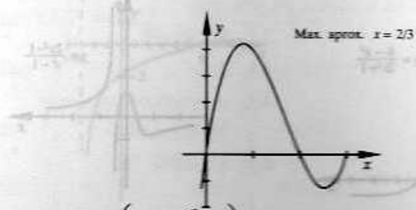
23.


25.


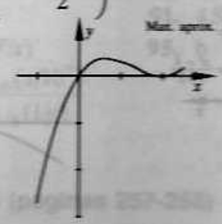
27.


29.


31. $k = 2$ **33.** $k = -7/2$ **35.** Para ningún n; para todo n
37. $V(x) = (60-2x)(40-2x)x$



39. $x(40-2x)\left(30-\frac{3}{2}x\right)$

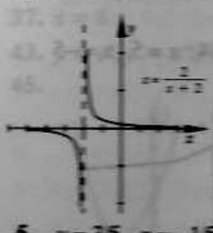


EJERCICIO 4.7 (páginas 225-226)

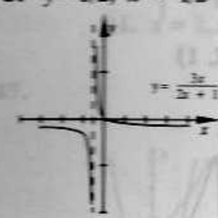
1. 0.258 **3.** −1.525 **5.** 0.453 **7.** −1.531; −0.347, 1.879 **9.** 1.414

EJERCICIO 4.8 (páginas 232-233)

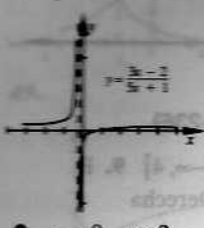
1. $y = 0$, $x = -2$



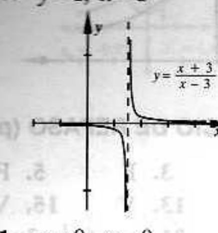
3. $y = 3/2$, $x = -1/2$



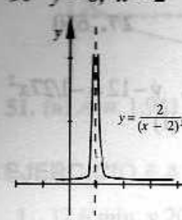
5. $y = 3/5$, $x = -1/5$



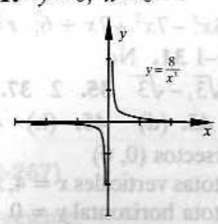
7. $y = 1$, $x = 3$



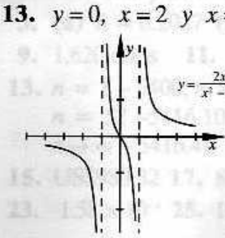
9. $y = 0$, $x = 2$



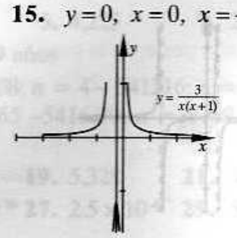
11. $y = 0$, $x = 0$



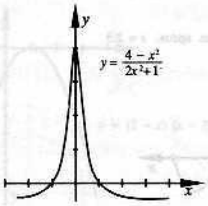
13. $y = 0$, $x = 2$ y $x = -2$



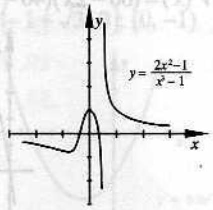
15. $y = 0$, $x = 0$, $x = -1$



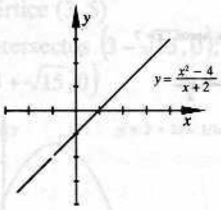
17. $y=-1/2$, no tiene asíntotas verticales



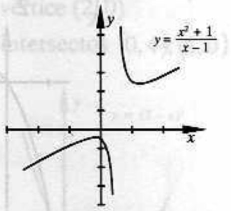
19. $y=0,\ x=1$



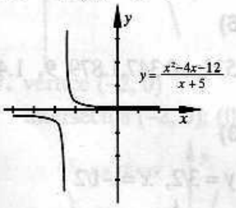
21. No



23. $x=1,\ y=x+1$

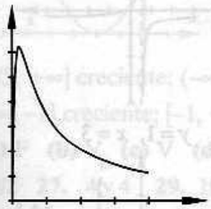


25. $x=-5;\ y=x-9$

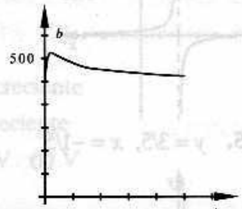


27. $(-1/2,\ 1)$ **29.** $x=-3/4,\ x=5,\ x=-5$

31. $c(t)$

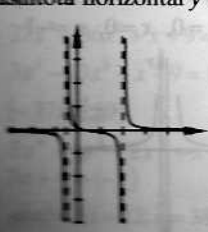


33.

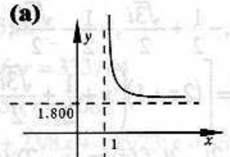


EJERCICIO DE REPASO (páginas 234-236)

1. F **3.** F **5.** F **7.** $(-\infty, 4]$ **9.** F
11. F **13.** V **15.** V **17.** Derecha
19. F **21.** $q=6x^3-3x+2;\ r=7$
23. $q=3x^3-7x^2+7x+6;\ r=-7$ **25.** 5 **27.** 650
29. $k=-1$ **31.** No
33. $-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ **35.** 2 **37.** Una vez **39.** $y-12=-1/27x^2$
41. (j) **43.** (d) **45.** (h) **47.** (b) **49.** (f)
51. intersectos $(0, 0)$
asíntotas verticales $x=4,\ x=-1$
asíntota horizontal $y=0$



53. $N(s)=\dfrac{1800s}{s-1}$ **(a)**

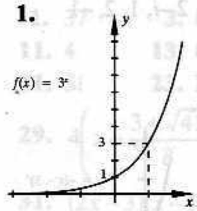


(b) 2000
(c) 2025

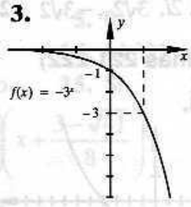
CAPITULO 5

EJERCICIO 5.1 (páginas 243-244)

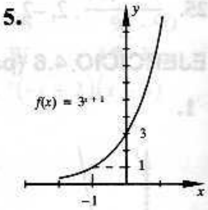
1.



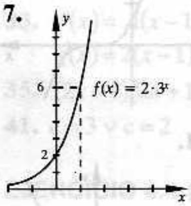
3.



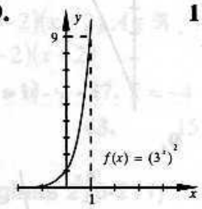
5.



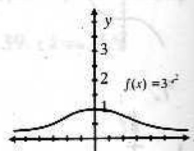
7.



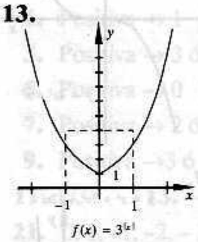
9.



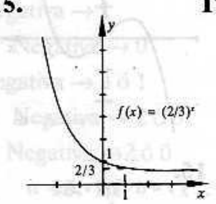
11.



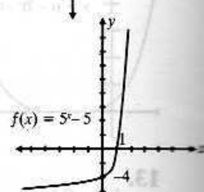
13.



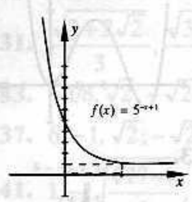
15.



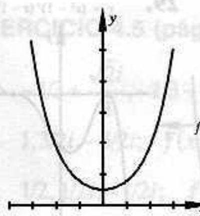
17.



19.



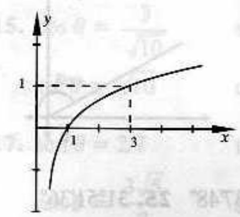
21. V **23.** V **25.** F **27.** V **29.** F
31. F **33.** F **35.** F **37.** V **39.** $f(x)=4^x$
41. $f(x)=e^{-3x}$ **43.** $x=2, y=-8$
45. $x=-e^2/3, y=e^2$ **47.** $x=0, x=3, x=2; y=0$
49. $27y+26x=55$ **51.** 2 **53.** 0 **55.** $(10, +\infty)$
57.



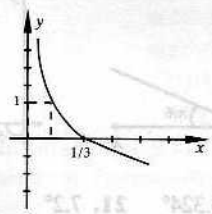
59. **(a)** 30.1353257 **(b)** 31.48913565 **(c)** 31.52374901 **(d)** 31.54453529 **(e)** 31.54428071
61. **(a)** 6.47300784 **(b)** 6.689902228 **(c)** 6.704617606 **(d)** 6.705354224 **(e)** 6.704991857
63. 0.102685031 **65.** 6.018384138 **67.** 1.853053

EJERCICIO 5.2 (páginas 251-252)

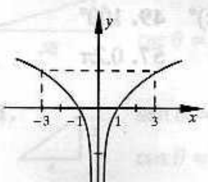
1. $\log_9 1/3 = -1/2$ **3.** $\log_4 1 = 0$ **5.** $\log_5 x = y$
7. $\log_{1/81} 9 = -2$ **9.** $\log_{25} 1/125 = -3/2$
11. $\log_{27} 9 = 2/3$ **13.** $4^{-1/2} = 1/2$ **15.** $t^{s} = v$
17. $36^{-3/2} = 1/216$ **19.** $8^{3/2} = 4$ **21.** $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$
23. $a^c = b$ **25.** -4 **27.** 5
29. $-6/5$ **31.** 4 **33.** -3
35. $9e$ **37.** $a = 4$ **39.** $x = 343$
41. $N = 3$ **43.** $x = 2$ **45.** $y = 1/3$
47. $Z = e^8$ **49.** 9 **51.** 1/5
53. 0.2007 **55.** 0.8997 **57.** 0.2330
59. 1.6506 **61.** 2.8612 **63.** 2.4913
65. $\log_6 6 = 1$ **67.** $\ln\left[\dfrac{x^4-1}{x^2+1}\right] = \ln\left(x^2-1\right)$
69. $\log_3 1 = 0$
71. $\operatorname{dom} f = (0, +\infty)$



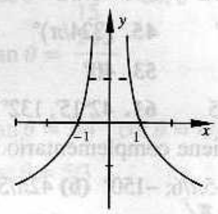
73. $\operatorname{dom} f = (0, +\infty)$



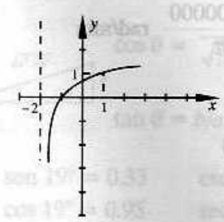
75. $\operatorname{dom} f = (-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$



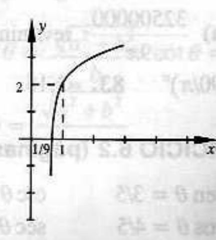
77. $\operatorname{dom} f = (-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$



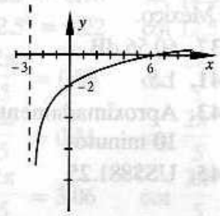
79. $\operatorname{dom} f = (-2, +\infty)$



81. $\operatorname{dom} f = (0, -\infty)$



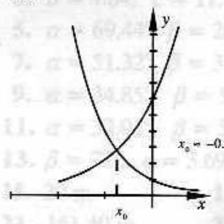
83. $\operatorname{dom} f = (-3, +\infty)$



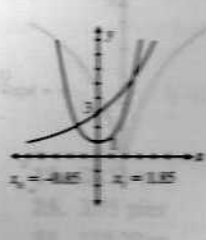
85. 2.047818583 **87.** 4.828313747
89. 2.047818583 **91.** 4.828313737
93. **(a)** $10^7 \ln (10^7/x)$ **95.** b
(b) $10\,\dfrac{\log_{10}(x/10^7)}{\log_{10}(1/e)}$

EJERCICIO 5.3 (páginas 257-258)

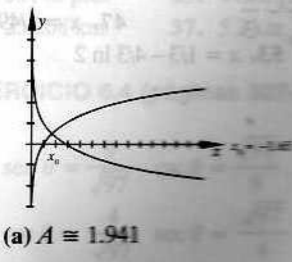
1. $x = 2$ **3.** $x = 4/3$ **5.** $S = 1/2$
7. $x = \ln 2 + 2$ **9.** $x = 0$ **11.** $x = 3$
13. $x = -1$ **15.** $x = \pm 2$ **17.** $x = \pm 3$
19. $x = 0, x = 2\ln 5$ **21.** $x = \log_{3/16} 4$ **23.** $x = 15$
25. $x = 16$ **27.** $x = \pm\sqrt{2}/4$ **29.** $x = 2$
31. $x = 4/3$ **33.** $x = 100$ **35.** $x = 8, x = 2$
37. $x = 6$ **39.** $x = 4$ **41.** $x = 1, x = e^2$
43. $y = e^4, y = e^{-4}$
45.



47.



49.



51. **(a)** $A \cong 1.941$

EJERCICIO 5.4 (páginas 265-267)

1. 12.6 min. y 20 min. respectivamente.
3. **(a)** $k = 0.2027$ **(b)** 6.84 **5.** 4,225 **7.** 24,151 años
9. 1,620 años **11.** 12,979 años
13. $n = 1 - 5400$; $n = 2 - 5408$; $n = 4 - 541216$; $n = 12 - 5415$; $n = 52 - 5416.10$; $n = 365 - 5416.39$; $n = 8760 - 5416.43$; $n \to \infty - 5416.44$
15. US\$980.32 **17.** 8 **19.** 5.328 **21.** 4.13
23. 1.58×10^{-4} **25.** 1.995×10^{-10} **27.** 2.5×10^{-6} **29.** 5.602

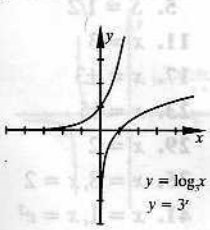
31. 50.12 veces aproximadamente.
33. 25.12 veces más intenso que el de Loma Prieta y 5 veces más intenso que el de Ciudad de México.
35.

120
90
70
50
20

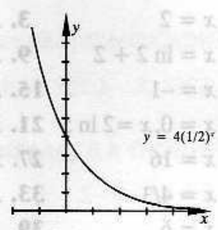
37. 60.56 dB
41. 1.5
43. Aproximadamente 10 minutos
45. US$881.25

EJERCICIO DE REPASO (páginas 267-269)

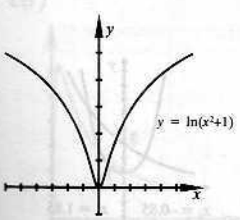
1. 1 **3.** e **5.** 1.5 **7.** $A = 10^{0.6990}$
9. $\log_9 7$ **11.** 4 **13.** 0.7608 **15.** ln 8/ln 7
17. 5.7 **19.** $\approx 8 \times 10^{-10}$ **21.** 1/64 **23.** 243
25. 1/16 **27.** $\log_{25} 0.2 = -1/2$ **29.** $36^{1.5} = 216$
31. $\log_5 64/81$ **33.** $\operatorname{dom} f = \{x \in \Re \,/\, x \neq 1/2\}$
35. $\operatorname{dom} f = \{x \in \Re \,/\, x \neq 5/2\}$
37.



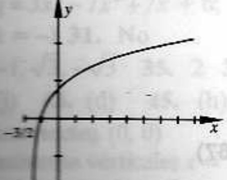
39.



41.



43. $x = 2/3$ **45.** $x = \dfrac{1}{3\log_{10}^{5}} - \dfrac{2}{3}$ **47.** $x = 1/49$
49. $x = e/2$ **51.** $x = 5/2$ **53.** $x = 1/3 - 4/3 \ln 2$
55. C, D, A, B
57. $(-1, +\infty)$

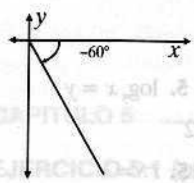


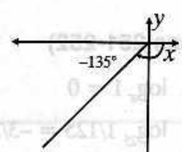
59. 5.8
61. La cuarta parte de la cantidad inicial.
63. Aproximadamente 2,217 años.
65. **(a)** $t = 1/r \ln\left[\dfrac{r}{A_0}A + 1\right]$ **(b)** En el 2021.

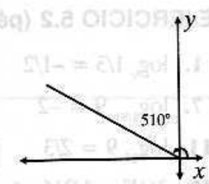
CAPITULO 6

EJERCICIO 6.1 (páginas 279-280)

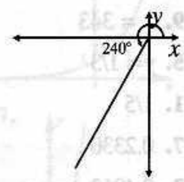
1. **3.** **5.**

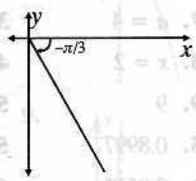


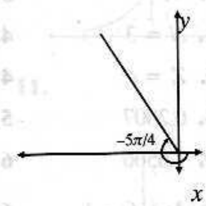




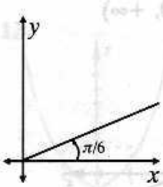
7. **9.** **11.**

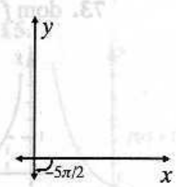


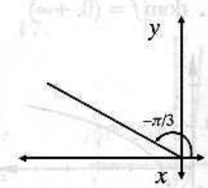




13. **15.** **17.**







19. 15.324° **21.** 7.2° **23.** 150°37'48" **25.** 31°51'36"
27. $\pi/12$ **29.** $7\pi/12$ **31.** $\pi/90$ **33.** $101\pi/540$
35. $-\pi/3$ **37.** $-3\pi/2$ **39.** 270° **41.** 900°
43. 135° **45.** $(324/\pi)°$ **47.** $(2880/\pi)°$ **49.** 100°
51. 45° **53.** 40° **55.** $5\pi/4$ **57.** 0.2π
59. $2\pi - 5$ **61.** 42°15', 132°15'
63. No tiene complementario. 75.5°
65. **(a)** $-5\pi/6$; −150° **(b)** $42\pi/5$; 1512°
67. 90°, $\pi/2$ **69.** **(a)** 15 horas **(b)** 4 horas
71. **(a)** 4 **(b)** 8 **73.** **(a)** 1.6875 **(b)** $(303.75/\pi)°$
75. **(a)** 1400π **(b)** 252000° **77.** **(a)** 3π rad/s **(b)** 300π cm/s
79. **(a)** $\dfrac{32500000}{9\pi}$ rev/min **(b)** $\dfrac{195000000}{\pi}$ rad/min
81. $(90/\pi)°$ **83.** ≈ 1.15

EJERCICIO 6.2 (páginas 289-290)

1. $\operatorname{sen}\theta = 3/5$ $\csc\theta = 5/3$
$\cos\theta = 4/5$ $\sec\theta = 5/4$
$\tan\theta = 3/4$ $\cot\theta = 4/3$

3. $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{10}/10$ $\quad \csc\theta = \sqrt{10}$
$\cos\theta = 3\sqrt{10}/10$ $\quad \sec\theta = \sqrt{10}/3$
$\tan\theta = 1/3$ $\quad \cot\theta = 3$

5. $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{21}/5$ $\quad \csc\theta = 5\sqrt{21}/21$
$\cos\theta = 2/5$ $\quad \sec\theta = 5/2$
$\tan\theta = \sqrt{21}/2$ $\quad \cot\theta = 2\sqrt{21}/21$

7. $\operatorname{sen}\theta = 2\sqrt{2}/3$ $\quad \csc\theta = 3\sqrt{2}/4$
$\cos\theta = 1/3$ $\quad \sec\theta = 3$
$\tan\theta = 2\sqrt{2}$ $\quad \tan\theta = \sqrt{2}/4$

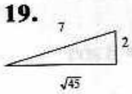
9. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad \csc\theta = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$
$\cos\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad \sec\theta = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$
$\tan\theta = a/b$ $\quad \cot\theta = b/a$

11. $\tan\theta = \sqrt{11}/11$ $\quad \sec\theta = \sqrt{\dfrac{12}{11}}$
$\csc\theta = \sqrt{12}$ $\quad \cot\theta = \sqrt{11}$

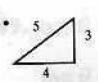
13. $\tan\theta = 3\sqrt{5}/2$ $\quad \sec\theta = 7/2$
$\csc\theta = \dfrac{7\sqrt{5}}{15}$ $\quad \cot\theta = \dfrac{2\sqrt{5}}{15}$

15. $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ $\quad \sec\theta = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$
$\csc\theta = \sqrt{10}$ $\quad \cot\theta = 3$

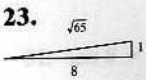
17. $\operatorname{sen}\theta = 2/7$ $\quad \tan\theta = \dfrac{2\sqrt{5}}{15}$
$\cos\theta = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ $\quad \cot\theta = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

19.


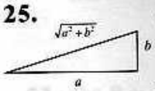
$\cos\theta = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ $\quad \sec\theta = \dfrac{7\sqrt{5}}{15}$ $\quad \cot\theta = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$
$\csc\theta = 7/2$ $\quad \tan\theta = \dfrac{2\sqrt{5}}{15}$

21.


$\operatorname{sen}\theta = 3/5$ $\quad \tan\theta = 3/4$ $\quad \cot\theta = 4/3$
$\cos\theta = 4/5$ $\quad \csc\theta = 5/3$

23.


$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{65}}{65}$ $\quad \csc\theta = \sqrt{65}$ $\quad \cot\theta = 8$
$\cos\theta = \dfrac{8\sqrt{65}}{65}$ $\quad \sec\theta = \dfrac{\sqrt{65}}{8}$

25.


$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad \csc\theta = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ $\quad \cot\theta = a/b$
$\tan\theta = b/a$ $\quad \sec\theta = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

27. $\operatorname{sen} 19° = 0.33$ $\quad \csc 19° = 3.03$
$\cos 19° = 0.95$ $\quad \sec 19° = 1.05$
$\tan 19° = 0.34$ $\quad \cot 19° = 2.94$

29. $\operatorname{sen} 12.5° = 0.22$ $\quad \csc 12.5° = 4.55$
$\cos 12.5° = 0.98$ $\quad \sec 12.5° = 1.02$
$\tan 12.5° = 0.22$ $\quad \cot 12.5° = 4.55$

31. $\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{5} = 0.95$ $\quad \csc\dfrac{2\pi}{5} = 1.05$
$\cos\dfrac{2\pi}{5} = 0.31$ $\quad \sec\dfrac{2\pi}{5} = 3.23$
$\tan\dfrac{2\pi}{5} = 3.06$ $\quad \cot\dfrac{2\pi}{5} = 0.33$

33. $\operatorname{sen} 0.6523 = 0.61$ $\quad \csc 0.6523 = 1.64$
$\cos 0.6523 = 0.79$ $\quad \sec 0.6523 = 1.27$
$\tan 0.6523 = 0.77$ $\quad \cot 0.6523 = 1.30$

35. **(a)** $\theta = 0.5$ **(b)** $\theta = 28.46°$
37. **(a)** $\theta = 1.29$ **(b)** $\theta = 74.05°$
39. **(a)** $\theta = 1.32$ **(b)** $\theta = 75.52°$
41. **(a)** $\theta = 0.73$ **(b)** $\theta = 41.81°$
43. **(a)** $\theta = 1.49$ **(b)** $\theta = 85.65°$
45. F **47.** V **49.** F

51. $\cot\theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ **53.** $\sec\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{\frac{x}{r}} = \dfrac{1}{\cos\theta}$

EJERCICIO 6.3 (páginas 296-299)

1. $a = 1.60,\ c = 3.40$
3. $b = 4.84,\ c = 11.11$
5. $\alpha = 69.44°,\ \beta = 20.56°,\ c = 8.54$
7. $\alpha = 51.32°,\ \beta = 38.68°,\ a = 3.12$
9. $\alpha = 34.85°,\ \beta = 55.15°,\ b = 11.49$
11. $\alpha = 32.01°,\ \beta = 57.99°,\ c = 9.43$
13. $\beta = 77°,\ a = 3.69,\ c = 16.42$
15. 20 m **17.** 61.28 m **19.** 28.56 m
21. 161.40 m **23.** 15.38 pies **25.** 3.75 pies
27. 31146 pies **29.** 44.42 pies **31.** 118.79 m
35. 23,208 km **37.** 5.2 km

EJERCICIO 6.4 (páginas 307-309)

1. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{9}{\sqrt{97}}$ $\quad \csc\theta = \dfrac{\sqrt{97}}{9}$
$\cos\theta = \dfrac{4}{\sqrt{97}}$ $\quad \sec\theta = \dfrac{\sqrt{97}}{4}$
$\tan\theta = 9/4$ $\quad \cot\theta = 4/9$

3. $\operatorname{sen}\theta = -4/5$ $\quad \csc\theta = -5/4$
$\cos\theta = 3/5$ $\quad \sec\theta = 5/3$
$\tan\theta = -4/3$ $\quad \cot\theta = -3/4$

5. $\operatorname{sen}\theta = 1$ $\quad \csc\theta = 1$
$\cos\theta = 0$ $\quad \sec\theta =$ no definida
$\tan\theta =$ no definida $\quad \cot\theta = 0$

7. $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\csc\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$

$\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ $\sec\theta = -\frac{\sqrt{13}}{3}$

$\tan\theta = -2/3$ $\cot\theta = -3/2$

9. $\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\csc\theta = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\cos\theta = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\sec\theta = -\sqrt{3}$

$\tan\theta = \sqrt{2}$ $\cot\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

11. cuadrante II. **13.** cuadrante III. **15.** cuadrante II.
17. cuadrante II.

19. $\operatorname{sen}\theta = 1/4$ $\sec\theta = -\frac{4}{\sqrt{15}}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ $\cot\theta = -\sqrt{15}$

$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{15}}$

21. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ $\csc\theta = \frac{\sqrt{10}}{3}$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ $\sec\theta = -\sqrt{10}$

$\cot\theta = -1/3$

23. $\cos\theta = \frac{\sqrt{99}}{10}$ $\sec\theta = \frac{10}{\sqrt{99}}$

$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{99}}$ $\cot\theta = -\sqrt{99}$

$\csc\theta = -10$

25. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2.8}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{6.84}}{2.8}$ $\sec\theta = -\frac{2.8}{\sqrt{6.84}}$

$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{6.84}}$ $\cot\theta = -\sqrt{6.84}$

27. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{7}{\sqrt{50}}$ $\csc\theta = -\frac{\sqrt{50}}{7}$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{50}}$ $\sec\theta = -\sqrt{50}$

$\cot\theta = 1/7$

29. $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{51}}{10}$

31. $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$ y $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{3}}$

ó $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ y $\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{3}}$

33. $\operatorname{sen}\theta = -1/4$ y $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$

35. $\tan\theta = 5$ y $\csc\theta = \pm\frac{\sqrt{26}}{5}$

37. -1 **39.** 2 **41.** $-1/2$ **43.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$

45. $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ **47.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **49.** -1 **51.** 0

53. 30°, 210° **55.** 225°, 315° **57.** 180° **59.** $\pi/2, 3\pi/2$

61. $5\pi/4, 7\pi/4$ **63.** $2\pi/3, 5\pi/3$ **69.** No

73. $A = \frac{\pi d^2}{8} + 5\sqrt{d^2 - 100}$ **75.** 5.30 m

EJERCICIO 6.5 (páginas 315-317)

1. $\beta = 20°$, $a = 7$, $b = 2.43$
3. $\gamma = 89°$, $a = 4.63$, $c = 7.51$
5. $\beta = 28.39°$, $\gamma = 79.61°$ $c = 12.41$
7. No existe.
9. $\alpha = 109.69°$, $\beta = 50.31°$, $a = 11.01$
11. $\beta = 12.50°, \gamma = 47.50°$, $c = 34.05$
13. $\gamma = 64°48'$, $a = 2.27$, $b = 9.73$
15. $\alpha = 22.84°$, $\beta = 142.16°$, $b = 18.96$
17. No existe.
19. $\alpha = 85.68°$, $\beta = 34.32°$, $a = 10.61$
21. $\alpha = 21.14°, \gamma = 46.86°$, $c = 14.17$
23. $\beta = 9.43°$, $\gamma = 45.57°$, $c = 26.15$
25. $\alpha = 21.24°$, $\beta = 53.76°$, $b = 33.40$
27. 1.76 km de A 1.23 km de B
29. 98.04 m
31. 23.9 km
33. 15.11°
35. 6.57°
39. Si las longitudes de los lados son a, b y c, entonces un triángulo quedará determinado si y sólo si

$$a + b > c$$
$$a + b > b$$
$$b + c > a$$

41. **(a)** $b = (5/2)\sqrt{2}$
(b) $b < \frac{5\sqrt{2}}{2}$
(c) $(5/2)\sqrt{2} < b < 5$
(d) $b = (5/2)\sqrt{2}$ ó $b \geq 5$

43. **(a)** $b \leq c$
(b) $b > c$

EJERCICIO 6.6 (páginas 322-324)

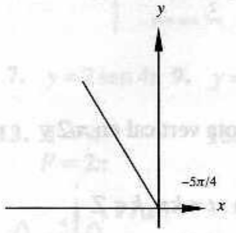
1. $a = 12.49$, $\beta = 61.31°$, $\gamma = 58.69°$
3. $b = 15.62$, $\alpha = 26.33°$, $\gamma = 33.67°$
5. $\alpha = 78.46°$, $\beta = 44.42°$, $\gamma = 57.12°$
7. $\alpha = 52.88°$, $\beta = 30.62°$, $\gamma = 96.5°$
9. $c = 6.32$, $\alpha = 97.69°$, $\beta = 60.31°$
11. $a = 7.04$, $\beta = 25.03°$, $\gamma = 57.72°$
13. $c = 13.01$, $\alpha = 43.26°$, $\beta = 91.49°$
15. $\alpha = 26.38°$, $\beta = 117.28°$, $\gamma = 36.34°$
17. 106.07° **19.** 24.01 millas náuticas **21.** 87.53 km
23. $\alpha = 137.2°$, $\beta = 32.46°$ **25.** 1.22 km

27. 9.18 cm y 17.62 cm respectivamente.
31. 30 **33.** 7.30 **35.** 5295.69 pies²

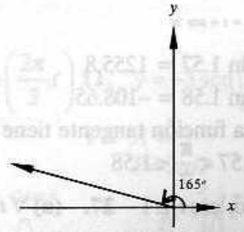
EJERCICIO DE REPASO (páginas 324-327)

1. F **3.** F **5.** sen^{-1} **7.** sen **9.** cos

11.



13.



15. $-5\pi/6$ **17.** $37.8\pi/180$ **19.** 22.5°
21. 16.2° **23.** 62°30' **25.** 131°46'48"
27. −282°, −642° 438°, 798°
29. **(a)** 0.44 cm, **(b)** 15.71 cm
31. **(a)** 250000 estadios, **(b)** 26466.15 millas.
Resultado correcto 24818.58 millas.
7% del resultado correcto 1737.30 millas.
7% del resultado correcto + resultado correcto > 26466.15.
33. $b = 40$, $\alpha = 36.87°$, $\theta = 53.13°$
35. $a = 28.01$, $c = 48.83$, $\beta = 55°$
37. $a = 6.08$, $b = 5.2$, $\alpha = 49°30'$
39. 36.87°, 53.13°, 90°
41. 49.08 m **43.** 83.13°

45. $\text{sen}\,\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\csc\theta = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\sec\theta = \sqrt{5}$
$\tan\theta = -2$ $\cot\theta = -1/2$

47. $\text{sen}\,\theta = -\dfrac{0.5}{\sqrt{0.34}}$ $\csc\theta = -\dfrac{\sqrt{0.34}}{0.5}$
$\cos\theta = -\dfrac{0.3}{\sqrt{0.34}}$ $\text{sen}\,\theta = -\dfrac{\sqrt{0.34}}{0.3}$
$\tan\theta = 5/3$ $\cot\theta = 3/5$

49. $\cos\theta = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ $\sec\theta = \dfrac{7}{4\sqrt{3}}$
$\tan\theta = -\dfrac{1}{4\sqrt{3}}$ $\cot\theta = -4\sqrt{3}$
$\csc\theta = -7$

51. $\text{sen}\,\theta = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ $\csc\theta = -\dfrac{3}{\sqrt{5}}$
$\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\cot\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$
$\sec\theta = 3/2$

53. $\text{sen}\,\theta = -\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ $\csc\theta = -\dfrac{7}{4\sqrt{3}}$
$\cos\theta = -1/7$
$\tan\theta = 4\sqrt{3}$ $\cot\theta = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}$

55. $\text{sen}\,\theta = -\dfrac{4}{\sqrt{17}}$ $\text{sen}\,\theta = -\dfrac{4}{\sqrt{17}}$
$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$
$\sec\theta = -\sqrt{17}$ $\sec\theta = \sqrt{17}$
$\csc\theta = \dfrac{\sqrt{17}}{4}$ $\csc\theta = -\dfrac{\sqrt{17}}{4}$
$\cot\theta = -1/4$ $\cot\theta = -1/4$

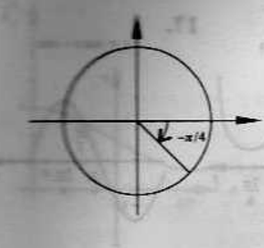
57. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
59. 1
61. 45°, 315°
63. 210°, 330°
65. $\pi/6$, $11\pi/6$
67. $3\pi/4$, $7\pi/4$
69. $\gamma = 85°$, $A = 9.42$, $C = 14.59$
71. No existe.
73. 11.43 cm y 15.14 cm.
75. El primer buque y lo hace en 28 minutos aproximadamente.
77. $b = 15.76$ $\alpha = 29.57°$ $\gamma = 99.43°$
79. $\alpha = 117.28°$ $\beta = 26.38°$ $\gamma = 36.34°$
81. 108.43°, 30.96°, 40.61°
83. 74.33 m
85. $\phi = 46.72°$

CAPITULO 7

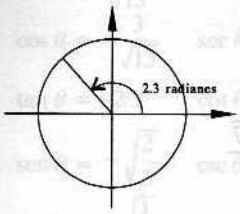
EJERCICIO 7.1 (página 335)

1. **(a)** $\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}, \text{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right)$ **(b)** $\left(-1/2, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

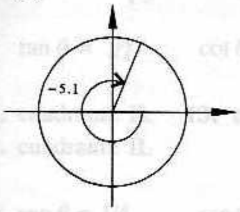
3. **(a)** $\left(\cos -\dfrac{\pi}{4}, \text{sen} -\dfrac{\pi}{4}\right)$ **(b)** $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$



5. **(a)** $(\cos(2,3),\ \operatorname{sen}(2,3))$ **(b)** $(-0.67,\ 0.75)$



7. **(a)** **(b)** $(0.38, 0.93)$



9. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **11.** 1 **13.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **15.** 0 **17.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **19.** 2

21. $\cos\pi = \cos(\pi + 2n\pi)\quad n = 1$

23. $\tan(-t) = -\tan t\quad x = 0.8$

25. $\cos(t+\pi) = -\cos t\quad t = 1.9$

27. $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t\quad t = 4 - \pi$

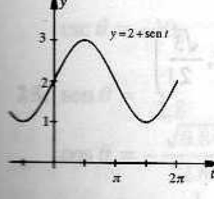
29. $\cos(-t) = \cos t\quad t = 0.78$

31. Como $\cos t = 1$ sólo para $t = 0, t = \pm 2\pi, t = \pm 4\pi$, ... entonces $P \geq 2\pi$ pero $\cos(t \pm 2n\pi) = \cos t \therefore P \leq 2\pi$. Luego $P = 2\pi$.

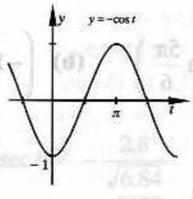
39. $t = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi\ \ n \in Z,\ \text{o}\ t = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi\ \ n \in Z.$

EJERCICIO 7.2 (páginas 340-341)

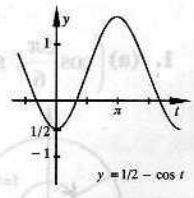
1.



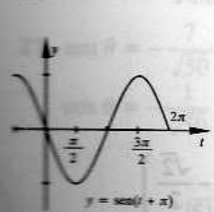
3.



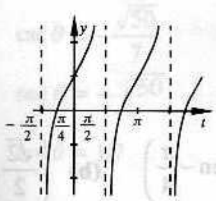
5.



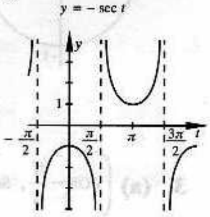
7.



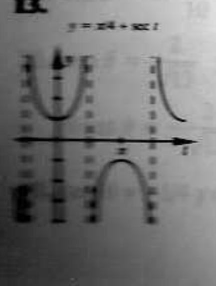
9. $y = 1 + \tan t$



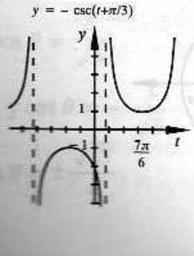
11. $y = -\sec t$



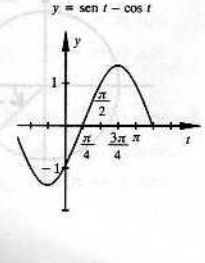
13.



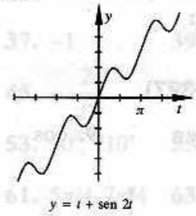
15. $y = -\csc(t + \pi/3)$



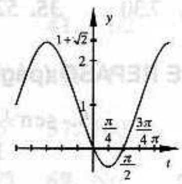
17. $y = \operatorname{sen} t - \cos t$



19.



21. $y = -\operatorname{sen} t - \cos t + 1$



23. $\tan 1.57 = 1255.8$

$\tan 1.58 = -108.65$

La función tangente tiene una asíntota vertical en $\pi/2$ y $1.57 < \frac{\pi}{2} < 1.58$

25. no, $|\csc t| \geq 1$ **27.** **(a)** $\forall\, t \in \Re$ **(b)** $t \neq k\pi, k \in Z$

29. $\tan x$; $\sec x$; $\csc x$; $\cot x$

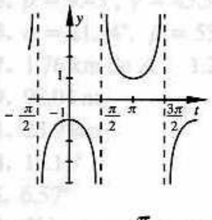
31. **(a)** $\csc(-t) = \frac{1}{\operatorname{sen}(-t)} = \frac{1}{-\operatorname{sen} t} = \csc t$

(b) $\sec(-t) = \frac{1}{\cos(-t)} = \frac{1}{\cos(t)} = \sec t$

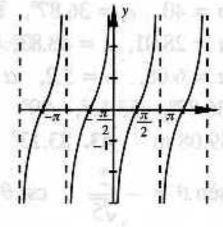
(c) $\cot(-t) = \frac{\cos(-t)}{\operatorname{sen}(-t)} = \frac{\cos(t)}{-\operatorname{sen} t} = -\cot t$

33. **(a)** Impar **(b)** Par **(c)** Impar

35. $y = -\sec t$



37. $y = -\cot t$



39. Dom y: $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in z$

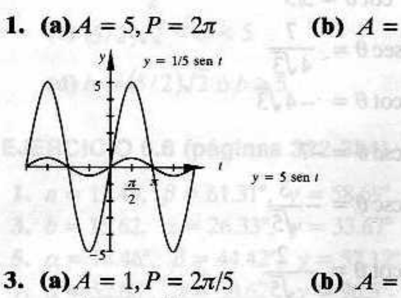
Ran y: $|y| \geq 1$

Asíntota: $t = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in z$

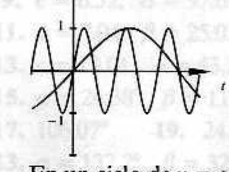
Periodo: π

EJERCICIO 7.3 (páginas 346-348)

1. **(a)** $A = 5, P = 2\pi$ **(b)** $A = 1/5, P = 2\pi$

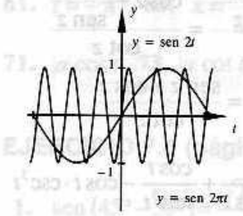


3. **(a)** $A = 1, P = 2\pi/5$ **(b)** $A = 1, P = 10\pi$



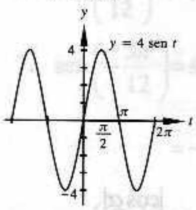
En un ciclo de $y = \operatorname{sen} t/5$ hay 25 ciclos de $y = \operatorname{sen} 5t$.

5. **(a)** $A = 1, P = 1$ **(b)** $A = 1, P = \pi$

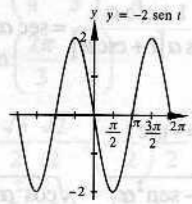


7. $y = 2\,\text{sen}\,4t$ **9.** $y = -1/3\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$ **11.** $y = -3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

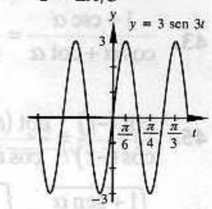
13. $A = 4$
$P = 2\pi$



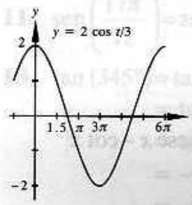
15. $A = 2$
$P = 2\pi$



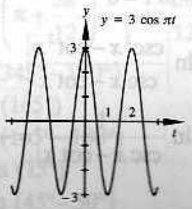
17. $A = 3$
$P = 2\pi/3$



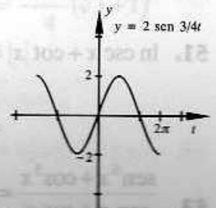
19. $A = 2$
$P = 6\pi$



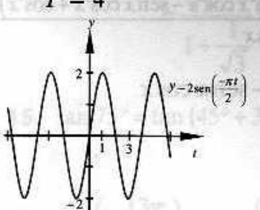
21. $A = 3$
$P = 2$



23. $A = 2$
$P = 8\pi/3$



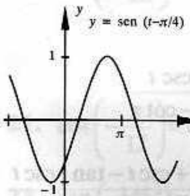
25. $A = 2$
$P = 4$



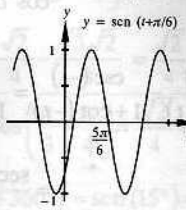
27. Página 690 No. 27

29. Página 690 No. 29

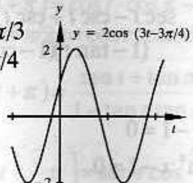
31. $A = 1$
$P = 2\pi$
$D = \pi/4$



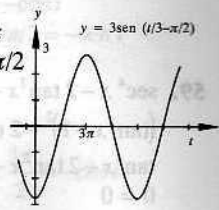
33. $A = 1$
$P = 2\pi$
$D = -\pi/6$



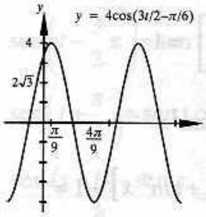
35. $A = 2$
$P = 2\pi/3$
$D = \pi/4$



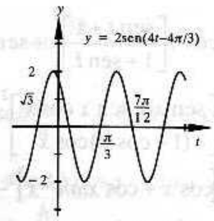
37. $A = 3$
$P = 6\pi$
$D = 3\pi/2$



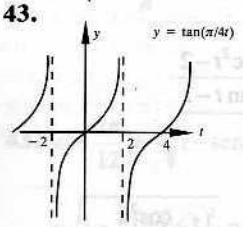
39. $A = 4$
$P = 2\pi/3$
$D = \pi/9$



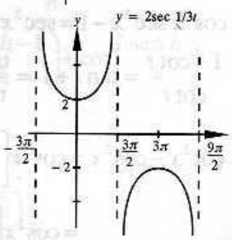
41. $A = 2$
$P = \pi/2$
$D = \pi/3$



43.



45.

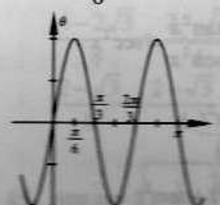


47. $y = 3\cos(4t + \pi/2)$ **49.** 6π

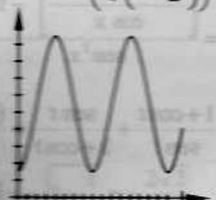
51. $\tan(b(t + \pi/b)) = \tan(bt + \pi) = \tan bt$

53. $\sec\left(b\left(t + \frac{2\pi}{b}\right)\right) = \sec(bt + 2\pi) = \sec(bt)$
periodo$2\pi/b$

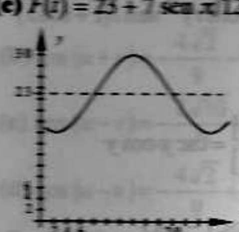
55. $\theta = \frac{\pi}{6}\cos 3t$



57. $y = 8\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 11$



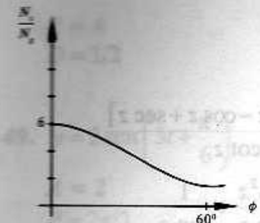
59. **(a)** $23°, 23 + \frac{7\sqrt{3}}{2} = 29.1$; **(b)** A las 8 a.m. y a las 8 p.m.
(c) $F(t) = 23 + 7\,\text{sen}\,\pi/12(t - 8)$



(d) 30 y 16 se alcanzan a las 2 p.m. y 2 a.m. respectivamente.

61. $f(t) = -A\cos 4t$

63.



EJERCICIO 7.4 (páginas 353-354)

1. 1 **3.** $-\operatorname{sen} t$ **5.** 1 **7.** 0 **9.** -1
11. $\tan t$ **13.** 1 **15.** $-\cot^2 x$ **17.** $\cos x$ **19.** $\tan\theta$

21. $\cos^2 t\left[\dfrac{\operatorname{sen} t+1}{1+\operatorname{sen} t}\right]^2+\operatorname{sen}^2 t\left[\dfrac{\cos t+1}{1+\cos t}\right]^2=1$

23. $\left[\dfrac{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} x\cos x}{(1+\cos x)\cos x}\right]^2=\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x$

$[\cos x+\cos x\tan^2 x]^2-1=\cos^2 x[1+\tan^2 x]^2-1=$

$\cos^2 x\sec^4 x-1=\sec^2 x-1=\tan^2 x$

25. $\dfrac{1+\cot t}{\cot t}=\tan t+1=\dfrac{\tan^2 t-1}{\tan t-1}=\dfrac{\sec^2 t-2}{\tan t-1}$

27. $\cot^2 x-\cos^2 x=\cos^2 x\left[\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-1\right]$

$=\cos^2 x\left[\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}\right]=\cos^2 x\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}$

$=\cos^2 x\cot^2 x=\cot^2 x\cos^2 x$

29. $\dfrac{[\cos x+\tan x\operatorname{sen} x]^2-1}{\operatorname{sen}^2 x}=\dfrac{\left[\cos x+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\right]^2-1}{\operatorname{sen}^2 x}$

$=\dfrac{\left[\dfrac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\right]^2-1}{\operatorname{sen}^2 x}=\dfrac{\sec^2 x-1}{\operatorname{sen}^2 x}=\dfrac{\tan^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=\sec^2 x$

31. $\dfrac{1+\cos t}{\operatorname{sen} t}+\dfrac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}=\dfrac{(1+\cos t)^2+\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t(1+\cos t)}$

$=\dfrac{1+2\cos t+\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t(1+\cos t)}$

$=\dfrac{1+2\cos t+1}{\operatorname{sen} t(1+\cos t)}=\dfrac{2(1+\cos t)}{\operatorname{sen} t(1+\cos t)}$

$=2\csc t$

33. $\dfrac{\cot y+\csc y}{\operatorname{sen} y+\tan y}=\dfrac{\csc y[\cos y+1]}{\tan y[\cos y+1]}=\csc y\cos y$

35. $\dfrac{1}{\csc t+\cot t}=\dfrac{\csc t-\cot t}{\csc^2 t-\cot^2 t}=\csc t-\cot t$

37. $\dfrac{\cot^2\beta-1}{\cos\beta+\operatorname{sen}\beta}=\dfrac{\dfrac{\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2\beta}}{\cos^2\beta+\operatorname{sen}\beta}$

$=\dfrac{(\cos\beta-\operatorname{sen}\beta)(\cos\beta+\operatorname{sen}\beta)}{(\cos\beta+\operatorname{sen}\beta)\operatorname{sen}^2\beta}$

39. $\operatorname{sen} z-\cos z+\sec z=\dfrac{\cot z[\operatorname{sen} z-\cos z+\sec z]}{\cot z}$

$=\dfrac{\cos z-\dfrac{\cos^2 z}{\operatorname{sen} z}+\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}}{\cot z}$

$=\dfrac{\cos z+\dfrac{1-\cos^2 z}{\operatorname{sen} z}}{\cot z}=\dfrac{\cos z+\dfrac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z}}{\cot z}$

$=\dfrac{\cos z+\operatorname{sen} z}{\cot z}=\dfrac{\operatorname{sen} z+\cos z}{\cot z}$

41. $\dfrac{\tan t+\cot t}{\operatorname{sen}^2 t}-\cos t\csc^3 t=\dfrac{1}{\operatorname{sen} t\cos t}+\dfrac{\cos t}{\operatorname{sen}^3 t}-\cos t\cdot\csc^3 t$

$=\csc t\cdot\sec t+\cos t\cdot\csc^3 t-\cos t\cdot\csc^3 t$

$=\sec t\cdot\csc t$

43. $\dfrac{1+\csc\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}=\dfrac{1+\csc\alpha}{\cos\alpha[1+\csc\alpha]}=\sec\alpha$

45. $\dfrac{\cot(-t)}{\cos(-t)}=\dfrac{\cot(t)}{\cos t}=-\csc t$

47. $\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}}=\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{(1-\operatorname{sen}\alpha)^2}}=\dfrac{\sqrt{\cos^2\alpha}}{1-\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{|\cos\alpha|}{1-\operatorname{sen}\alpha}$

49. $\ln\left(\csc^2 y-\cot^2 y\right)=\ln 1=0$

51. $\ln\csc x+\cot|x|=\ln\left|\dfrac{\csc^2 x-\cot^2 x}{\csc x-\cot x}\right|$

$=\ln\left|\dfrac{1}{\csc x-\cot x}\right|=-\ln|\csc x-\cot x|$

53. $\dfrac{\operatorname{sen}^5 x+\cos^5 x}{\operatorname{sen} x+\cos x}=$

$\dfrac{(\operatorname{sen} x+\cos x)(\operatorname{sen}^4 x-\operatorname{sen}^3 x\cos x+\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x-\operatorname{sen} x\cos^3 x+\cos^4 x)}{\operatorname{sen} x+\cos x}$

$=\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x\right)^2-\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x-\operatorname{sen} x\cos x$

$=1-\operatorname{sen} x\cos x[\operatorname{sen} x\cos x+1]$

55. $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{sen}\alpha+1-\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$

$=\dfrac{2}{\cos^2\alpha}=2\sec^2\alpha$

57. $\dfrac{\sec(-t)}{1+\tan(-t)}-\dfrac{\csc(-t)}{1+\cot(-t)}=\dfrac{\sec t}{1-\tan t}+\dfrac{\csc t}{1-\cot t}$

$=\dfrac{\sec t-\sec t\cot t+\csc t-\tan t\csc t}{(1-\tan t)(1-\cot t)}$

$\dfrac{\sec t-\csc t+\csc t-\sec t}{(1-\tan t)(1-\cot t)}=0$

59. $\sec^4 x-2\tan^2 x-\tan^4 x=1$

$\left(\tan^2 x+1\right)^2-2\tan^2 x-\tan^4 x-1=0$

$\tan^4 x+2\tan^2 x-2\tan^2 x-\tan^4 x-1=0$

$0=0$

61. $t=\frac{3}{4}\pi$ **63.** $x=\frac{\pi}{2}$ **65.** $x=\frac{\pi}{4}$ **67.** $\theta=0$ **69.** $x=\frac{\pi}{2}$

71. $|a|\cos t$ **73.** $|a|\cot t$ **75.** $\tan t$ **77.** $\tan t$ **79.** $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}\tan t}$

EJERCICIO 7.5 (páginas 362-364)

1. $\operatorname{sen}(45°-30°)=\frac{\sqrt2\sqrt3}{4}-\frac{\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt2}{4}[\sqrt3-1]$

3. $\operatorname{sen}(105°)=\operatorname{sen}(60°+45°)=\frac{\sqrt3}{2}\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt2}{4}(\sqrt3+1)$

5. $\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt2}{4}[\sqrt3+1]$

7. $\operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=-\left[\frac{\sqrt3}{2}\frac{\sqrt2}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt2}{2}\right]=-\frac{\sqrt2}{4}(\sqrt3+1)$$

9. $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt3-1}{1+\sqrt3}$

11. $\operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{12}\right)=\operatorname{sen}\left(\pi+\frac{5\pi}{12}\right)=-\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}=-\frac{\sqrt2}{4}(\sqrt3+1)$

13. $\tan(345°)=\tan(345°-180°)$
$= \tan(165°)$
$= \tan(165°-180°)$
$= -\tan(15°)$
$= -\tan(45°-30°)$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt3}-1}{1+\frac{1}{\sqrt3}}=\frac{1-\sqrt3}{1+\sqrt3}$$

15. $\tan 75°=\tan(45°+30°)=\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt3}}{1-\frac{1}{\sqrt3}}=\dfrac{\sqrt3+1}{\sqrt3-1}$

17. $\operatorname{sen}\left(-\frac{13\pi}{12}\right)=-\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=-\left[\frac{\sqrt2}{2}\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)\frac{\sqrt3}{2}\right]$

19. $\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{\sqrt2}{4}-\frac{\sqrt3\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt2}{4}(1-\sqrt3)$$

21. $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt2}{4}+\frac{\sqrt3\sqrt2}{4}$

23. $\operatorname{sen}(-345°)=\operatorname{sen}(-345°+360°)=\operatorname{sen}(15°)=\frac{\sqrt2}{4}(\sqrt3-1)$

25. $\cos(t+\pi)=\cos t\cdot\cos\pi-\operatorname{sen}t\operatorname{sen}\pi=-\cos t$

27. $\cos(t+\pi/2)=\cos t\cdot\cos\pi/2-\operatorname{sen}t\cdot\operatorname{sen}\pi/2=-\operatorname{sen}t$

29. $\tan(t+\pi)=\dfrac{\tan t+\tan\pi}{1-\tan t\tan\pi}=\tan t$

31. $\operatorname{sen}\left(t+\frac{3}{2}\pi\right)=\operatorname{sen}t\cos\frac{3\pi}{2}+\cos t\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}=-\cos t$

33. $\cos(t-\pi)=\cos t\cos\pi+\operatorname{sen}t\operatorname{sen}\pi=-\cos t$

35. $\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\cos t\cos\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}t\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=\operatorname{sen}t$

37. $\operatorname{sen}\left(t-\frac{3}{2}\pi\right)=\operatorname{sen}t\cos\frac{3\pi}{2}-\cos t\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}=\cos t$

39. $\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}t\cos\frac{\pi}{4}+\cos t\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}(\operatorname{sen}t+\cos t)$

41. $\dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=\dfrac{\operatorname{sen}x\cos h+\operatorname{sen}h\cos x-\operatorname{sen}x}{h}$

$$=\operatorname{sen}x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)+\cos\left(\frac{\operatorname{sen}h}{h}\right)$$

43. $\cos\frac{7\pi}{12}=-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\frac{7\pi}{12}}=$

$$-\sqrt{1-\frac{1}{8}(\sqrt3+1)^2}=\sqrt{\frac{8-(4+2\sqrt3)}{8}}=$$

$$-\sqrt{\frac{2(2-\sqrt3)}{8}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt3}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt2}{4}(\sqrt3-1)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt3}}{2}$$

$$\frac{2}{16}(3-2\sqrt3+1)=\frac{2-\sqrt3}{4}$$

$$\frac{4-2\sqrt3}{8}=\frac{2-\sqrt3}{4}$$

$$\frac{2-\sqrt3}{4}=\frac{2-\sqrt3}{4}$$

45. $\operatorname{sen}u=\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt5}{3}$ $\cos v=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt2}{3}$

(a) $\operatorname{sen}(u+v)=-\frac{\sqrt5\,2\sqrt2}{3^2}+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{-2(1+\sqrt{10})}{9}$

(b) $\cos(u+v)=-\frac{4\sqrt2}{9}-\frac{\sqrt5}{9}=\frac{4\sqrt2-\sqrt5}{9}$

(c) $\operatorname{sen}(u-v)=-\frac{2\sqrt{10}}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2}{9}(1-\sqrt{10})$

(d) $\cos(u-v)=-\frac{4\sqrt2}{9}+\frac{\sqrt5}{9}=\frac{4\sqrt2+\sqrt5}{9}$

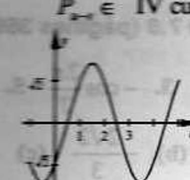
$P_{u+v}\in$ IV cuadrante. $P_{u-v}\in$ IV cuadrante.

47. $y=\sqrt2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{4}\right)$

$A=\sqrt2$

$P=4$

$D=1/2$

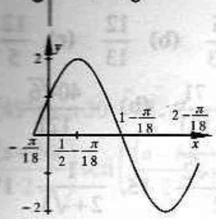


49. $y=2\operatorname{sen}\left(3t+\frac{\pi}{6}\right)$

$A=2$

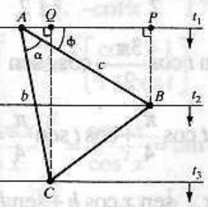
$P=2\pi/3$

$D=-\pi/18$



53. $a=\dfrac{\sqrt{17}}{6}\quad \phi=1.8158\text{ rad.}$

55.



(a) Sea BP perpendicular a AP y sea CQ perpendicular a AQ, como se muestra en la figura. Sea v la velocidad de la onda de choque. Entonces, la longitud de BP es $v(t_2-t_1)$ y la longitud de CQ es $v(t_3-t_1)$. A partir de los triángulos rectángulos APB y AQC, obtenemos $\operatorname{sen}\phi=v(t_2-t_1)/c$ y $\operatorname{sen}(\phi+\alpha)=v(t_3-t_1)/b$. Entonces, tenemos que

$$R=\frac{t_3-t_1}{t_2-t_1}=\frac{\frac{b}{v}\operatorname{sen}(\phi+\alpha)}{\frac{c}{v}\operatorname{sen}\phi}=\frac{b\operatorname{sen}(\phi+\alpha)}{c\operatorname{sen}\phi}$$

(b) Usando la fórmula de la suma para el seno, encontramos que

$$R=\frac{b\operatorname{sen}(\phi+\alpha)}{c\operatorname{sen}\phi}=\frac{b(\operatorname{sen}\phi\cos\alpha+\cos\phi\operatorname{sen}\alpha)}{c\operatorname{sen}\phi}$$

$$=\frac{b}{c}(\cos\alpha+\cot\phi\operatorname{sen}\alpha)$$

así, $\cot\phi=\left(\dfrac{c}{b}R-\cos\alpha\right)/\operatorname{sen}\alpha.$ A partir de la ley de los senos,

$\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$ o $\dfrac{c}{b}=\dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta}$. Entonces, tenemos que

$$\cot\phi=\left(R\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta}-\cos\alpha\right)/\operatorname{sen}\alpha=\frac{R\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}-\cot\alpha.$$

57. $\tan 90°$ indefinida.

59. $\alpha=\theta-\beta$

$\tan\theta=m_2$

$\tan\beta=m_1$

$$\tan\alpha=\tan(\theta-\beta)=\frac{m_2-m_1}{1+m_2\cdot m_1}$$

EJERCICIO 7.6 (páginas 369-370)

1. $2\operatorname{sen}4\alpha$ **3.** $-\cos\dfrac{2\pi}{7}$ **5.** $1/2\tan 10t$

7. **(a)** $1/3$ **(b)** $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ **(c)** $-2\sqrt{2}$

9. **(a)** $\dfrac{5}{13}$ **(b)** $\dfrac{12}{13}$ **(c)** $\dfrac{12}{5}$

11. **(a)** $-\dfrac{71}{121}$ **(b)** $-\dfrac{40\sqrt{6}}{121}$ **(c)** $\dfrac{40\sqrt{6}}{71}$

13. $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ **15.** $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ **17.** $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}{2}$ **19.** $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

21. $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4+\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}$ **23.** **(a)** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ **(b)** $\sqrt{\dfrac{1}{5}}$ **(c)** $1/2$

25. **(a)** $-\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}}$ **(b)** $\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}+1}{2}}$ **(c)** $-\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{7}-1}}$

27. **(a)** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ **(b)** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **(c)** $1/2$

29. $\cos 4x=2\cos^2 2x-1$

$$=2\left[2\cos^2 x-1\right]^2-1$$
$$=2\left[4\cos^4 x-4\cos^2 x+1\right]-1$$
$$=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$$

31. $\operatorname{sen}(3x)=\operatorname{sen}(x+2x)=\operatorname{sen}\cos 2x+\operatorname{sen}2x\cos x$

$$=\operatorname{sen}x(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)+2\operatorname{sen}x\cos^2 x$$
$$=3\operatorname{sen}x\cos^2 x-\operatorname{sen}^3 x$$
$$=3\operatorname{sen}x(1-\operatorname{sen}^2 x)-\operatorname{sen}x^3 x$$
$$=3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3 x$$

33. $\operatorname{sen}^2 y=1/2(1-\cos y)=\dfrac{\cos y}{2}\left(\dfrac{1}{\cos y}-1\right)$

$$=\frac{\cos y}{2\operatorname{sen}y}\left(\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}-\operatorname{sen}y\right)=\frac{\tan y-\operatorname{sen}y}{2\tan y}$$

35. $\cos 3\theta=\cos(\theta+2\theta)=\cos\theta\cos 2\theta-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}2\theta$

$$=\cos\theta\left[2\cos^2\theta-1\right]-2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta$$
$$=2\cos^3\theta-\cos\theta\left[1+2\operatorname{sen}^2\theta\right]$$
$$=\cos\theta\left[2\cos^2\theta-1-2\operatorname{sen}^2\theta\right]$$
$$=\cos\theta\left[4\cos^2\theta-3\right]$$

37. $\cos 2y=\cos^2 y-\operatorname{sen}^2\theta$

$$=\cos^2 y\left[1-\tan^2 y\right]$$
$$=\frac{1-\tan^2 y}{\sec^2 y}$$
$$=\frac{1-\tan^2 y}{1+\tan^2 y}$$

39. $\cot 4z=\dfrac{1}{\tan 4z}=\dfrac{1}{\dfrac{2\tan 2z}{1-\tan^2 2z}}$

$$=\frac{1-\tan^2 2z}{2\tan 2z}=\frac{(1-\tan 2z)(1+\tan 2z)}{2\tan 2z}$$

$$=\frac{\left(1-\dfrac{2\tan z}{1-\tan^2 z}\right)\left(1+\dfrac{2\tan z}{1-\tan^2 z}\right)}{\dfrac{4\tan z}{1-\tan^2 z}}$$

$$=\frac{(1-\tan^2 z-2\tan z)(1+2\tan z-\tan^2 z)}{4\tan z(1-\tan^2 z)}$$

$$=\frac{1}{4}[\cot z-\tan z-2]\left[1+\frac{2\tan z}{1-\tan^2 z}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\cot z-\tan z-2+\frac{2(\cot z-\tan z)\tan z}{1-\tan^2 z}-\frac{4\tan z}{1-\tan^2 z}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\cot z-\tan z-2+2-\frac{4\tan z}{1-\tan^2 z}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\cot z-\tan z-\frac{4\tan z}{1-\tan^2 z}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\cot z-\tan z-\frac{4\tan z}{\operatorname{sen}^2 z(\csc^2 z-\sec^2 z)}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\cot z-\tan z-\frac{4\sec z\csc z}{\csc^2 z-\sec^2 z}\right]$$

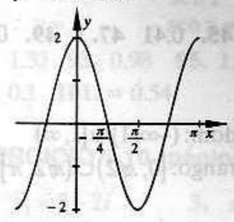
41. $\tan 2t=\dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t}=\dfrac{2\cot t}{\cot^2 t-1}=\dfrac{2\cot t}{\csc^2 t-2}$

43. $\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}-1$

$\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$

$\cos^2\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

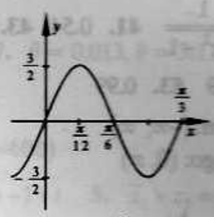
45. $y=2\cos 2x$



amplitud: 2

periodo: π

47. $y=3/2\operatorname{sen} 6x$



amplitud: $\dfrac{3}{2}$

periodo: $\pi/3$

49. $d=4(2\cos^2 4t-1)=4\cos 8t=4\operatorname{sen}(8t+\pi/2)$
$A=4 \quad P=\pi/4$

51. $M=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}}=\dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ **53.** $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

55. De $\cos 2\phi=\dfrac{gh}{v_0^2+gh}$ y las fórmulas del ángulo medio, encontramos que

$$\operatorname{sen}^2\phi=1/2(1-\cos 2\phi)=1/2\left(1-\frac{gh}{v_0^2+gh}\right)=\frac{gh}{2(v_0^2+gh)}$$

$$\text{y}\cos^2\phi=1/2(1+\cos 2\phi)=1/2\left(1+\frac{gh}{v_0^2+gh}\right)=\frac{v_0^2+2gh}{2(v_0^2+gh)}$$

así, $\operatorname{sen}\phi=\dfrac{v_0}{\sqrt{2(v_0^2+gh)}}$ y $\cos\phi=\sqrt{\dfrac{v_0^2+2gh}{2(v_0^2+gh)}}$

Sustituyendo estos valores dentro de la expresión dada para R y simplificando, obtenemos

$$R=\frac{v_0^2\cos\phi}{g}\left(\operatorname{sen}\phi+\sqrt{\operatorname{sen}^2\phi+\frac{2gh}{v_0^2}}\right)$$

$$=\frac{v_0^2}{g}\sqrt{\frac{v_0^2+2gh}{2(v_0^2+gh)}}\left(\frac{v_0}{\sqrt{2(v_0^2+gh)}}+\sqrt{\frac{v_0^2}{2(v_0^2+gh)}+\frac{2gh}{v_0^2}}\right)$$

$$=\frac{v_0^2}{g}\sqrt{\frac{v_0^2+2gh}{2(v_0^2+gh)}}\left(\frac{v_0}{\sqrt{2(v_0^2+gh)}}+\sqrt{\frac{v_0^4+4v_0^2+4g^2h^2}{2(v_0^2+gh)v_0^2}}\right)$$

$$=\frac{v_0^2}{g}\sqrt{\frac{v_0^2+2gh}{2(v_0^2+gh)}}\left(\frac{v_0}{\sqrt{2(v_0^2+gh)}}+\sqrt{\frac{(v_0^2+2gh)}{2(v_0^2+gh)v_0^2}}\right)$$

$$=\frac{v_0^2}{g}\sqrt{\frac{v_0^2+2gh}{2(v_0^2+gh)}}\left(\frac{v_0}{\sqrt{2(v_0^2+gh)}}+\frac{v_0^2+2gh}{v_0\sqrt{2(v_0^2+gh)}}\right)$$

$$=\frac{v_0^2}{g}\sqrt{\frac{v_0^2+2gh}{2(v_0^2+gh)}}\left(+\frac{2(v_0^2+2gh)}{v_0\sqrt{2(v_0^2+gh)}}\right)$$

$$=\frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2+2gh}$$

EJERCICIO 7.7 (página 374)

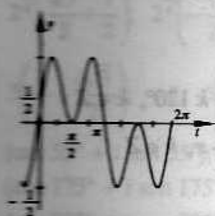
1. $1/2(\operatorname{sen}(\pi)-\operatorname{sen}\pi/6)=-1/4$

3. $1/2(\cos 90^\circ-\cos 120^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

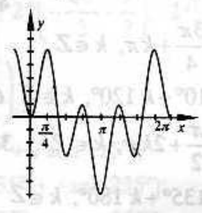
5. $1/2(\operatorname{sen} 12x-\operatorname{sen} 4x)$ **7.** $1/2(\operatorname{sen} 10\theta-\operatorname{sen} 4\theta)$

9. $1/2\left(\operatorname{sen}\dfrac{8x}{3}+\operatorname{sen} 2x\right)$

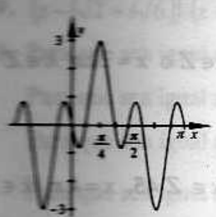
11. $y=1/2(\operatorname{sen} 3t+\operatorname{sen} t)$



13. $y=3[\cos x-\cos 4x]$



15. $y=-3/2(\operatorname{sen} 6\theta-\operatorname{sen} 2\theta)$



17. $2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}$ **19.** $-2\operatorname{sen}(45^\circ)\operatorname{sen} 30^\circ$ **21.** $2\operatorname{sen} 4y\cos 2y$

23. $2\cos 2\theta\cos\theta$ **25.** $2\cos\left(\dfrac{(a+b)t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{(a-b)t}{2}\right)$

27. $2\,\text{sen}\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=\cos(2x)-\cos\frac{3\pi}{2}=\cos 2x$

29. $\frac{-2\,\text{sen}\,8x\,\text{sen}(-4x)}{2\,\text{sen}\,8x\cos 4x}=\tan 4x$

31. $1/2[\text{sen}\,2t+\text{sen}(3\pi)]=1/2\,\text{sen}\,t$

33. $\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\frac{2}{h}\text{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)\cos\frac{h}{2}$

35. $\frac{\text{sen}\,2x-\text{sen}\,2y}{\text{sen}\,2x+\text{sen}\,2y}=\frac{2\cos(x+y)\,\text{sen}(x-y)}{2\,\text{sen}(x+y)\cos(x-y)}=\frac{\tan(x-y)}{\tan(x+y)}$

39. $f(t)=0.08[\text{sen}(600\pi t)+\cos(200\pi t)]$

41. $\text{sen}\,\alpha t\,\text{sen}(\alpha t+\phi)$
$=1/2\{\cos[\alpha t-(\alpha t+\phi)]-\cos[\alpha t+(\alpha t+\phi)]\}$
$=1/2[\cos\phi-\cos(2\alpha t+\phi)]$

EJERCICIO 7.8 (páginas 380-381)

1. $t=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z,\ o,\ t=\frac{5}{6}\pi+2k\pi,\ k\in Z$

3. $t=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z,\ o,\ t=\frac{7}{4}\pi+2k\pi,\ k\in Z$

5. $t=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$ **7.** $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$

9. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$ **11.** $x=(2k+1)\pi,\ k\in Z$

13. $\theta=300+k\,360°, k\in Z$; o, $330°+k\,360°, k\in Z$

15. $\theta=135°+k\,180°,\ k\in Z$

17. $\theta=150+k\,360°, k\in Z$; o, $\theta=210°+k\,360°, k\in Z$

19. $x=\pi/2+2k\pi,\ k\in Z$ **21.** $S=\phi$, no tiene solución.

23. $\theta=210°+k\,360°,\ k\in Z\ \ \theta=330°+k\,360°,\ k\in Z$

25. $\theta=k\,180°,\ k\in Z\ \ \theta=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$

27. $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$

29. $\theta=10°+k\,120°,\ k\in Z\ \ \theta=110°+k\,120°,\ k\in Z$

31. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$ **33.** $x=\frac{k}{2}\pi,\ k\in Z$

35. $\theta=135°+k\,180°,\ k\in Z$
$\theta=15°+k\,180°,\ k\in Z$ o
$\theta=75°+k\,180°,\ k\in Z$

37. $\theta=k\pi,\ k\in Z$ **39.** $x=\pi/2+k\pi\ \ k\in Z$ o $x=2k\pi\ \ k\in Z$

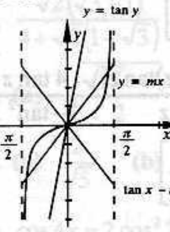
41. $\theta=k\,360°,\ k\in Z$

43. $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z\ x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$ **45.** $x=k\pi,\ k\in Z$

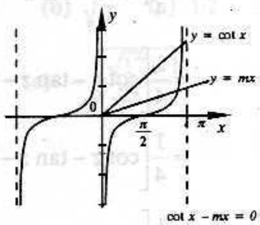
47. $t=\frac{\pi}{2},\ t=\pi,\frac{3\pi}{2}$ **49.** $t=\frac{2}{3},\frac{10}{3},\ t=\frac{26}{3}$

51. $t=\frac{\pi}{4},\ \pi,\ t=\frac{7\pi}{4}$ **53.** $t=\frac{\pi}{3},\ \pi,\ t=5\pi/3$

55. Sí



57. Sí



59. $54\,\text{sen}\left(\pi t-\frac{\pi}{12}\right)=0$, a los 5 segundos + k minutos donde $k=0,1,2,\ldots$

61. $t=\frac{1}{660}$ **63.** $\phi=48.47°\ \ \theta=96.94°$

65. **(a)** 36.93 millones de kilómetros cuadrados.
(b) $w=31$ semanas.
(c) Agosto

EJERCICIO 7.9 (páginas 390-392)

1. $\frac{\pi}{3}$ **3.** $\frac{\pi}{6}$ **5.** $-\frac{\pi}{4}$ **7.** $-\frac{\pi}{4}$ **9.** $-\frac{\pi}{2}$ **11.** $\frac{\pi}{3}$ **13.** $\frac{5\pi}{6}$

15. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **17.** $-\frac{3}{5}$ **19.** $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ **21.** $\frac{5}{2}$ **23.** 0.6 **25.** 2.3

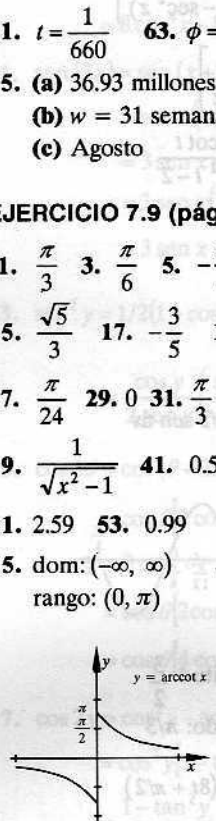
27. $\frac{\pi}{24}$ **29.** 0 **31.** $\frac{\pi}{3}$ **33.** $\sqrt{1-x^2}$ **35.** $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ **37.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

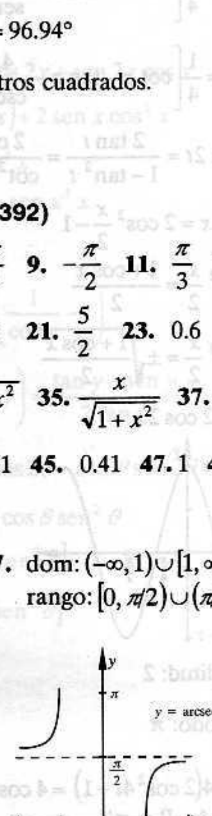
39. $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ **41.** 0.54 **43.** 1.51 **45.** 0.41 **47.** 1 **49.** 0.20

51. 2.59 **53.** 0.99

55. dom: $(-\infty,\infty)$
rango: $(0,\pi)$

57. dom: $(-\infty,1)\cup[1,\infty)$
rango: $[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$

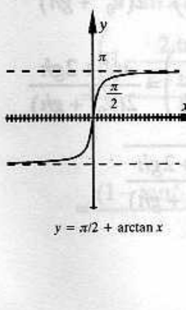




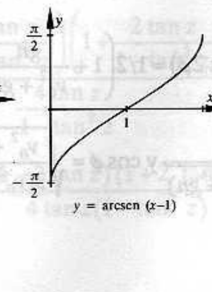
59. $\frac{2\pi}{5}$ **61.** $-3+\pi$ **63.** $4/9\sqrt{5}$ **65.** -2 **67.** 27.24 **69.** 0.15

71. $\frac{5x}{6x^2-1}$ **73.** $\frac{\sqrt{25x^2-1}\sqrt{9x^2-1}}{15x^2}$

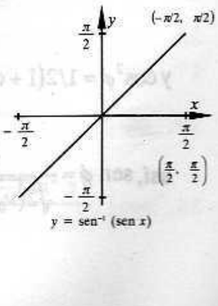
75. **77.** **79.**



$y=\pi/2+\arctan x$

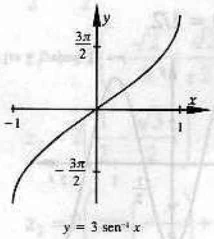


$y=\text{arcsen}\,(x-1)$

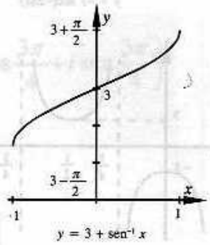


$y=\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,x)$

81.



83.



85. **(a)** $\forall\, x \in \Re$ **(b)** $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

87. $\cot(\arctan x + \text{arccot}\, x)$

$$= \frac{1}{\tan(\arctan x + \text{arccot}\, x)} = \frac{1 - \frac{\tan(\arctan x)}{\cot(\arctan x)}}{\tan(\arctan x) + \tan(\text{arccot}\, x)}$$

$$= \frac{1-1}{x + \frac{1}{x}} = 0$$

$$\cot\frac{\pi}{2} = 0$$

89. $y = \text{arcsen}\, x \qquad z = \text{arcsec}\, 1/x$

$\text{sen}\, y = x \qquad \csc z = 1/x$

$$\frac{1}{\text{sen}\, z} = \frac{1}{x}$$

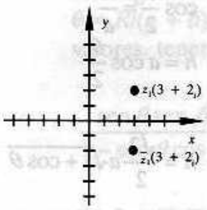
$\therefore y = z \qquad \text{sen}\, z = x$

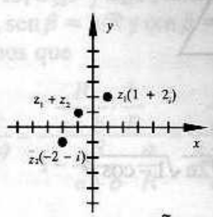
91. 1.33 **93.** 0.98 **95.** 1.93 **97.** $\theta = 0.013, \theta = 3.117$

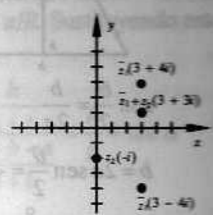
99. 0.1 **101.** $= 0.54$

EJERCICIO 7.10 (páginas 399-400)

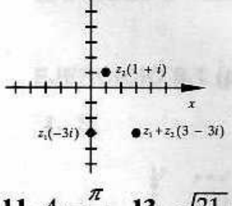
1. $\bar{z}_1 = 3 - 2i$ **3.** $z_1 + z_2 = -1 + i$ **5.** $\bar{z}_1 + z_2 = 3 + 3i$

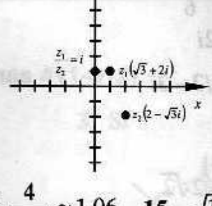






7. $z_1 \cdot z_2 = 3 - 3i$ **9.** $\frac{z_1}{z_2} = i$





11. $4, -\frac{\pi}{6}$ **13.** $\sqrt{21}, \tan^{-1}\frac{4}{\sqrt{15}} \approx 1.06$ **15.** $\sqrt{10},\ 2.82$

17. $4, -\frac{\pi}{2}$ **19.** 16, 0 **21.** $\sqrt{31},\ 4.26$

23. $7\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ **25.** $12\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

27. $5(\cos(2.21) + i\,\text{sen}(2.21))$ **29.** $2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

31. $\sqrt{27}(\cos(-0.96) + i\,\text{sen}(-0.96))$ **33.** $0 - 2i$ **35.** $\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

37. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **39.** $\frac{3}{10} + \frac{3\sqrt{3}}{10}i$ **41.** $\frac{30}{\sqrt{29}} + \frac{12}{\sqrt{29}}i$

43. $z_1 \cdot z_2 = 6$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 12\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

45. $z_1 \cdot z_2 = \frac{16}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

47. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{6}\right);\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

49. $2.08 + (11.82)i$ **51.** $-6\sqrt{3} - 6i$

53. Sea $z = x + iy \quad \bar{z} = x - iy \quad \therefore |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$\sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

55. 1 **57.** $-16\sqrt{3} + 16i$ **59.** 8 **61.** -64 **63.** $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

65. $-2 + 2\sqrt{3}i$ **67.** $\frac{625}{2} + \frac{625\sqrt{3}}{2}i$

69. $1,\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

71. $2\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{16}\right),\ 2\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{9\pi}{16}\right),$

$2\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{17\pi}{16}\right),\ 2\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{25\pi}{16}\right),$

73. $2^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right);\ 2^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right);\ 2^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right);\ 2^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

75. $5\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right);\ -5,\ 5\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

77. $(\cos 55° + i\,\text{sen}\, 55°);\ (\cos 115° + i\,\text{sen}\, 115°),$

$(\cos 175° + i\,\text{sen}\, 175°);\ (\cos 235° + i\,\text{sen}\, 235°);$

$(\cos 295° + i\,\text{sen}\, 295°);\ (\cos 355° + i\,\text{sen}\, 355°)$

79. $\left(z - \left(\sqrt{2} + i\sqrt{6}\right)\right)\left(z + \left(\sqrt{2} + i\sqrt{6}\right)\right)$

81. Para que sea igual a 1, $n = 12k;\ k \in z$

Para que sea igual a -1, $n = 6(2k+1);\ k \in z$

Para que sea igual a i, $n = 3 + 12k;\ k \in z$

Para que sea igual a $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $n = 2 + 12k;\ k \in z$

Para que sea igual a $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $n = 7 + 12k;\ k \in z$

83. $\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$

85. Sea $z = r\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta$. Entonces,

$$z^{-n} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r[\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta]}$$
$$= r^{-n}\frac{1}{[\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta]}\left(\frac{\cos n\theta - i\,\text{sen}\,\theta}{\cos n\theta - i\,\text{sen}\,\theta}\right)$$
$$= r^{-n}\left(\frac{\cos n\theta - i\,\text{sen}\,\theta}{\cos n\theta - i\,\text{sen}\,\theta}\right) = r^{-n}(\cos n\theta - i\,\text{sen}\,n\theta)$$
$$= r^{-n}[(\cos(-n\theta) - i\,\text{sen}\,(-n\theta))]$$

87. **(a)** Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$. Entonces,

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right],\quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ya que $\left|z^{1/n}\right| = r^{1/n}$, z está en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en el origen.

(b) Sea $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$. Entonces, cualquier par de raíces n–ésimas sucesivas son de la forma

$$r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2j\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2j\pi}{n}\right)\right] \text{ y}$$
$$r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2(j+1)\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2(j+1)\pi}{n}\right)\right],$$

donde $j = 0, 1, 2, \ldots, n = 2$. La diferencia entre los argumentos de estas dos raíces es

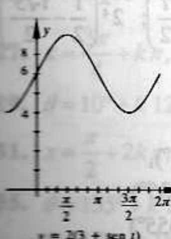
$$\left(\frac{\theta+2(j+1)\pi}{n}\right) - \left(\frac{\theta+2j\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n}.$$

Ya que 2π es la medida en radianes de una rotación completa, las raíces n n-ésimas son equidistantes sobre la circunferencia.

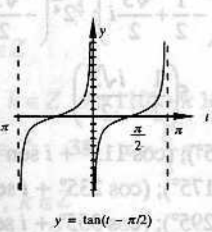
EJERCICIO DE REPASO (páginas 401-403)

1. V **3.** F **5.** V **7.** F **9.** F

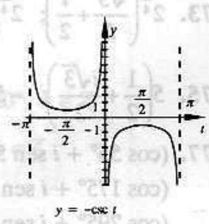
11.



13.

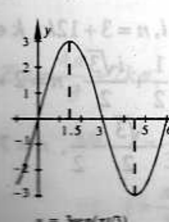


15.

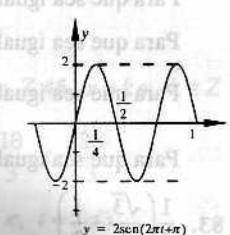


17.

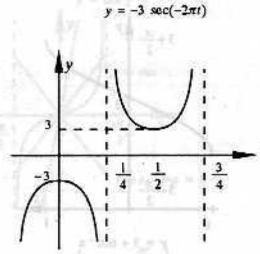
19. $A = 3$
$P = 6$
$D = 0$



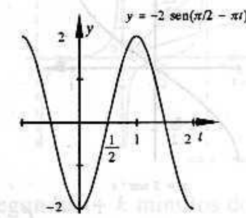
21. $A = 2$
$P = 1$
$D = -1/2$



23.



25. $A = 2$
$P = 2$
$D = 1/2$



27. $1/2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ **29.** $2-\sqrt{3}$ **31.** $-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$ **33.** $1/4$

35. $\text{sen}\,\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{7}}{6}}$ $\cos\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{6}}$ $\tan\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}}$

$\text{sen}\,2t = -\frac{2\sqrt{14}}{9}$ $\cos 2t = \frac{5}{9}$ $\tan 2t = -\frac{2\sqrt{14}}{5}$

37. $\cos^2 x \csc x = \left(1-\text{sen}^2 x\right)\csc x = \csc x - \text{sen}\,x$

39. $\frac{\cot^2\alpha}{\csc\alpha+1} = \frac{\csc^2\alpha-1}{\csc\alpha+1} = \frac{(\csc\alpha-1)(\csc\alpha+1)}{\csc\alpha+1} = \csc\alpha - 1$

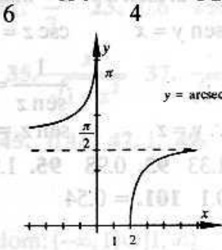
41. Haciendo $x = 0$ $0 \neq 1$ **43.** $\theta = 135° + k\,180°$ $k \in z$

45. $x = \pi/2 + 2k\pi$ $k \in z$ **47.** $\frac{7\pi}{6}$ **49.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$ **51.** 0

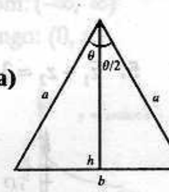
53. $x^2 - 1$

55. $x = -\frac{\pi}{2}$
$x = \frac{\pi}{2}$
$x = -0.167$

57.



59. **(a)**



$A = \frac{1}{2}bh = \frac{a^2}{2}\sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{a^2\,\text{sen}\,\theta}{2}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{h}{a}$

$h = a\cos\frac{\theta}{2}$

$\text{sen}\,\frac{\theta}{2} = \frac{b}{2a}$

$b = 2a\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2} = \sqrt{2a}\sqrt{1-\cos\theta}$ $h = \frac{\sqrt{2}}{2}a\sqrt{1+\cos\theta}$

(b) $\text{sen}\,\theta = \frac{8}{16} = 1/2$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

61. $z_1 - z_2 = 2i$

$\bar{z}_1 \cdot z_2 = 3/2 - 3i$

$\frac{z_1}{z_2} = 1 + i$

63. $|-2+2i| = 2\sqrt{2}$

$-2+2i = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$ $\arg(-2+2i) = \frac{3\pi}{4}$

65. $\left|1-\sqrt{3}i\right| = 2$ $1-\sqrt{3}i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

67. $\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

69. $z_1=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$

$z_2=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$z_2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$z_1\cdot z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}\right)$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{13\pi}{12}\right)$

71. 16

73. $2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}\right),\ 2\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}\right),\ -2,$

$2\left(\cos\frac{7\pi}{5}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{5}\right),\ 2\left(\cos\frac{9\pi}{5}+i\operatorname{sen}\frac{9\pi}{5}\right)$

75. $\left(z-3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\right)\left(z-3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\right)(z+3i)$

77. $A=180+120\operatorname{sen}\phi-18\operatorname{sen}2\phi$ **79.** $39°<\theta<90°$

81. $A=2$ $\phi=\pi/6$

$b=\sqrt{\frac{g}{L}}$

83. (a) Sea PQ perpendicular a CS, como se muestra en la figura. Sean a, b y h las longitudes de CQ, CS y PQ, respectivamente. R es el radio de la Tierra. Entonces, de los triángulos rectángulos CAS, CQP y SQP, tenemos que $\tan\alpha=h/b$, sen $\theta=R/(a+b)$, sen $\beta=h/R$ y cos $\beta=a/R$. Sustituyendo estos valores, tenemos que

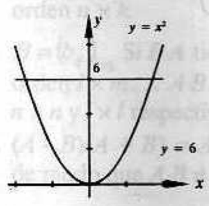
$$\frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\beta}{1-\operatorname{sen}\theta\cos\theta}=\frac{\frac{R}{a+b}\cdot\frac{h}{R}}{1-\frac{R}{a+b}\cdot\frac{a}{R}}=\frac{\frac{h}{a+b}}{\frac{a+b-a}{a+b}}=\frac{h}{b}=\tan\alpha$$

(b) $\beta=32.7°$

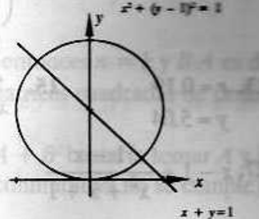
CAPITULO 8

EJERCICIO 8.1 (páginas 411-412)

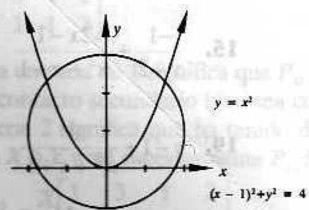
1. Sí



3. Sí



5. Sí



7. (−1, −2) **9.** (0, −3) **11.** (4, 2) (1, 1) **13.** $(3,\sqrt{3})$

15. (6, 1) **17.** (−3/2, 5/2)

19. (0, 0), (−2, 2), (2, 2), (3, 3), (−3, 3)

21. (0, 4), (0, −4), (2, 0), (−2, 0) **23.** (2, 1), (2, −1)

25. (0, −1), (9, 2) **27.** (0, 0), (−2, −4), (6, 12)

29. $(k\pi, 0), k\in Z$ **31.** $(1, \pi/6+k\pi); (1, 5\pi/6+k\pi); k\in Z$

33. $(e^{-6}, -6); (e, 1)$ **35.** (30, 70) **37.** (5, ln 5)

39. 50 y 100 **41.** 6 y 2

45. $r=3$ $h=12$ **43.** $a=\frac{20}{\sqrt{10\left(1+\sqrt{5}\right)}}$; $b=\sqrt{10\left(1+\sqrt{5}\right)}$

49. $x=0, y=\pm1, \lambda=0$

$x=\frac{2\sqrt{5}}{5}, y=\frac{\sqrt{5}}{5}, \lambda=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$x=-\frac{2\sqrt{5}}{5}, y=-\frac{\sqrt{5}}{5}, \lambda=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

47. $x=2, y=3, \lambda=-6$

$x=-2, y=-3, \lambda=6$

EJERCICIO 8.2 (páginas 420-422)

1. (3, −2) **3.** (14/5, 8/5)

5. (−1/7, 23/9) **7.** No tiene solución.

9. $\frac{11}{34}, \frac{21}{17}$ **11.** $\left(x, \frac{40+15x}{4}, 0\right); x\in\Re$

13. (−1, 5, −2) **15.** (4, 1, −1)

17. (0, 4/3, 2) **19.** (0, 2, 1)

21. (1, 6, −3) **23.** No tiene solución.

25. (−36, 54, 16, −4) **27.** (3, 2) **29.** $(10^{-7}, 10^{3})$

31. 112.82 litros al 28%
56.41 litros al 40%
30.77 litros al 45%

33. 20 de la X
80 de la Y
100 de la Z

35. $T_1=282$
$T_2=301$

37. 8 de US\$5
24 de US\$10
12 de US\$50

39. $a=1/2$
$b=-1/2$
$c=1$

41. (a) $t(x)=0.0000625x^2+0.0375x$
(b) Aproximadamente 5.5 min.

43. 12, A
6, B
2, C

45. (a) A = 3, B ≠ 30 **(b)** A = 3, B = 30 **(c)** A ≠ 3, B cualquiera

EJERCICIO 8.3 (página 426)

1. $\frac{1}{3x}-\frac{1}{3(x+3)}$ **3.** $\frac{6}{x-2}-\frac{5}{x-1}$ **5.** $\frac{-\frac{1}{6}}{x}+\frac{\frac{19}{15}}{x+3}+\frac{\frac{9}{10}}{x-2}$

7. $\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}$ **9.** $\frac{\frac{1}{2}}{x-2}+\frac{\frac{1}{2}}{x+2}$ **11.** $\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$

13. $\dfrac{\frac{7}{5}}{x-2}+\dfrac{-\frac{7}{5}x+\frac{1}{5}}{x^2+1}$ **15.** $\dfrac{-1}{x-2}+\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$

17. $\dfrac{\frac{1}{4}}{t-1}+\dfrac{\frac{1}{4}}{t+1}+\dfrac{-\frac{1}{2}t}{t^2+1}$ **19.** $x-1+\dfrac{1}{x^2+x+1}$

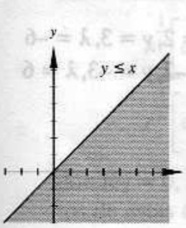
21. $1+\dfrac{\frac{1}{3}}{x-1}-\dfrac{\frac{4}{3}}{x+2}$ **23.** $x^3+4x+3+\dfrac{11}{x-2}+\dfrac{5}{x+2}$

25. $\dfrac{y}{y^2+1}$ **27.** $1+\dfrac{-3}{x+1}+\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{-1}{(x+1)^3}$

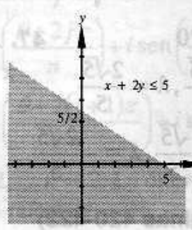
29. $\dfrac{3}{3+\cos t}-\dfrac{2}{2+\cos t}$

EJERCICIO 8.4 (páginas 430-431)

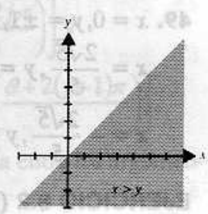
1.



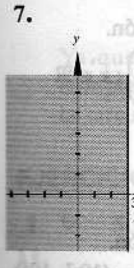
3.



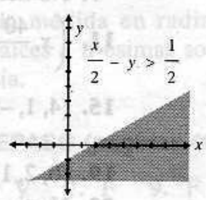
5.



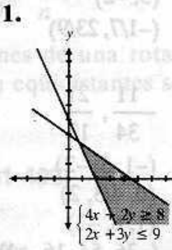
7.



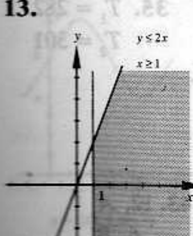
9.



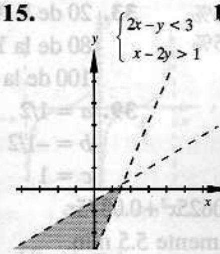
11.



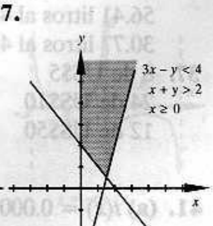
13.



15.

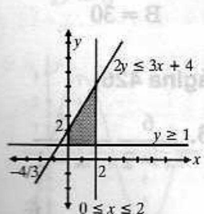


17.

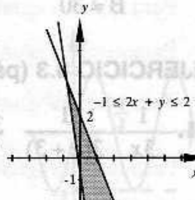


19.

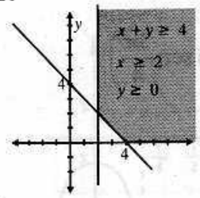
21.



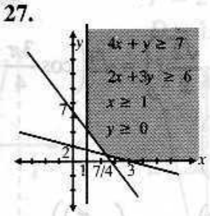
23.



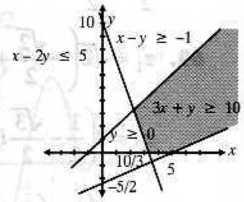
25.



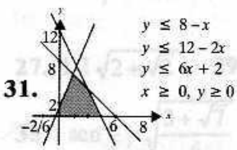
27.



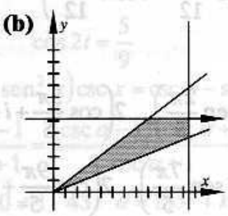
29.



31.



33. (a) $\begin{cases} y > 6\frac{1}{8} \\ x > 11\frac{1}{2} \\ x < 1.3y \\ x > 2.5y \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$ **(b)**



(c) No

EJERCICIO 8.5 (páginas 436-437)

1. max 19 en (3, 2)
min 0 en (0, 0)

3. max 3 en (1, 0)
min −16 en (0, 8)

5. max 40 en (0, 8)
min 0 en (0, 0)

7. max 16 en (0, 2)
min 1 en (1, 0)

9. max 21 en (5, 0)
min 9 en (0, 2)

11. max 20 en (0, 2)
min 4 en (2, 0)

13. max 11 en (5, 0)
min 2 en (0, 4)

15. max 86/9 en (28/9, 11/3)
min 35/3 en (10/3, 2)

17. 400 de 20′
200 de 27′ utilidad US$22,000

19. 10 de la marca X y 5 de la marca Y. Los costos mínimos por metro cuadrado serán de US$37.

21. Debe producir 13,000 con el material A.
2,000 con el material B.
10,000 con el material C.

23. 17 kg de plantas acuáticas y 16 kg de plantas terrestres.

EJERCICIO DE REPASO (páginas 438-439)

1. b = −2 **3.** V **5.** F **7.** F **9.** F

11. (10, 0); (2, 4) **13.** (5, −7), (6, 0) **15.** (1/10, −1)

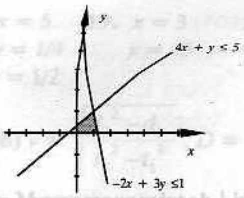
17. (1, 0, 0) **19.** $\left(\dfrac{75}{108}, \dfrac{11}{18}, \dfrac{5}{12}\right)$ **21.** 315

23. $r \approx 0.19$
$y \approx 5.04$

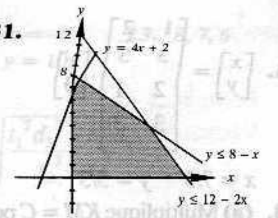
25. $\dfrac{\frac{1}{4}}{x^2}-\dfrac{\frac{1}{4}}{x^2+4}$

27. $x-1+\dfrac{1-x}{x^2+x+1}$

29.



31.



33. **(a)** max 810/7 en (6/7, 50/7) min 30 en (0, 2) **(b)** max 120 en (6, 4) min 35 en (2, 1)

35. 50 acres de maíz. 150 acres de avena. Ganancia máxima US$59,000.

CAPITULO 9

EJERCICIO 9.1 (página 445)

1. 2×2 **3.** 2×3 **5.** 3×4 **7.** 1×1 **9.** 7×8 **11.** 3 **13.** −8 **15.** 5

17. $\begin{bmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&6\end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix}2&4&6\\4&8&12\\6&12&18\end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix}-1&-4&-7\\1&-2&-5\\3&0&-3\end{bmatrix}$

23. No **25.** Sí **27.** $u=-1, x=2, v=0, y=-2, w=4, z=6$

29. $x=2; y=-6$ **31.** $x=0, y=-1, z=2$

EJERCICIO 9.2 (páginas 452-454)

1. $A+B=\begin{bmatrix}0&5\\5&10\\-1&4\end{bmatrix}$ $B-A=\begin{bmatrix}-2&1\\-1&2\\1&4\end{bmatrix}$ $2A-3B=\begin{bmatrix}5&-5\\0&-10\\-2&-12\end{bmatrix}$

3. $A+B=\begin{bmatrix}2&4&1\\1&3&2\\2&2&10\end{bmatrix}$ $B-A=\begin{bmatrix}-2&2&1\\1&1&-2\\-6&4&-2\end{bmatrix}$ $2A-3B=\begin{bmatrix}4&-7&-3\\-3&-4&4\\14&11&0\end{bmatrix}$

5. $A+B=[1\ -1]$
$B-A=[-1\ -1]$
$2A-3B=[2\ 3]$

7. $A+B=[277]$
$B-A=[-213]$
$2A-3B=[394]$

9. No se pueden determinar porque son de diferente orden.

11. $A{\cdot}B=\begin{bmatrix}-2&1\\-5&2\end{bmatrix}$ $B{\cdot}A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$

13. $A{\cdot}B=\begin{bmatrix}-1&12&2\\5&-4&-2\\-8&12&4\end{bmatrix}$ $B{\cdot}A=\begin{bmatrix}5&-2\\-3&-6\end{bmatrix}$

15. No se puede $A{\cdot}B$ ni $B{\cdot}A$ **17.** $A\cdot B$ no se puede $B\cdot A\begin{bmatrix}-1&1\\-2&2\\-3&3\end{bmatrix}$

19. $A\cdot B\begin{bmatrix}0&0\\-1&2\end{bmatrix}$; $B\cdot A=[2]$ **21.** $3\times n$ **23.** 2×4

29. Sea $A=(a_{ij})_{n\times m}$ Si $A{\cdot}B$ tiene sentido, $m=l$ y $A{\cdot}B$ es de orden $n\times k$.
$B=(b_{ij})_{l\times k}$ Si $B{\cdot}A$ tiene sentido, entonces $n=k$ y $B{\cdot}A$ es de orden $l\times m$. $\therefore$ $A{\cdot}B$ y $B{\cdot}A$ son matrices cuadradas de orden $n\times n$ y $l\times l$ respectivamente.

31. $(A-B)(A+B)=A^2+AB-BA+B^2$ bastaría tomar A y B de modo que $A{\cdot}B\neq B{\cdot}A$ (la ley conmutativa no se cumple).

33. $\begin{bmatrix}1&3&1&2\\1&1&1&2\end{bmatrix}$

Una entrada de 1 significa que P_5, P_6, P_7 y P_8 sólo ha tenido un contacto secundario bien sea con X o con Y. Una entrada con 2 significa que ha tenido dos contactos secundarios con X o Y y así sucesivamente P_5, P_6, P_7, P_8.

35. $A\cdot B=\begin{array}{c}X\\Y\end{array}\begin{bmatrix}1&3&1&2\\1&1&1&2\end{bmatrix}$

Cada entrada indica la cantidad de contactos que puede tener X o Y a través P_1, P_2, P_3 y P_4 con P_5, P_6, P_7 y P_8.

37. $\begin{bmatrix}120&20\\144&24\\288&48\end{bmatrix}$

Las tres entradas en la primera columna representan (en dólares) el impuesto estatal a las ventas pagado por el almacén minorista por todos los amplificadores, radios y micrófonos, respectivamente. Las entradas de la segunda columna representan el impuesto a las ventas de la ciudad pagado por el almacén minorista por los amplificadores, radios y micrófonos respectivamente.

39. $\begin{bmatrix}950&475&380\\760&190&475\\1900&570&190\\950&950&950\end{bmatrix}$

EJERCICIO 9.3 (páginas 460-461)

1. $M_{11}=2,\ A_{11}=2,\ M_{12}=3,\ A_{12}=-3,\ M_{21}=0,\ A_{21}=0$
$M_{22}=-1,\ A_{22}=-1$

3. $M_{11}=-9, M_{21}=-3, M_{31}=-15, M_{12}=-3, M_{22}=-2, M_{32}=2$
$M_{13}=3, M_{23}=2, M_{33}=7, A_{11}=-9, A_{21}=3, A_{31}=-15$
$A_{12}=3, A_{22}=-2, A_{32}=-2, A_{13}=3, A_{23}=-2, A_{33}=7$

5. −2 **7.** 6 **9.** c^2+d^2 **11.** 6 **13.** 5 **15.** −22 **17.** $abcd$

19. Propiedad *ii*, teorema 2 **21.** Propiedad *i*, teorema 2

23. Propiedad *v*, teorema 2 **25.** Propiedad *iv*, teorema 2

27. $\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&3\\-3&-1&2\end{vmatrix}=9$

29. $\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&-7&16&6\\0&3&1&4\\1&2&-3&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&-7&16\\0&3&8\\1&2&-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-7&16\\3&8\end{vmatrix}=104$

31. $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$ $\begin{vmatrix}c&d\\a&b\end{vmatrix}=bc-ad$ **33.** $\begin{vmatrix}a&a\\b&b\end{vmatrix}=ab-ab=0$

35. $\begin{vmatrix}a&a^2&1\\b&b^2&1\\c&c^2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&a^2&1\\b-a&b^2-a^2&0\\c-a&c^2-a^2&0\end{vmatrix}$

$=(b-a)(c^2-a^2)-(c-a)(b^2-a^2)$

$=(b-a)(c-a)[c+a-(b+a)]$

$=[b-a][c-a](c-b)=[-(a-b)][-(b-c)](c-a)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$

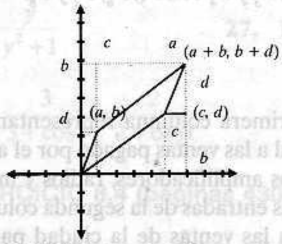
37. $|A-\lambda I_2|=\begin{bmatrix}1-\lambda&3\\2&-1-\lambda\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow\lambda\pm\sqrt{7}$

39. $|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$\lambda_3 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$

41.



Base $= \sqrt{c^2 + d^2}$

Altura $= \dfrac{ad - bc}{\sqrt{c^2 + d^2}}$

Área = Base × altı

$= da - bc$

$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

EJERCICIO 9.4 (páginas 467-468)

1. $1/5\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **3.** $-1/2\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **5.** $\dfrac{1}{2c^2}\begin{bmatrix} c & c \\ -c & c \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $-\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & -5 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ **11.** $\dfrac{1}{60}\begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **15.** Matriz singular, no existe A^{-1}.

17. $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

21. Matriz singular, no existe A^{-1}. **23.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

25. $(B^{-1}A^{-1})(A \cdot B) = B^{-1}(A^{-1}A)B$
$= B^{-1}(I)B$
$= B^{-1}B$
$= I$

$(A \cdot B)\,(B^{-1}A^{-1})$ es similar.

27. $(IA)^{-1} = A^{-1}$ $\quad (AI)^{-1} = A^{-1}$
$(AA^{-1}A)^{-1} = A^{-1}$ $\quad (A(AA^{-1}))^{-1} = A^{-1}$
$A^{-1}(AA^{-1})^{-1} = A^{-1}$ y $\quad (AA^{-1})^{-1}A^{-1} = A^{-1}$
$A^{-1}(A^{-1})^{-1}A^{-1} = A^{-1}$ $\quad (A^{-1})^{-1}A^{-1}A^{-1} = A^{-1}$
$A^{-1}(A^{-1})^{-1} = I$ $\quad (A^{-1})^{-1}A^{-1} = I$
$\therefore (A^{-1})^{-1} = A$

29. $1 = |I| = |AA^{-1}| = |A|\,|A^{-1}| \therefore |A^{-1}| = 1/|A|$

31. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$x = 7/3 \quad y = 5/3$

33. **(a)** Multiplique $KM = C$ por K^{-1} | de tal manera que $M = k^{-1}C$.

(b) $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 16 \\ 1 & 20 & 9 \\ 5 & 14 & 20 \end{bmatrix}$, lo cual significa "Be patient".

EJERCICIO 9.5 (páginas 473-474)

1. $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 21 \end{array}\right]$ **3.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

5. $x = 4$, $y = -1$ **7.** $x = 10/7$, $y = 9/7$ **9.** $x = 2$, $y = -1$, $z = -1$ **11.** $x = \dfrac{23}{10}$, $y = -\dfrac{1}{10}$, $z = \dfrac{2}{5}$

13. $x = 1$, $y = 0$, $z = -3$ **15.** $x = -3$, $y = 4$, $z = 8$

17. Incompatible, no tiene solución. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

19. $x = 1$, $y = 6$, $z = 6$ **21.** $x = \dfrac{1}{5}$, $y = -\dfrac{6}{5}$, $z = -\dfrac{3}{5}$

23. Incompatible, no tiene solución. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & -13 \\ 0 & -9 & 6 & -15 \end{array}\right)$

25. $x = 10$, $y = -14$, $z = 14$, $w = -3$ **27.** $x = 1/6$, $y = 9/2$, $z = -20/3$, $w = 31/6$ **29.** $x = \dfrac{5}{2} + t$, $y = -\dfrac{1}{2}$

31. No tiene solución.

33. $5S + 6NO_3H + 2H_2O \rightarrow 5SO_4H_2 + 3N_2$

35. $a = 12$, $b = -45$, $c = 32$ **37.** $x = -8$, $y = 5$, $z = 14$, $w = -12$ **39.** 24 ganan US\$8, 48 ganan US\$5, 28 ganan US\$4

EJERCICIO 9.6 (páginas 477-478)

1. $x = 4$, $y = -3$ **3.** $x = 2$, $y = 7$ **5.** $x = -5/3$, $y = -5/3$ **7.** $x = 4$, $y = -4$, $z = -5$

9. $x = 4$, $y = 1$, $z = 2$ **11.** $x = 1/4$, $y = 3/4$, $z = 1$ **13.** $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$, $w = 2$ **15.** $x = 1$, $y = -2$, $z = 0$

17. $x = 5$, $y = 1/4$, $z = 1/2$ **19.** $x = 3$, $y = -5$ **21.** $x = -6$, $y = 10$ **23.** 8, 7, 6

25. **(b)** $v = \sqrt{\dfrac{d_2^{\,2} - d_1}{t_2^{\,2} - t_1^{\,2}}}$, $D = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{t_1^{\,2} d_2^{\,2} - t_2^{\,2} d_1}{t_2^{\,2} - t_1^{\,2}}}$;

(c) 947.9 m, 1,531 m/s.

EJERCICIO 9.7 (página 482)

1. $x = 2$, $y = -1$ **3.** $x = 1/2$, $y = -1/3$ **5.** $x = -3/11$, $y = 13/22$ **7.** $x = 3$, $y = 1$, $z = 4$

9. $x = 1/2$, $y = 1/4$, $z = 5$ **11.** $x = 5$, $y = -1/2$, $z = -15/2$ **13.** $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$, $w = 0$

15. Multiplicando cada miembro de cada ecuación por el m.c.m. de los coeficientes obtenemos ecuaciones donde todos los coeficientes son enteros. Luego, cada determinante que interviene en las soluciones dadas por Cramer es un número entero; luego si el sistema es compatible, las soluciones son racionales.

EJERCICIO DE REPASO (páginas 482-484)

1. V **3.** 28 **5.** 5/3 **7.** V **9.** 5×2

11. $x = \dfrac{10}{17}$ $y = \dfrac{1}{17}$ $z = \dfrac{41}{17}$ $w = -\dfrac{1}{17}$

13. $A \cdot B = \begin{bmatrix} -12 & -16 \\ -26 & -36 \end{bmatrix}$ $B \cdot A = \begin{bmatrix} -14 & -20 \\ -23 & -34 \end{bmatrix}$

15. $A_{11} = 9$, $A_{21} = 12$, $A_{31} = -13$, $A_{12} = -8$, $A_{22} = 2$, $A_{32} = 1$
$A_{13} = 1$, $A_{23} = -5$, $A_{33} = 7$

17. $e[ad - bc]$

19. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\dfrac{3}{2} \\ -3 & \dfrac{5}{2} \end{bmatrix}$ **21.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & \dfrac{3}{2} \\ -2 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$

23. $x = -1/7$, $y = 2/7$ **25.** $x = 6/11$, $y = 15/11$, $z = 17/11$ **27.** $x = 6$, $y = 6$

29. $S = \{2, -2\}$ $A^{-1} = \dfrac{1}{2x^2 - 8}\begin{bmatrix} 2x & 4 & -4 \\ 0 & x^2 - 4 & 0 \\ -4 & -2x & 2x \end{bmatrix}$

31. $A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{17} & -\dfrac{3}{17} \\ -\dfrac{5}{17} & \dfrac{2}{17} \end{bmatrix}$ **33.** 80 lt de A 70 lt de B 50 lt de C

35. $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$A^2 = A \cdot A \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

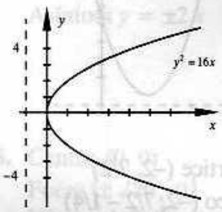
$A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

37. $\alpha = 110°$, $\beta = 50°$, $\theta = 80°$, $\gamma = 20°$

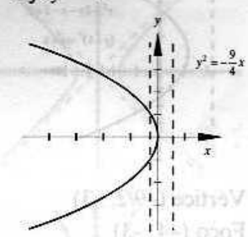
CAPITULO 10

EJERCICIO 10.1 (páginas 493-494)

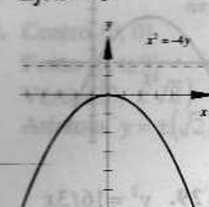
1. Vértice (0, 0)
Foco (2, 0)
Directriz $x = -2$
Eje $y = 0$



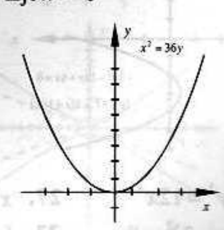
3. Vértice (0, 0)
Foco (−9/16, 0)
Directriz $x = 9/16$
Eje $y = 0$



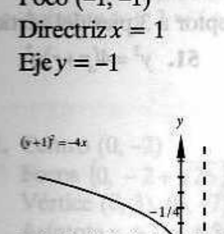
5. Vértice (0, 0)
Foco (0, −1)
Directriz $y = 1$
Eje $x = 0$



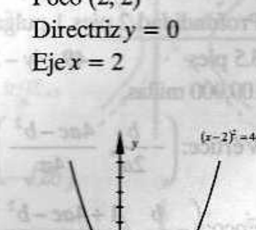
7. Vértice (0, 0)
Foco (0, 9)
Directriz $y = -9$
Eje $x = 0$



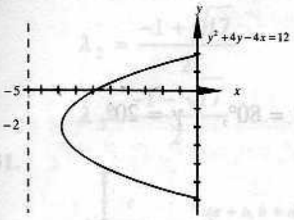
9. Vértice (0, −1)
Foco (−1, −1)
Directriz $x = 1$
Eje $y = -1$



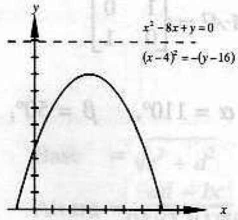
11. Vértice (2, 1)
Foco (2, 2)
Directriz $y = 0$
Eje $x = 2$



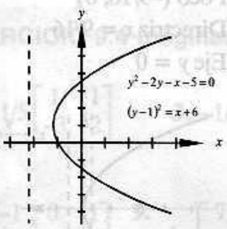
13. Vértice (–4, –2)
Foco (–3, –2)
Directriz $x = -5$
Eje $y = -2$



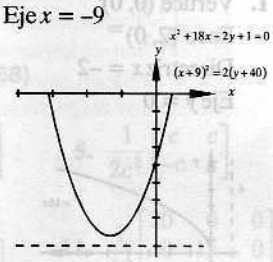
15. Vértice (4, 16)
Foco (4, 16 – 1/4)
Directriz $y = 16 + 1/4$
Eje $x = 4$



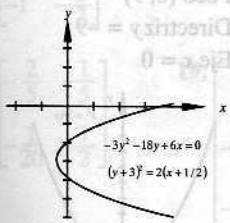
17. Vértice (–6, 1)
Foco (–6 + 1/4, 1)
Directriz $x = -6 - 1/4$
Eje $y = 1$



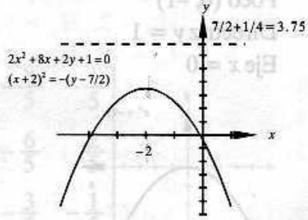
19. Vértice (–9, –40)
Foco (–9, –40 + 1/2)
Directriz $y = -40 - 1/2$
Eje $x = -9$



21. Vértice (–9/2, –3)
Foco (–4, –3)
Directriz $x = -5$
Eje $y = -3$



23. Vértice (–2, 7/2)
Foco (–2, 7/2 – 1/4)
Directriz $y = 7/2 + 1/4$
Eje $x = 2$



25. $y^2=12x$ **27.** $x^2=-4y$ **29.** $y^2=16/3x$
31. $(x-3)^2=8y$ **33.** $(y-3)^2=-4x$ **35.** $(y+2)^2=8(x-1)$
37. $(y+1)^2=-8(x+1)$ **39.** $x^2=-6y$
41. $(x-1)^2=8(y+1)$ **43.** $y^2=-16x$
45. Profundidad 2 pies 1 pulgada, receptor a 3 pies del vértice.
47. 3.5 pies **49.** $4y-3x=15$ **51.** $y^2=4(p+r)x^2$
59. 100,000 millas.
61. Vértice: $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$

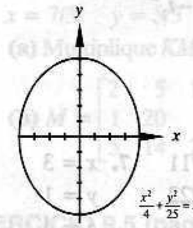
Foco: $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{1+4ac-b^2}{4a}\right)$

Directriz: $y=\dfrac{4ac-b^2-1}{4a}$

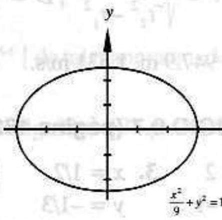
Eje: $x=-\dfrac{b}{2a}$

EJERCICIO 10.2 (páginas 500-501)

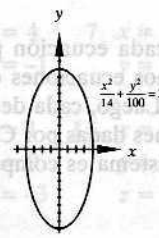
1. Centro (0, 0)
Focos $\left(0,\ \pm\sqrt{21}\right)$
Vértice (0, ±5)



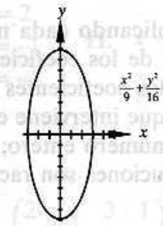
3. Centro (0, 0)
Focos $\left(\pm\sqrt{8},\ 0\right)$
Vértice (±3, 0)



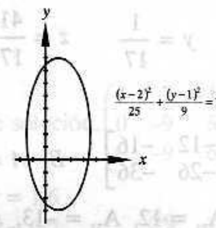
5. Centro (0, 0)
Focos $\left(0,\ \pm\sqrt{84}\right)$
Vértice (0, ±10)



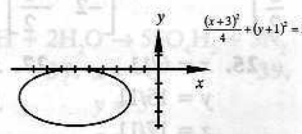
7. Centro (0, 0)
Focos $\left(0,\ \pm\sqrt{7}\right)$
Vértice (0, ±4)



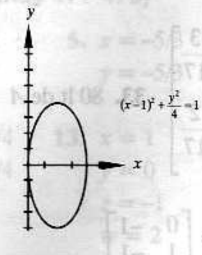
9. Centro (2, 1)
Focos (6, 1), (–2, 1)
Vértice (7, 1), (–3, 1)



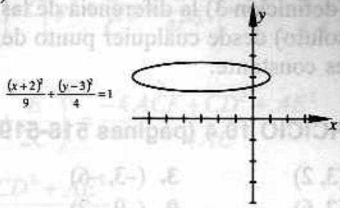
11. Centro (–3, –1)
Focos $\left(-3+\sqrt{3},\ -1\right),\ \left(-3-\sqrt{3},\ -1\right)$
Vértice (–1, –1), (–5, –1)



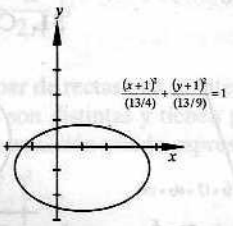
13. Centro (1, 0)
Focos $\left(1,\ \pm\sqrt{3}\right)$
Vértice (1, ±2)



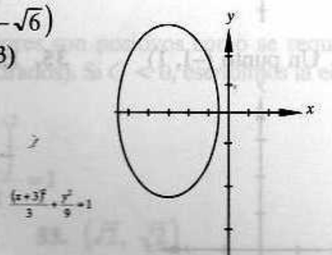
15. Centro (2, –3)
Focos $\left(-2-\sqrt{5},\ 3\right)$, $\left(2+\sqrt{5},\ 3\right)$
Vértice (1, 3), (–5, 3)



17. Centro (1, –1)
Focos $\left(1+\sqrt{65}/6,\ -1\right)$, $\left(1-\sqrt{65}/6,\ -1\right)$
Vértices $\left(1+\sqrt{13}/2,\ -1\right)$, $\left(1-\sqrt{13}/2,\ -1\right)$



19. Centro (–3, 0)
Focos $\left(-3,\ \sqrt{6}\right)$, $\left(-3,\ -\sqrt{6}\right)$
Vértices (–3, 3), (–3, –3)



21. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ **23.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ **25.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1$

27. $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ **29.** $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$ **31.** $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{16}=1$

33. $\frac{x^2}{92+\sqrt{7440}}+\frac{y^2}{76+\sqrt{7440}}=1$ **35.** $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

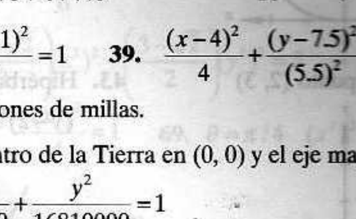
37. $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{7}=1$ **39.** $\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-7.5)^2}{(5.5)^2}=1$

41. Aprox. 1.6 millones de millas.

43. Situando el centro de la Tierra en (0, 0) y el eje mayor en el eje x. $\frac{x^2}{24010000}+\frac{y^2}{16810000}=1$

45. Aprox. 7.84 metros.

47. La longitud de la cuerda será de 5 pies y las tachuelas deben situarse a 1.5 pies del centro sobre el segmento horizontal que pasa por el centro de 5 pies de longitud.

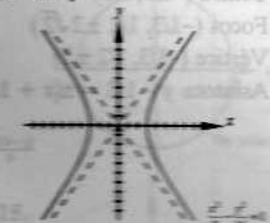


49. En el eje mayor a $2\sqrt{19}$ pies a la derecha e izquierda a su centro.

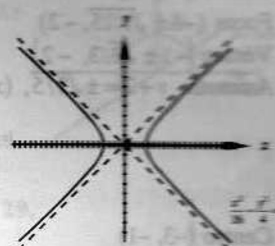
51. **(a)** 9/2
(b) $\frac{a^2-b^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $y^2=\frac{b^4}{a^2}$ $y=\frac{b^2}{a}$
ancho focal: $2b^2/a$

EJERCICIO 10.3 (páginas 510-512)

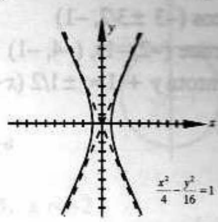
1. Centro (0, 0)
Focos (±5, 0)
Vértice (±3, 0)
Asíntota $y = \pm 4/3\,x$



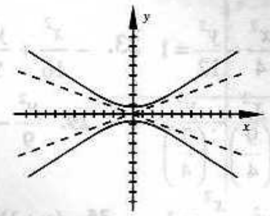
3. Centro (0, 0)
Focos $(\pm\sqrt{20}, 0)$
Vértice (±4, 0)
Asíntota $y = \pm 2\,x$



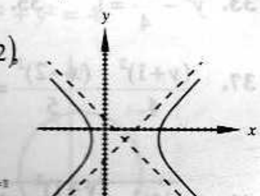
5. Centro (0, 0)
Focos $\left(\pm\sqrt{20},\ 0\right)$
Vértice (±2, 0)
Asíntota $y = \pm 4\,x$



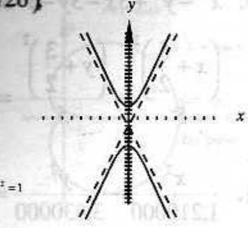
7. Centro (0, 0)
Focos (0, ±3)
Vértice $\left(0,\ \pm\sqrt{3}\right)$
Asíntota $y=\pm\left(\sqrt{2}/2\right)x$



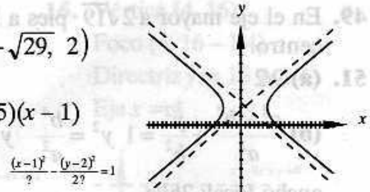
9. Centro (3, –2)
Focos $\left(3+\sqrt{61},\ -2\right)$, $\left(3-\sqrt{61},\ -2\right)$
Vértice (8, –2), (–2, –2)
Asíntota $y + 2 = (\pm 6/5)(x - 3)$



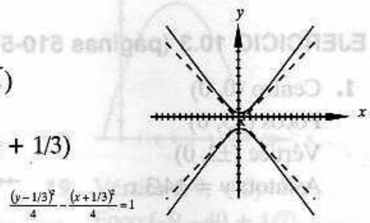
11. Centro (0, –2)
Focos $\left(0,\ -2+\sqrt{26}\right)$, $\left(0,\ -2-\sqrt{26}\right)$
Vértice (0, 3), (0, –7)
Asíntota $y + 2 = \pm 5x$



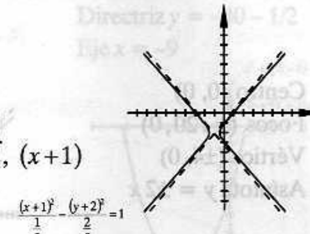
13. Centro (1, 2)
Focos $(1+\sqrt{29},\ 2)$, $(1-\sqrt{29},\ 2)$
Vértice (6, 2), (–4, 2)
Asíntota $y-2=(\pm 2/5)(x-1)$



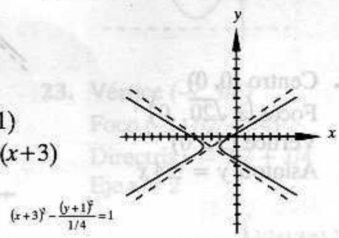
15. Centro (–1/3, 1/2)
Focos $(-1/3,\ 1/2 \pm 2\sqrt{2})$
Vértice (–1/3, 1/2 ± 2)
Asíntota $y-1/2=\pm(x+1/3)$



17. Centro (–1, –2)
Focos $(-1\pm\sqrt{1/15},\ -2)$
Vértice $(-1\pm\sqrt{3}/3,\ -2)$
Asíntota: $y+2=\pm\sqrt{2/5},\ (x+1)$



19. Centro (–3, –1)
Focos (–3 ±3/2, –1)
Vértice (–2, –1), (–4, –1)
Asíntota $y+1=\pm 1/2\,(x+3)$



21. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ **23.** $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ **25.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

27. $\frac{x^2}{\left(\frac{9}{4}\right)}-\frac{y^2}{\left(\frac{7}{4}\right)}=1$ **29.** $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$ **31.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$

33. $y^2-\frac{x^2}{4}=1$ **35.** $(y+1)^2-\frac{(x-2)^2}{3}=1$

37. $\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{5}=1$ **39.** $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{8}=1$

41. $(x-3)^2-\frac{(y+1)^2}{4}=1$ **45.** $y=\frac{2(x-\sqrt{7})}{3+\sqrt{7}}$ **47.** 32/3

49. $x^2-y^2+5x-3y-1$ se transforma en

$$\frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}{5}-\frac{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}{5}=1$$ $\therefore y=\pm x$ son las asíntotas, las cuales son perpendiculares.

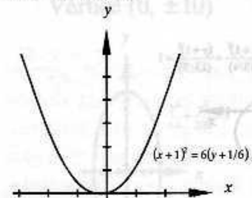
51. $\frac{x^2}{[illegible]}-\frac{y^2}{3{,}630000}=1$

53. En la definición de una elipse (definición 2), la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos es constante, mientras que en la definición de una hipérbola (definición 3) la diferencia de las distancias (en valor absoluto) desde cualquier punto de la hipérbola a los focos es constante.

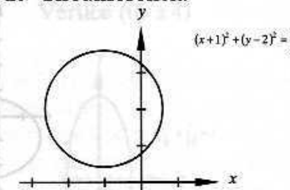
EJERCICIO 10.4 (páginas 518-519)

1. (3, 2) **3.** (–3, –6) **5.** (–3, 0)
7. (2, 6) **9.** (–9, –2) **11.** (–3, 4)
13. $X^2+Y^2=25$ **15.** $X^2+Y^2=9$ **17.** $X^2+Y^2=8$
19. $2X+3Y=0$ **21.** $(x+1)^2+(y+3)^2=36$
23. $(x+3)^2+(y-4)^2=1$ **25.** $3x-2y=10$
27. $a(x-h)+(y-k)+c=0$

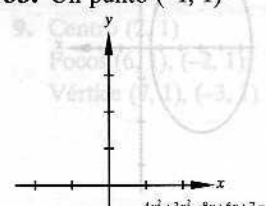
29. Parábola



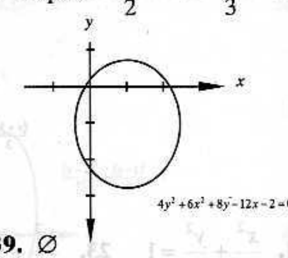
31. Circunferencia



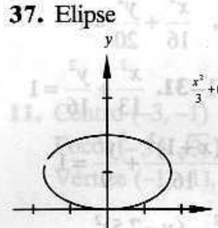
33. Un punto (–1, 1)



35. Elipse $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(y+1)^2}{3}=1$

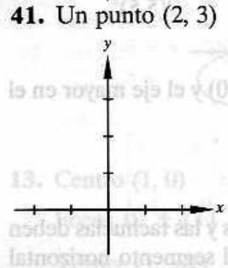


37. Elipse

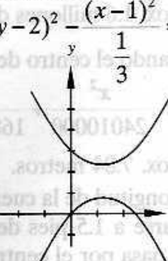


39. ∅

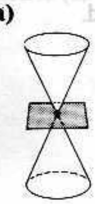
41. Un punto (2, 3)



43. Hipérbola
$(y-2)^2-\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{3}}=1$

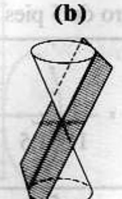


45. (a)



Punto

(b)



Recta

47. Suponga que $A > 0$ y $C < 0$ (el caso en el que $A < 0$ y $C > 0$ es similar). Al completar el cuadrado, tenemos que

$$A\left(x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2}\right)+C\left(y^2+\frac{E}{C}y+\frac{E^2}{4C^2}\right)=-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}$$

o

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\frac{-4ACF+CD^2+AE^2}{4AC}$$

sea $G=\dfrac{-4ACF+CD^2+AE^2}{4AC}$

Si $G = 0$ la ecuación se vuelve $A\left(x+\dfrac{D}{2A}\right)^2=-C\left(y+\dfrac{E}{2C}\right)^2$

o

$$y+\frac{E}{2C}=\pm\sqrt{\frac{A}{-C}}\left(x+\frac{D}{2A}\right),$$

la cual conforma un par de rectas que se intersecan. (Ya que $A \neq 0$, las dos rectas son distintas y tienen pendientes desiguales). Si $G > 0$, la ecuación puede expresarse así:

$$\frac{\left(x+\dfrac{D}{2A}\right)^2}{G/A}-\frac{\left(y+\dfrac{E}{2C}\right)^2}{-G/C}=1$$

donde los denominadores son positivos como se requiere (ya que deben ser cuadrados). Si $G < 0$, escribimos la ecuación así:

$$\frac{\left(y+\dfrac{E}{2C}\right)^2}{G/C}-\frac{\left(x+\dfrac{D}{2A}\right)^2}{-G/A}=1$$

51. $\left(1/2+2\sqrt{3},\ \sqrt{3}/2-2\right)$ **53.** $\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$

55. $\left(\dfrac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \dfrac{5\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$ **57.** $\dfrac{7}{12}(x^1)^2+16(y^1)^2=5$

59. $5(x^1)^2+(y^1)^2=5$ **61.** $\dfrac{(y^1)^2}{108}-\dfrac{(x^1)^2}{12}=1$

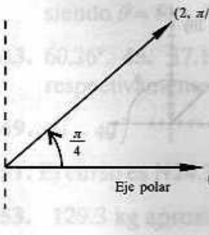
63. $\theta=\pi/6,\ \dfrac{(x^1)^2}{14}+\dfrac{(y^1)^2}{6}=1$

65. $\theta=\pi/8,\ \left(\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}\right)(x^1)^2+\left(\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}\right)(y^1)^2=5$

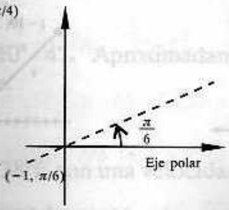
67. $\theta=\pi/6,\ (y^1)^2-\dfrac{(x^1)^2}{4}=1$ **69.** $\theta=\pi/4\ \ (x^1)^2=10$

EJERCICIO 10.5 (página 526)

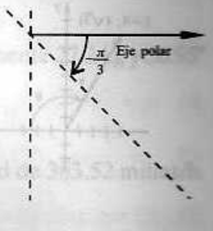
1.



3.



5.



7. **(a)** $(1,\ -7\pi/4)$ **(b)** $(1,\ 9\pi/4)$ **(c)** $(-1,\ 5\pi/4)$ **(d)** $(-1,\ -3\pi/4)$

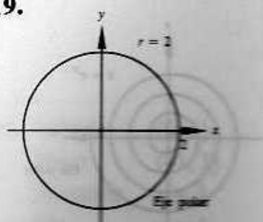
9. **(a)** $(3,\ -11\pi/6)$ **(b)** $(3,\ 13\pi/6)$ **(c)** $(-3,\ 7\pi/6)$ **(d)** $(-3,\ -5\pi/6)$

11. $\left(2,\ 2\sqrt{3}\right)$ **13.** $\left(-3/2,\ 3\sqrt{3}/2\right)$

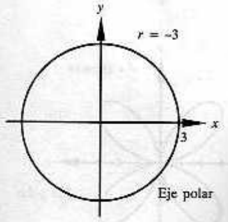
15. **(a)** $\left(4\sqrt{2},\ -3\pi/4\right)$ **(b)** $\left(-4\sqrt{2},\ \pi/4\right)$

17. **(a)** $(2,\ -\pi/6)$ **(b)** $(-2,\ 5\pi/6)$

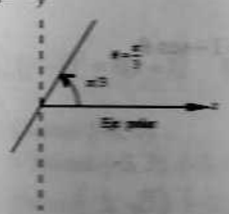
19.



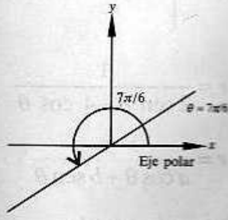
21.



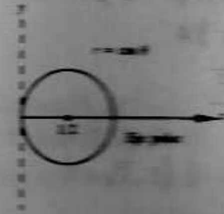
23.



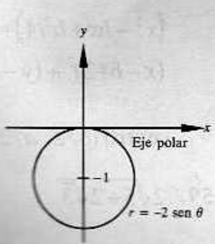
25.



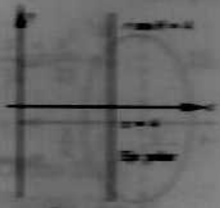
27.



29.



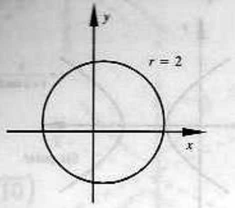
31. $x = 4$



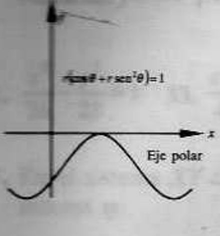
33. $x = -2$

35. $x = -4$

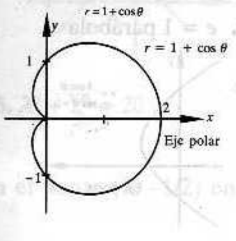
37. $x^2 + y^2 = 4$



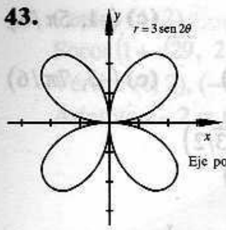
39. $y^2 = -(x-1)$



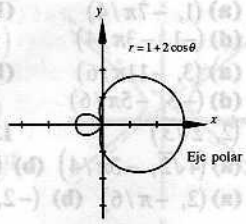
41.



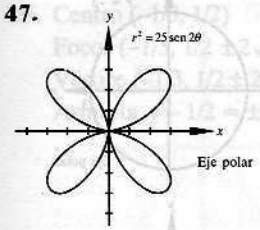
43.



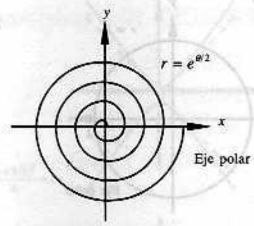
45.



47.



49.



51. $r = \dfrac{1}{2 \operatorname{sen} \theta - 4 \cos \theta}$ **53.** $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

55. $r = \dfrac{-c}{a\cos\theta + b \operatorname{sen}\theta}$

57. $x^2 + y^2 = ay + bx$

$(x^2 - bx + b^2/4) + (y^2 - ay + a^2/4) = (b^2 + a^2)/4$

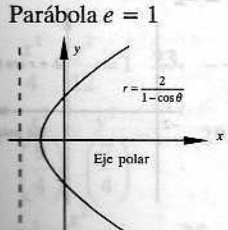
$(x - b/2)^2 + (y - a/2)^2 = (b^2 + a^2)/4$

centro $(b/2,\ a/2)$; $R = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

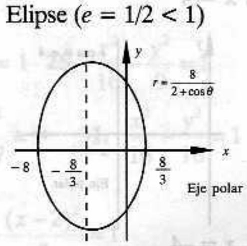
59. $2\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$

EJERCICIO 10.6 (página 531)

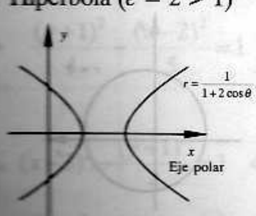
1. Parábola $e = 1$



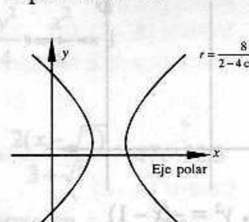
3. Elipse ($e = 1/2 < 1$)



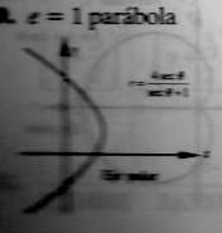
5. Hipérbola ($e = 2 > 1$)



7. Hipérbola $e = 2$



9. $e = 1$ parábola



11. $r = \dfrac{2}{1 + \operatorname{sen}\theta}$ **13.** $r = \dfrac{2}{3 - \cos\theta}$

15. $r = \dfrac{18}{1 + 3 \operatorname{sen}\theta}$ **17.** $\dfrac{\left(x - \frac{3}{8}\right)^2}{\frac{16}{4}} - \dfrac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$

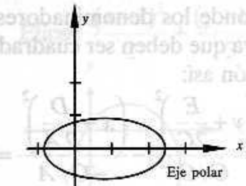
19. $r = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{27}{2}\right)}{1 - \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta}$ $e = \dfrac{2}{3}$ **21.** $r = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

$\dfrac{x^2}{\frac{(18)^2}{5}} + \dfrac{\left(y - \frac{36}{5}\right)^2}{\frac{9}{27}(18)^2} = 1$ **23.** $\dfrac{4}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ **25.** $r = \dfrac{\frac{2}{3}}{1 - \cos\theta}$

29. La excentricidad $e = c/a$. De la figura 91 y de la sección 10.2 tenemos que $a = 1/2(r_a + r_p)$ y $c = a - r_p = 1/2(r_a + r_p) - r_p = a = 1/2(r_a - r_p)$.
En consecuencia,
$e = c/a = a = 1/2(r_a - r_p)/1/2(r_a + r_p) = (r_a - r_p)/(r_a + r_p)$.

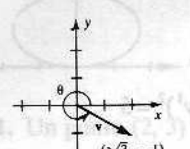
31. $r = \dfrac{80{,}000}{5 - \cos\theta}$ **33.** $r = \dfrac{0.7}{1 - 0.7\cos\theta}$

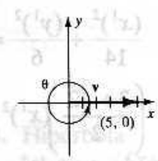
35. $r = \dfrac{4}{1 + \operatorname{sen}\theta}$, parábola



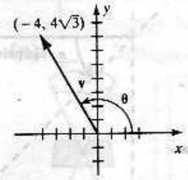
EJERCICIO 10.7 (páginas 537-538)

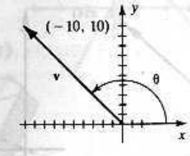
1. $|\mathbf{v}| = 2$, $\theta = \dfrac{11\pi}{6}$ **3.** $|\mathbf{v}| = 5$, $\theta = 2\pi$





5. $|\mathbf{v}| = 8$, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ **7.** $|\mathbf{v}| = 10\sqrt{2}$, $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$





9. $u+v=\langle 1,\ 6\rangle$
$u-v=\langle -3,\ -2\rangle$
$-3u=\langle 3,\ -6\rangle$
$3u-4v=\langle -11,\ -10\rangle$

11. $u+v=\langle -3,\ -2\rangle$
$u-v=\langle -1,\ 2\rangle$
$-3u=\langle 6,\ 0\rangle$
$3u-4v=\langle -2,\ 8\rangle$

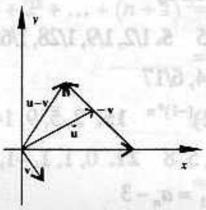
13. $u+v=\langle 1/3,\ 7/4\rangle$
$u-v=\langle 1/3,\ 9/4\rangle$
$-3u=\langle -1,\ -6\rangle$
$3u-4v=\langle 1,\ 7\rangle$

15. $u-4v=6\vec{i}-11\vec{j}$
$5u+2v=8\vec{i}-11\vec{j}$

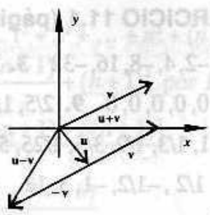
17. $u-4v=-3\vec{i}-\dfrac{11}{5}\vec{j}$
$5u+2v=-\dfrac{19}{2}\vec{i}$

19. $u-4v=-4\vec{i}-7.2\vec{j}$
$5u+2v=-20\vec{i}+8\vec{j}$

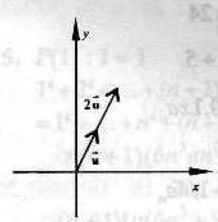
21.



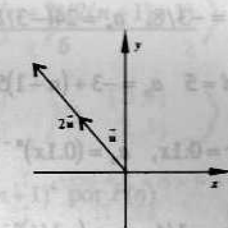
23.



25.



27.



29. $c_h=12\ c_v=1$ **31.** $c_h=1\ c_v=-17/6$

33. **(a)** $2(\cos\ (-\pi/4)+i\operatorname{sen}(-\pi/4))$ **(b)** $\sqrt{2}\vec{i}-\sqrt{2}\vec{j}$

35. **(a)** $4(\cos(5\pi/6)+i\operatorname{sen}(5\pi/6))$ **(b)** $-2\sqrt{3}\vec{i}+2\vec{j}$

37. –5 **39.** 2

41. $u=|u|\ (\cos\theta_1\vec{i}+\operatorname{sen}\theta_2\vec{i})$
$v=|v|\ (\cos\theta_2\vec{i}+\operatorname{sen}\theta_2\vec{i})$
$u\cdot v=|u||v|\ [(\cos\theta_1\cos\theta_2+\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2]$
$=|u||v|\cos(\theta_1-\theta_2)$
siendo $\theta=\theta_1-\theta_2$.

43. 60.26° **45.** 17.10° **47.** Aproximadamente 27.2 kg y 30.95° respectivamente.

49. $8\vec{i}-40\vec{j}$

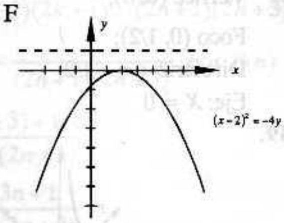
51. El curso es N24.38°E con una velocidad de 363.52 millas/h.

53. 129.3 kg aproximadamente.

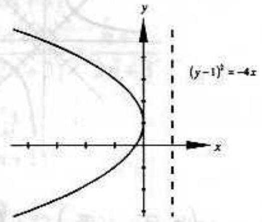
EJERCICIO DE REPASO (páginas 539-540)

1. V **3.** V **5.** V **7.** F **9.** F

11. Vértice (2, 0)
Foco (2, –1)
Directriz $y = 1$
Eje $x = 2$

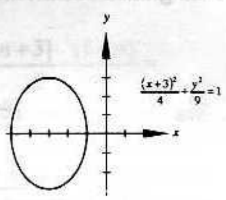


13. Vértice (0, 1)
Foco (–1, 1)
Directriz $x = 1$
Eje $y = 1$

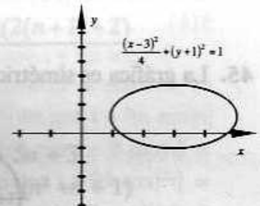


15. $(y-1)^2=8(x+3)$ **17.** $(y-1)^2=3(x-2)$

19. Centro (–3, 0)
Vértices (–3, 3), (–3, –3)
Focos $\left(-3,\ \sqrt{5}\right),\ \left(-3,\ -\sqrt{5}\right)$

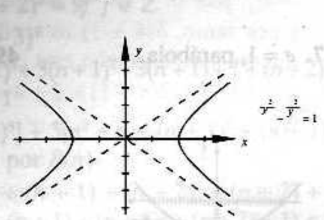


21. Centro (3, 1)
Vértices (5, 1), (1, 1)
Focos $\left(3+\sqrt{3},\ 1\right),\ \left(3-\sqrt{3},\ 1\right)$

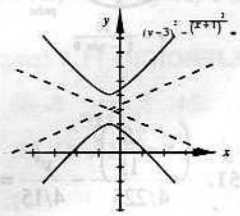


23. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{41}=1$ **25.** $(x+2)^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

27. Centro (0, 0)
Vértices (±2, 0)
Focos $\left(\pm\sqrt{8},\ 0\right)$
Asíntotas $y = \pm x$



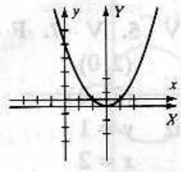
29. Centro (–1, 3)
Vértices (–1, 4) (–1, 2)
Focos $\left(-1,\ 3+\sqrt{10}\right)\ \left(-1,\ 3-\sqrt{10}\right)$
Asíntotas $y - 3 = \pm 1/3\ (x + 1)$



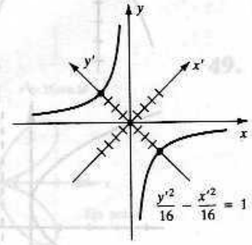
31. $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{28}=1$ **33.** $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$ **35.** $X^2+Y^2=20$

37. En el sistema XY con origen en el punto (3, –1/2) en el sistema xy:

Ecuación $X^2 = 2Y$;
Vértice (0, 0);
Foco (0, 1/2);
Directriz $y = -1/2$;
Eje: $X = 0$

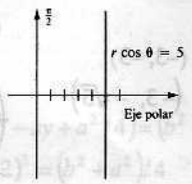


39.

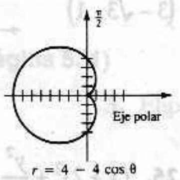


41. **(a)** $\left(2\sqrt{3},\ -\frac{\pi}{6}\right)$; **(b)** $\left(-2\sqrt{3},\ \frac{5\pi}{6}\right)$

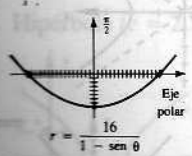
43. La gráfica es simétrica con respecto al eje polar.



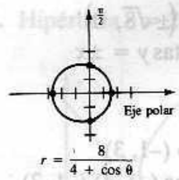
45. La gráfica es simétrica con respecto al eje polar.



47. $e = 1$, parábola



49. $e = 1$, parábola



51. $\dfrac{\left(x - \frac{8}{15}\right)^2}{4/225} - \dfrac{y^2}{4/15} = 1$; $e = 4$, $c = \dfrac{8}{15}$, $a = \dfrac{2}{15}$

53. $\langle -2,\ 5\rangle$ **55.** $\langle -6,\ 8\rangle$

57. Magnitud: $2\sqrt{3}$; ángulo director: $\dfrac{5\pi}{3}$

59. Magnitud: $2\sqrt{2}$; ángulo director: $\dfrac{7\pi}{4}$

61. Componente horizontal: 6; componente vertical: –5

63. $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ **65.** $2\sqrt{5}\left[\cos\frac{\pi}{6}\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\mathbf{j}\right]$

67. La fuente de luz está a 9/8 de pulgada del vértice sobre el eje.

69. $5\sqrt{2}$; 135°

69. **(a)** $2x'^2 - 3y'^2 - \frac{16\sqrt{5}}{5}x' + \frac{42\sqrt{5}}{5}y' - 17 = 0$

(b) $x'' = x' - \frac{4\sqrt{5}}{5}$ y $y'' = y' - \frac{7\sqrt{5}}{5}$, entonces la ecuación en (a) se convierte en $\frac{y''^2}{2} - \frac{x''^2}{3} = 1$.

CAPITULO 11

EJERCICIO 11.1 (páginas 548 - 550)

1. $-2, 4, -8, 16, -32$ **3.** 1, 3, 6, 10, 15 **5.** 1/2, 1/9, 1/28, 1/65, 1/126

7. 0, 0, 0, 0, 0 **9.** 2/5, 1/8, 4/11, 4/14, 6/17

11. 1, 1/3, 1/9, 3/5, 1/25, 5/7 **13.** $(-2)^{(-1)^n n}$ **15.** 2, 5, 9, 14, 20

17. 1/2, –1/2, –1, 3, 12 **19.** 1, 2, 3, 5, 8 **21.** 0, 1, 1, –1, –7

23. $d = -3,\ a_n = 1 - 3(n-1),\ \begin{cases} a_{n+1} = a_n - 3 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

25. $r = -3/8,\ a_n = 24(-3/8)^{n-1},\ \begin{cases} a_{n+1} = a_n(-3/8) \\ a_1 = 24 \end{cases}$

27. $d = 5\ \ a_n = -3 + (n-1)5,\ \ a_{n+1} = a_n + 5$

29. $r = 0.1x,\ a_n = (0.1x)^{n-1},\ \begin{cases} a_{n+1} = 0.1xa_n \\ a_1 = 1 \end{cases}$

31. $r = -1/4\ \ a_n = (-1/4)^{n-1},\ \begin{cases} a_{n+1} = -1/4a_n \\ a_1 = 1 \end{cases}$

33. 2, 6, 10, 14 **35.** 2.5, 3, 3.5, 4 **37.** 80

39. Sexto 1/16, Séptimo –1/32 **41.** $a_1 = -1/8$ **43.** $a_9 = 57$

45. $a_n = 3 + (n-1)4$ **47.** US\$145 **49.** US\$6,344.34 **51.** 0.084

53. 358 **55.** US\$137,434.90 **57.** 10, 19.6, 38.8, 77.2 **59.** $\sqrt{ab}$

EJERCICIO 11.2 (páginas 555-556)

1. 10 **3.** 21/4 **5.** 5/4 **7.** $0 + a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4$

9. $0 + 1 + 0 + (-1) + 0 + 1$ **11.** $\sum_{k=1}^{5} 2^{k+1}$ **13.** $\sum_{k=1}^{6} -(-1/3)^{k-1}$

15. $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{(2k)^2}$ **17.** 62 **19.** 155 **21.** –225 **23.** $\frac{65}{27}$ **25.** 22.22

27. $\frac{5^{10} - 1}{5^9 \cdot 4}$ **29.** $\frac{9}{4}$ **31.** $\frac{3}{7}$ **33.** $\frac{x}{x-1}$ **35.** $\frac{5}{9}$ **37.** $\frac{1}{7}$

39. $a_1 = -347.5,\ a_{20} = 412.5$ **41.** $n = 51,\ d = 0.75$ **43.** $r = 1/5$

45. $\frac{b^3}{a^2(b-a)}$ **47.** US\$36,600 **49.** 19,900 apretones de manos.

51. El segundo ganará al final del mes US\$10,737,418.23.

53. $\dfrac{n(5n+1)}{2}$

55. Reescriba S como $S = P + P(1+r) + \ldots + P(1+r)^{n-1}$
Entonces en (16) remplace r por $1 + r$, a por P y S_n por S.

57. 400 millones de dólares. **59.** 233 1/3 pies

61. **(a)** $\dfrac{n(n+1)}{2}$ **(b)** $n(n+1)$ **(c)** n^2

EJERCICIO 11.3 (páginas 560-561)

1. $P(1) : 2 = 2$

$$2 + 4 + \ldots + 2(n+1) = 2 + 4 + \ldots + 2n + 2n(n+1)$$
$$= n^2 + n + 2(n+1) \text{ por } P(n)$$
$$= n^2 + 3n + 2$$
$$= (n+1)^2 + (n+1)$$

3. $P(1) : 1 = 1$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ por } P(n)$$
$$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

5. $P(1) : 1 = 1$

$$1^4 + 2^4 + \ldots + (n+1)^4$$
$$= 1^4 + \ldots + n^4 + (n+1)^4$$
$$= \frac{n(n+1)(6n^3 an^2 + n - 1)}{30} + (n+1)^4 \text{ por } P(n)$$
$$= \frac{(n+1)[n(6n^3 + 9n^2 + n - 1) + 30(n+1)^3]}{30}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(6(n+1^3 + 9(n+1)^2 + (n+1) - 1))}{30}$$

7. $P(1) : 3 = 3$

$$\sum_{k=1}^{n}(4k-1) = \sum_{k=1}^{n}(4k-1) + 4(n+1) - 1$$
$$= n(2n+1) + 4n + 3 \text{ por } P(n)$$
$$= 2n^2 + 5n + 3$$
$$= (n+1)(2n+3)$$
$$= (n+1)(2(n+1)+1)$$

9. $P(1) : 2 = 2$

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = \sum_{k=1}^{n} 2^k + 2^{n+1}$$
$$= 2(2^n - 1) + 2^{n+1} \text{ por } P(n)$$
$$= 2^{2n+1} - 2 + 2^{n+1}$$
$$= 2(2^{n+1}) - 2$$
$$= 2[2^{n+1} - 1]$$

11. $P(1) : \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \text{ por } P(n)$$
$$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

13. $P(1) : 1 : 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2$$
$$= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \text{ por } P(n)$$
$$= \frac{(2n+1)[n(2n-1) + 3(2n+1)]}{3}$$
$$= \frac{(2n+1)[2n^2 - n + 6n + 3]}{3}$$
$$= \frac{(2n+1)(2n^2+5n+3)}{3}$$
$$= \frac{(2n+1)(2n+3)(n+1)}{3}$$
$$= \frac{(n+1)(2(n+1)-1)(2(n+1)+2)}{3}$$

15. $P(1) : 3 = 3(1)$

$P(n) : n^3 + 2n = 3(j) \quad j \in Z$

$$(n+1)^3 + (2(n+1)) = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$$
$$= n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1)$$
$$= 3(j + n^2 + n + 1) \text{ por } P(n)$$
$$j + n^2 + n + 1 \in Z$$

17. $P(1)\ 1 + 8 + 27 = 36 = 9(4)$

$P(n) : n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9j \quad j \in Z$

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$$
$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + (n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 + (n+2)^3 + 3(n+2)^2 + 3(n+2) + 1$$
$$= [n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3] + 3[n^2 + n + (n+1)^2 + (n+1) + (n+2)^2 + (n+2) + 1] \text{ por } P(n)$$
$$= 3(j + n^2 + n + (n+1)^2 + (n+1) + (n+2)^2 + (n+2) + 1)$$
$$\text{y } (j + n^2 + n + (n+1)^2 + (n+1) + (n+2)^2 + (n+2) + 1) \in Z.$$

19. $P(1)\ 5^1 - 1 = 4 = 4(1)$

$P(n)\ 5^n - 1 = 4j \quad j \in Z$

$$5^{n+1} - 1 = 5^n 5 - 1$$
$$= 5^n 5 - 5 + 4$$
$$= 5[5^n - 1] + 4$$
$$= 5(4j) + 4 \text{ por } P(n)$$
$$= (5j+1)4 \text{ y } 5j + 1 \in Z$$

21. $P(1)\ 3(1) = 3 = 3^1 \therefore 3(1) \le 3^1$

$P(n)\ 3n \le 3^n$

$$3(n+1) = 3n + 3 \le 3^n + 3 \text{ por } P(n)$$
$$\le 3^n + 3^n + 3^n$$
$$= 3^{n+1}$$

23. $P(1)\ \log_{10} 1 = 0 < 1$

$P(n)\ \log_{10} n = < n$

$\log_{10}(n+1) = \log_{10} 1(n(1+1/n))$

$= \log_{10} n + \log_{10} 1(1+1/n)$

$< n + \log_{10}(1+1/n)$ por $P(n)$

$\leq n + \log_{10}(2)$ pues $1/n \leq 1$

$< n+1$ pues $2 < 10$

25. $P(1)\ \ a_1 = 4(1) - 3 = 1$

$a_{n+1} = a_n + 4$

$= 4n - 3 + 4$ por $P(n)$

$= 4(n+1) - 3$

27. $P(1)\ \ a_1 = \dfrac{1^2+1+2}{2} = 2$

$a_{n+1} = a_n + n + 1$

$= \dfrac{n^2+n+2}{2} + n + 1$ por $P(n)$

$= \dfrac{n^2+3n+4}{2}$

$= \dfrac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$

29. Sea $S(n)$ la proposición que $[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n[(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)]$ es verdadera para todo entero n positivo.

Ya que $[r(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)]^1 = r[(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)]$ es verdadera, la proposición $S(1)$ es verdadera. Suponga que $S(k)$,

$[r(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)]^k = r^k[(\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta)]$

es verdadera. Entonces,

$[r(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)]^{k+1}$

$= [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^k\,[r[(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]]$

$= [r^k(\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta]\,[r[(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]]$

$= r^{k+1}[\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta]\,[\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta]$

$= r^{k+1}[(\cos k\theta\cos\theta - \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen}\theta) + i(\operatorname{sen} k\theta\cos\theta + \cos\theta\ k \operatorname{sen}\theta)]$

$= r^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i \operatorname{sen}(k+1)\theta]$

y por tanto, $S(k+1)$ es verdadera. Luego, por inducción matemática la prueba está completa.

31. $2 + 4 + \ldots + 2(n+1) = 2 + 4 + \ldots + 2n + (2n+2)$

$= n^2 + n + 1 + 2n + 2$

$= (n+1)^2 + (n+1) + 1$

No se cumple $P(j)$ para ningún $j \in \mathbb{Z}$.

$2 + 4 + \ldots + 2n = 2(1 + \ldots + n) = n(n+1) = n^2 + n \neq n^2 + n + 1$

EJERCICIO 11.4 (páginas 566-567)

1. 24 **3.** $\dfrac{1}{120}$ **5.** 48 **7.** 15 **9.** 10 **11.** 1 **13.** $n+1$

15. $\dfrac{n+2}{n}$ **17.** 6! **19.** 1000! **21.** 8! 4! **23.** $\dfrac{8!}{6!}$ **25.** $\dfrac{m!}{(m-3)!}$

27. V **29.** F **31.** V **33.** $x^8 - 6x^4y^2 + 9y^4$

35. $x^{-6} + 3x^{-4}y^{-2} + 3x^{-2}y^{-4} + 5^{-6}$

37. $x + 4x^{3/4}y^{1/4} + 6x^{1/2}y^{1/2} + 4x^{1/4}\cdot y^{3/4} + y$

39. $x^{15} - 5x^{12}y^3 + 10x^9y^6 - 10x^6y^9 + 5x^3y^{12} - y^{15}$

41. $(x-y)^3 + 3(x-y)^2z + 3(x-y)z^2 + z^3$

43. $n = 8;\ 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1$

$n = 9;\ 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1$

45. $7ab^6$ **47.** $6x^6y^6$ **49.** $70(3)^4y^4$ **51.** $165x^3y^8$ **53.** x^{10} **55.** 924

57. 0.9901 **59.** $(1+6)^6 = 7^6$

0.94148 en calculadora.

61. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0^n = 0$

63. **(a)** $(1.0003)^{10} = (1 + 0.0003)^{10}$

$= 1 + 11(0.0003) + k$ con $k > 0$

$= 1 + 0.0033 + k$ con $k > 0$

> 1.003004

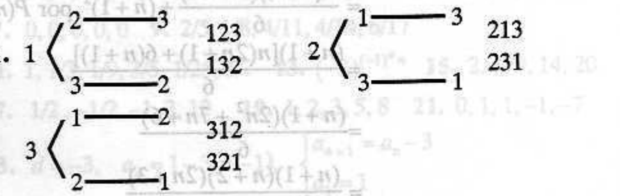
(b) $(1.01)^{50} = (1 + 0.01)^{50}$

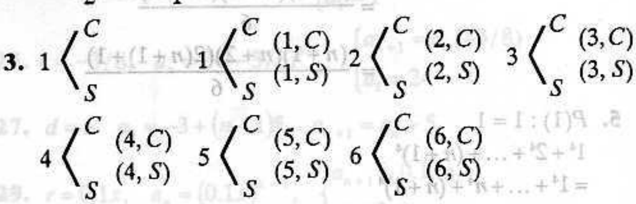
$= 1 + 51(0.01) + k$ con $k > 0$

$= 1.51 + k$ con $k > 0$

> 1.51

EJERCICIO 11.5 (páginas 573-575)

1. 

3. 

5. $6 \times 4 \times 8 \times 5 = 960$ **7.** $7 \times 10^2 = 700$ **9.** 20

11. 7 **13.** 7! **15.** 97020 **17.** 120 **19.** 1860480, 20!

21. 15 **23.** 4950 **25.** 190 **27.** 1 **29.** 792

31. 126 **33.** 9,240 **35.** **(a)** 6,720 **(b)** 18,354 **(c)** 210

37. **(a)** 3,780 **(b)** 2,430 **(c)** 1,920 **(d)** 11,520

39. **(a)** 360 **(b)** 1,296 **(c)** 2,401 **41.** 55,440

43. $C(10,3) + C(10,4) + C(10,5) + \ldots + C(10,10) = 968$

EJERCICIO 11.6 (páginas 578-579)

1. {(C, C), (C, S), (S, C), (S, S)}

3. {(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6), (S, 1), (S, 2), (S, 3), (S, 4), (S, 5), (S, 6)}

5. $\dfrac{1}{13}$ **7.** $\dfrac{5}{36}$ **9.** $\dfrac{2}{9}$ **11.** $\dfrac{1}{6}$ **13.** $\dfrac{48}{C(52,5)} = 0.0000185$

15. $\dfrac{40}{C(52,5)} = 0.0000154$ **17.** 0.3412 **19.** 0.96875 **21.** 0.96875

23. **(a)** 0.196 **(b)** 0.965

25. **(a)** $\dfrac{1}{4^{10}} = \dfrac{1}{1048576} \approx 0.000000953$

(b) $\dfrac{120}{4^{10}} = \dfrac{120}{1048576} \approx 0.00011444$

27. 2/9 **29.** **(a)** $\frac{7}{12}$ **(b)** $\frac{5}{12}$ **(c)** $\frac{1}{6}$

31. **(a)** $\frac{(13)!20!}{(25)!(8)!} = \frac{154440}{6375600}$ **(b)** $1 - \frac{C(12,5)}{C(25,5)} = 1 - \frac{12!20!}{7!25!}$

33. Para $n = 1, 2, \ldots, 6,$ $\quad P(n) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

EJERCICIO DE REPASO (páginas 579-581)

1. F **3.** V **5.** V **7.** V **9.** F

11. 11, 8, 5, 2, –1 **13.** 1, –2, 3, –4, 5

15. –1, 1, 1, 3, 7 **17.** $-\frac{1}{9}$ **19.** $-\frac{3^9+1}{36}$

21. A recibe 24,000 B recibe 72,600 $\therefore$ B recibe más que A

25. $P(1)\quad 5 = 5$

$5 + 9 + \ldots + (4n + 1) + (4(n + 1) + 1)$

$= 2n^2 + 3n + (4n + 5)$ por $P(n)$

$= 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3$

$= 2(n + 1)^2 + 3(n + 1)$

27. $P(4)\quad 4! = 24 > 16 = 2^4$

$(n + 1)! = n!\,(n + 1)$

$> 2^n\,(n + 1)$

$> 2^n \cdot 2$ pues $n \geq 4$

$= 2^{n+1}$

29. 24 **31.** 56 **33.** 45

35. $(2x)^4 + 4(2x)^3(3y) + 6(2x)^2\,(3y)^2 + 4(2x)\,(3y)^3 + (3y)^4$

37. $(3a)^5 - (3a)^4 + (3a)^3 - (3a)^2 + (3a) - 1$

39. $15(2x)^4 y^2$ **41.** $10x^2 y(z^3)^9$

43. Es el tercer término y el coeficiente de x^4 es $(45)(2)^8$.

45. { {(C, C), (C, C), (C, C)}, {(C, C), (C, C), (C, C)},
{(C, C), (C, C), (S, C)}, {(C, C), (C, C), (S, S)},
{(C, C), (C, S), (C, C)}, {(C, C), (C, S), (C, S)},
{(C, C), (C, S), (S, C)}, {(C, C), (C, S), (S, S)},
{(C, C), (S, C), (C, C)}, {(C, C), (S, C), (C, S)},
{(C, C), (S, C), (S, C)}, {(C, C), (S, C), (S, S)},
{(C, C), (S, S), (C, C)}, {(C, C), (S, S), (C, S)},
{(C, C), (S, S), (S, C)}, {(C, C), (S, S), (S, S)},
{(C, S), (C, C), (C, C)}, {(C, S), (C, C), (C, S)},
{(C, S), (C, C), (S, C)}, {(C, S), (C, C), (S, S)},
{(C, S), (C, S), (C, C)}, {(C, S), (C, S), (C, S)},
{(C, S), (C, S), (S, C)}, {(C, S), (C, S), (S, S)},
{(C, S), (S, C), (C, C)}, {(C, S), (S, C), (C, S)},
{(C, S), (S, C), (S, C)}, {(C, S), (S, C), (S, S)},
{(C, S), (S, S), (C, C)}, {(C, S), (S, S), (C, S)},
{(C, S), (S, S), (S, C)}, {(C, S), (S, S), (S, S)},
{(S, C), (C, C), (C, C)}, {(S, C), (C, C), (C, S)},
{(S, C), (C, C), (S, C)}, {(S, C), (C, C), (S, S)},
{(S, C), (C, S), (C, C)}, {(S, C), (C, S), (C, S)},
{(S, C), (C, S), (S, C)}, {(S, C), (C, S), (S, S)},
{(S, C), (S, C), (C, C)}, {(S, C), (S, C), (C, S)},
{(S, C), (S, C), (S, C)}, {(S, C), (S, C), (S, S)},
{(S, S), (C, C), (C, C)}, {(S, S), (C, C), (C, S)},
{(S, S), (C, C), (S, C)}, {(S, S), (C, C), (S, S)},
{(S, S), (C, S), (C, C)}, {(S, S), (C, S), (C, S)},
{(S, S), (C, S), (S, C)}, {(S, S), (C, S), (S, S)},
{(S, S), (S, C), (C, C)}, {(S, S), (S, C), (C, S)},
{(S, S), (S, C), (S, C)}, {(S, S), (S, C), (S, S)},
{(S, S), (S, S), (C, C)}, {(S, S), (S, S), (C, S)},
{(S, S), (S, S), (S, C)}, {(S, S), (S, S), (S, S)},

47. **(a)** 240 **(b)** 120 **(c)** 136 **49.** 56 **51.** 719

53. **(a)** $2 \cdot (10!) \cdot (12!)$ **(b)** 22!

55. {(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 3, 3), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 1), (2, 3, 2), (2, 3, 3), (3, 1, 1), (3, 1, 2), (3, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 2, 2), (3, 2, 3), (3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 3)}

57. $\frac{C(26,5)}{C(52,5)} = \frac{26!\,47}{21!\,52!} = \frac{22.23.24.25.26}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$

59. $P(\{\text{todos del mismo sexo}\}) = \frac{2}{2^6} = \frac{1}{32}$

$P(\{\text{tres de cada sexo}\}) = \frac{20}{64} = \frac{10}{32}$

$P(\{\text{4 de un sexo y 2 de otro}\}) = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$

lo más probable es que cuatro sean de un sexo y dos sean de otro.

61. **(a)** $\frac{15}{53}$ **(b)** $\frac{21}{33}$ **(c)** $\frac{32}{53}$

63. **(a)** 24 **(b)** $\frac{1}{[C(15,5)]^4 \cdot C(15,4)} \approx \frac{1}{1.1x10^{17}} \approx 9x10^{-18}$

EJERCICIO A (páginas 589-590)

1. $m = 0.2430,\ c = 2$ **3.** $m = 0.4786,\ c = -4$
5. $m = 0.8344,\ c = 5$ **7.** 3.6749 **9.** −4.2464
11. 3.4304 **13.** 1.0285 **15.** 5.8833 **17.** 0.9824
19. 2.6742 **21.** −2.9194 **23.** 6.8740 **25.** −1.3509
27. $m = 0.3678,\ c = 2$ **29.** $m = 0.4234,\ c = -5$
31. $m = 0.7320,\ c = -2$ **33.** $m = 0.6521,\ c = 0$
35. $m = 0.7111,\ c = 6$ **37.** $m = 0.2965,\ c = -5$
39. 494 **41.** 0.0287 **43.** 0.00000998 **45.** 258.4
47. 0.00004084 **49.** 2.542 **51.** 1.7579 **53.** 5.1930
55. −0.5655 **57.** 0.9171 **59.** 0.3574 **61.** 0.2022
63. 0.6730 **65.** 0.8550 **67.** 0.4122 **69.** 31°23′
71. 68°24′ **73.** 18°44′ **75.** 207°; 333°

Indice

Créditos

Capítulo 1: página 1, Historical Pictures Service, Inc.; pagina 11, British Museum, Art Resource; página 24, NASA; página 35, Elizabeth Hamlin, Stock, Boston.

Capítulo 2: página 61, Giraudon, Art Resource; página 84, North Wind Pincture Archives; página 99, Omikron Collection, Photo Archives, Inc., and R. Laird, FPG International; páginas 111-112, New York Public Library.

Capítulo 3: página 119, North Wind Pincture Archives; página 125, Tim Carlson, Stock, Boston; página 139, Peter Menzel, Stock, Boston; página 177, UPI/Bettman Newsphotos.

Capítulo 4: página 183, Smithsonian Institution; página 193, Star Tribune; página 203, North Wind Picture Archives.

Capítulo 5: página 237, Smithsonian Institution; página 243, St. Louis Regional Commerce and Growth Association; página 264, AP/Wide World Photos; página 266, Robert V. Eckert, Jr., The Picture Cube.

Capítulo 6: página 271, David Eugene Smith Collection, Rare Book and Manuscript Library, Columbia University; página 273, Harold E. Edgerton, MIT, Cambridge, Ma.; página 309, Peter Southwick, Stock, Boston.

Capítulo 7: página 329, Historical Pictures Service, Inc.; página 341, David R. Frazier, Photo Researchers, Inc.; página 348, Smithsonian Institution.

Capítulo 8: página 405, George B. Danzig (photographer unknown); página 437, Mosby, Stock, Boston; página 438, G.C. Kelly, Stock, Boston.

Capítulo 9: página 441, North Wind Picture Archives; página 442, Frank Siteman, Stock, Boston.

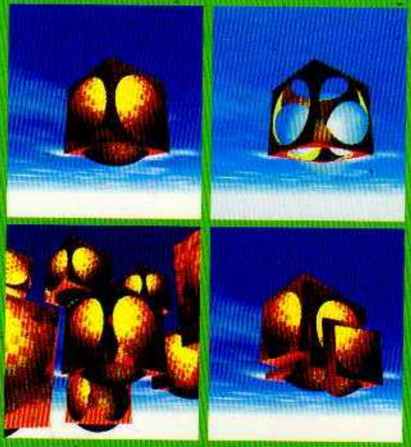
Capítulo 10: página 485, Columbia University; página 524, Joe Monroe, Photo Researchers, Inc.; página 524, Carl Zeiss, Photo Researchers, Inc.

Capítulo 11: página 541, Gale Research, Inc.; página 557, Leif Skoogfors, Stock, Boston; página 574, Peter Southwick, Stock, Boston; página 575, Pressman Toy Company; página 581, Frank Siteman, Stock, Boston.

ÁLGEBRA y TRIGONOMETRÍA

Segunda edición revisada

- **Allendoerfer** — Matemáticas universitarias, 4a. ed.
- **Ayres** — Trigonometría, 2a. ed. (Schaum)
- **Barco-Aristizábal** — Matemática digital
- **Barnett** — Álgebra y trigonometría, 3a. ed.
- **Eslava** — Introducción a las matemáticas universitarias
- **Larson** — Cálculo, 5a. ed.
- **Lipschutz** — Teoría de conjuntos y temas afines (Schaum)
- **Rees** — Álgebra, 10a. ed.
- **Rich** — Álgebra elemental, 3a. ed. (Schaum)
- **Smith-Minton** — Cálculo
- **Spiegel** — Álgebra superior (Schaum)



ISBN 958-41-0162-5
9 789584 101624

McGraw Hill